F 1736

R

REFERATIVA

STUDII ŞI CERCETĂRI DE ENERGETICĂ ŞI ELECTROTEHNICĂ

1

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
St. cerc. energ. electr. Tom 14 Nr. 1 p. 1—252 Bucureşti 1964

F 1736

STUDII ŞI CERCETĂRI
DE
ENERGETICĂ
ŞI
ELECTROTEHNICĂ

Tomul 14, nr. 1 1964

SUMAR

Energetică generală

M. ELEFTERESCU, ŞT. KOVÁCS şi GH. TRANDAFIRESCU, Indici comparativi ai transportului de combustibil şi energie electrică 3

V. CARACUDOVICI şi S. MANEA, Aspecte energo-economice ale producerii frigului în gospodăriile casnice 15

M. WEISS şi V. CARACUDOVICI, Consumul de energie în gospodăriile casnice pentru radio şi televiziune 23

Electroenergetică şi electrotehnică

R. RĂDULEŢ şi C. I. MOCANU, O nouă aproximare a factorilor de formă ai şarjei cuptoarelor de inducţie fără fier la refulare netă a cruentului indus 33

R. RĂDULEŢ şi C. I. MOCANU, O aproximaţie a fenomenelor de refulare netă a curentului electric alternativ în conductoarele prismatice cu oricite feţe. 47

A. ŢUGULEA, Efectul de proximitate dintre un fir rectiliniu parcurs de curentul alternativ şi un cilindru conductor paralel cu firul 63

C. V. BĂLĂ, Despre posibilitatea de rezolvare analogică a problemei încălzirii polilor inductori masivi ai maşinilor sincrone 71

A. PETROIANU, V. ROMERT, B. UNGUREANU şi I. ZAMFIRESCU, Rezultate obţinute în R.P.R. privind calculul regimurilor staţionare de funcţionare a sistemului energetic, cu ajutorul calculatoarelor electronice numerice 83

I. ADĂMUŢ, Analiza fenomenului de deconectare a unei linii în gol cu un întreruptor cu ulei puţin 99

M. E. BÎRGĂUANU și C. V. BĂLĂ, Metode electrice și mecanice de integrare a patratului unei mărimi date . . . 113

Termoenergetică și termotehnică

N. ANTONESCU, C. ARIEȘANU, Eficiența turbionării amestecului combustibil în mărirea vitezei de ardere a combustibililor gazoși 123

A. RADU-CERNEA, Influența turbulenței în curent organizat asupra arderii în motoarele cu aprindere prin scînteie 133

D. GRECOV, I. IORDACHE, E. GUȚU și ATH. TRUȚEA Cercetări asupra radiației flăcărilor obținute în cazul arderii în două etape a gazului metan 143

C. A. VASILESCU, Schimbul de căldură în canalul de evacuare la motoarele cu ardere internă 161

V. PIMSNER, Eforturile axiale ale turbocompresoarelor de supraalimentare a motoarelor cu ardere internă . . . 173

STANISLAV KUCZEWSKI, Unele probleme energetice ale construcției ventilatoarelor în R.P. Polonă 183

Comunicări

M. MARINESCU, Asupra unor noi proprietăți ale electromagneților de tip solenoidal 195

P. DIMO, Schema radială, structură simplă tip, reprezentativă, în studiul sistemelor electroenergetice 203

A. AVRAMESCU, Timpul de difuziune în axa profilelor pătrate și dreptunghiulare 209

Note

V. GHIA și E. FERCALĂ, Arzătorul combinat cu pulverizare mixtă de 190 kg/h 213

C. A. VASILESCU și B. BARBESCU, Îmbunătățirea performanțelor motoarelor Diesel cu antecameră prin modificarea desfășurării arderii 221

C. MANEA, În legătură cu influența supapei de refulare asupra legii de injecție 227

N. PĂNOIU, Focarul turbionar 231

I. HRISTESCU, M. ROSENBERG și I. NISTOR, Instalații de fluidizare pentru prelucrarea cărbunilor. . . 241

Recenzii 247

Din viața internațională 251

M. ELEFTERESCU, ST. KOVÁCS, GH. TRANDAFIRESCU

620.98.003 : 621.315 : 656.028-4

Indici comparativi ai transportului de combustibil și energie [electrică

Pornind de la constatarea că transportul de energie electrică înregistrează în ultima vreme o creștere considerabilă, deși acest sistem de transport încă nu poate fi considerat un sistem ieftin de transport, autorii analizează diversele soluții care vin în considerare pentru alimentarea cu energie electrică a unui consumator de la o sursă oarecare de combustibil, subliniind necesitatea de a ține seama la efectuarea comparației și de consumurile de energie necesare efectuării transportului.

St. cerc. energ. electr., Tom. 14, 1964, Nr. 1, p. 3

V. CARACUDOVICI, S. MANEA

628.83.003 :620.12

Aspecte energo-economice ale producerii frigului în gospodăriile casnice

Pe baza rezultatelor unui calcul tehnico-economic se trage concluzia că este oportună fabricarea și la noi în țară a frigiderelor cu compresor pentru capacitate mare (peste 100 litri) și menținerea producției de frigidere cu absorbție pentru capacitate mică (sub 100 litri).

St. cerc. energ. electr., Tom. 14, Nr. 1, 1964, p. 15

M. WEISS, V. CARACUDOVICI

628.83

Consumul de energie în gospodăriile casnice pentru radio și televiziune

Apreciindu-se dinamica numărului de abonați radio și de televiziune spre a ajunge la nivelul unor țări dezvoltate din acest punct de vedere, s-au făcut unele evaluări privind puterile unitare și numărul orelor anuale de folosire ceea ce a făcut posibil să se determine consumul, puterile orare, medii și maxime anuale, pe perioada anilor 1960 — 1980.

Concluziile subliniază că deși valorile absolute sînt importante, raportate la puterea instalată și la producția de energie din țară, ponderile sînt mici și nu grefează substanțial sistemul energetic.

St. cerc. energ. electr., Tom. 14, Nr. 1, 1964, p. 23

REMUS RĂDULET, C. I. MOCANU

621.365.52.014.1 : 537.62

O nouă aproximare a factorilor de formă ai șarjei cuptoarelor de inducție fără fier la refulare netă a curentului indus

Șarja topită a unui cuptor de inducție fără fier, coaxială cu bobina lui inductoare cilindrică, are o formă cuprinsă între cele de cilindru circular scurt și elipsoid de rotație, determinată în partea inferioară de forma fundului și pereților creuzetului izolant în care se găsește, iar în partea superioară de efectul de reostricțiune al curenților induși în șarjă și refulați spre suprafața ei, care produce un efect de brasaj ce ridică în părțile centrale nivelul materialului topit deasupra nivelului său în părțile laterale ale șarjei.

St. cerc. energ. electr., Tom. 14, Nr. 1, 1964, p. 33

R. RĂDULEȚ, C. I. MOCANU **537.62 : 621.3.014.1**

O aproximație a fenomenelor de refulare netă a curentului electric alternativ în conductoarele prismatice cu oricîte fețe

Se calculează factorul în alternativ al barelor prismatice cu oricîte fețe, la refulare netă a curentului, în două aproximații. În una, afluxul de putere este calculat cu vectorul lui Poynting pe baza cîmpului magnetic exterior care ar exista la refulare netă a curentului, în dreptul fiecărei fețe dacă fețele adiacente ei ar fi semiplane infinite, limitate de cele două muchii care mărginesc fața ; în cea de a doua, pe baza mediei aritmetice a intensităților cîmpului magnetic exterior care ar exista în dreptul fiecărei fețe dacă aceasta, împreună cu cîte una din cele două fețe adiacente, ar forma un diedru, semiplanele lui infinite fiind limitate de muchia dintre cele două fețe. Repartiția solenației pe diferitele fețe se obține în ambele cazuri printr-o metodă de minim. Comparația cu date experimentale și cu rezultate teoretice obținute cu ajutorul unor mijloace matematice mai complicate arată o bună aproximare a acestora.

St. cerc. energ. electr., Tom. 14, Nr. 1, 1964, p. 47

ANDREI TUGULEA **537.312.8 :621.3.014.1**

Efectul de proximitate dintre un fir rectiliniu parcurs de curent alternativ și un cilindru conductor paralel cu firul

Se determină curenții turbinari induși într-un cilindru conductor de un fir paralel cu el, parcurs de curent alternativ. Se calculează pierderile și cîmpul electromagnetic în exteriorul conductorului și se particularizează soluția pentru cazuri care prezintă interes în practică. Determinarea cîmpurilor se face cu ajutorul potențialului vector a cărui ecuație se integrează prin separarea variabilelor.

St. cerc. energ. electr., Tom. 14, Nr. 1, 1964, p. 63

C. V. BĂLĂ **621.3.004.61 :537.312.8 :518.5**

Despre posibilitatea de rezolvare analogică a problemei încălzirii polilor inductori masivi ai mașinilor sincrone

În lucrare se examinează posibilitățile de rezolvare analogică a procesului termic tranzitoriu, la pornirea în asincron a mașinilor sincrone cu poli inductori masivi, în ipoteza refulării nete a cîmpului magnetic ; de asemenea, se presupune o transmisie a căldurii după o singură direcție. Pentru rezolvarea ecuațiilor cu derivate parțiale neliniare se propun metode analogice prin utilizarea circuitelor electrice formate dintr-un șir de cuadripoli conectați în serie, ale căror elemente sînt neliniare.

St. cerc. energ. electr., Tom. 14, Nr. 1, 1964, p. 71

A. PETROIANU, V. ROMERT, B. UNGUREANU și I. ZAMFIRESCU

621.311.1.004.15 : 518.5

Rezultate obținute în R.P.R. privind calculul regimurilor staționare de funcționare a sistemului energetic, cu ajutorul calculatoarelor electronice numerice

Se tratează probleme de calcul ale regimurilor staționare pe calculatoare electronice prin metode iterative.

St. cerc. energ. electr., Tom. 14, Nr. 1, 1964, p. 83

I. ADĂMUT 621.315.1.064.221.621.316.57.064.25

Analiza fenomenului de deconectare a unei linii în gol cu un întreruptor cu ulei puțin

În lucrare se analizează pe baza oscilogramelor obținute la încercările de deconectare a unei linii în gol influența anumitor parametri funcționali (lungimea liniei, momentul de separare a contactelor, fenomenele de pe fazele vecine) asupra procesului de stingere și asupra factorului de supratensiune.

St. cerc. energ. electr., Tom. 14, Nr. 1, 1964, p. 99

M. E. BÎRGĂUANU, C. V. BĂLĂ 517.3.518.4

Metode electrice și mecanice de integrare a pătratului unei mărimi date

Pentru efectuarea integralei pătratelor unei funcții reprezentate grafic se pot folosi diferite metode obiective sau subiective. Dispozitivele folosite pentru traducerea semnalului grafic în semnal electric și prelucrarea acestuia sînt mecanice, electrice sau mecanoelectrice. Se descriu diferitele traductoare și integratoare și se prezintă un aparat realizat de autori.

St. cerc. energ. electr., Tom. 14, Nr. 1, 1964, p. 113

N. ANTONESCU, C. ARIEȘANU 662.612:662.69

Eficiența turbionării amestecului combustibil în mărirea vitezei de ardere a combustibililor gazoși

Prin turbionarea inițială a amestecului combustibil se obține o puternică intensificare a arderii, prin mărirea vitezei de ardere de pînă la 12 ori.

Viteza de ardere este o funcție de momentul cantității de mișcare a curentului inițial. Acest lucru confirmă ipotezele folosite în descrierea matematică a procesului de ardere în curent turbionar, care acceptă că viteza de ardere este funcție numai de momentul cantității de mișcare din toate mărimile ce definesc curgerea turbionară.

St. cerc. energ. electr., Tom. 14, Nr. 1, 1964, p. 123

ADRIAN RADU-CERNEA 621.43-4

Influența turbulenței în curent organizat asupra arderii în motoarele cu aprindere prin scînteie

Articolul cuprinde rezultatul unor determinări experimentale care pun în evidență felul în care se modifică influența unor factori (avansul la declanșarea scînteii electrice, turația, compoziția amestecului carburant, raportul de compresie), asupra procesului de ardere în condițiile turbulenței în curent organizat, creată de o supapă cu vizieră, în comparație cu condițiile gazo-dinamice determinate de prezența unei supape normale.

St. cerc. energ. electr., Tom. 14, Nr. 1, 1964, p. 133

D. GRECOV, I. IORDACHE, E. GUȚU, ATH. TRUȚEA **662.69**

Cercetări asupra radiației flăcărilor obținute în cazul arderii în două etape a gazului metan

Proprietățile radiante ale flăcării în cazul arderii în două etape sînt studiate în funcție de gradul de preîncălzire al amestecului combustibil și modul de amestecare aer-combustibil în capul de ardere. Se dau rezultatele experimentale, din care rezultă posibilitățile de ridicare a gradului de negreală a flăcării în funcție de factorii analizați.

St. cerc. energ. electr., Tom. 14, Nr. 1, 1964, p. 143

CĂLIN ADRIAN VASILESCU **621.43.016**

Schimbul de căldură în canalul de evacuare la motoarele cu ardere internă

Se cercetează pe baza unui exemplu ponderea pe care o are transferul de căldură de la fluidul de lucru al motorului către mediul răcitor, arătîndu-se importanța schimbului de căldură în canalul de evacuare și factorii ce-l influențează. Se prezintă formula coeficientului de convecție de la gazele arse la pereții canalului de evacuare și invariantul schimbului de căldură.

St. cerc. energ. electr., Tom. 14, Nr. 1, 1964, p. 161

V. PIMSNER **611.438.621.6**

Eforturile axiale ale turbocompresoarelor de supraalimentare a motoarelor cu ardere internă

Lucrarea studiază modul de determinare a eforturilor axiale ce apar în turbocompresoarele ce alimentează motoarele cu ardere internă și analizează influența regimurilor de funcționare ale ansamblului motor-grup de supraalimentare asupra mărimii forțelor axiale. Se constată că pentru o determinare riguroasă a mărimilor studiate este necesară cunoașterea prealabilă a caracteristicilor compresorului, turbinei și a motorului cu ardere internă.

St. cerc. energ. electr., Tom. 14, Nr. 1, 1964, p. 173

STANISLAV KUCZEWSKI **621**

Unele probleme energetice ale construcției ventilatoarelor în R.P.Polonă

Lucrarea sintetizează preocupările cu aspect energetic care au apărut în R.P.Polonă, legate de studiul, experimentarea, proiectarea și exploatarea ventilatoarelor de putere mare. Se scoate în relief rolul și importanța muncii de cercetare, ca și a colaborării strînse cu exploatarea, în vederea obținerii rezultatelor aplicabile în practică. Lucrarea prezintă stadiul actual al performanțelor obținute de ventilatoarele utilizate în domeniul energetic, construite în R.P.Polonă.

St. cerc. energ. electr., Tom. 14, Nr. 1, 1964, p. 183

STUDII ŞI CERCETĂRI DE ENERGETICĂ ŞI ELECTROTEHNICĂ

MŰSZAKI KÖNYVTÁR

Tomul 14, nr. 1, 1964

Apare de 4 ori pe an

COMITETUL DE REDACŢIE

Acad. REMUS RĂDULEŢ — *redactor responsabil*;
Prof. G. Bărănescu, membru corespondent al Academiei R.P.R. — *redactor responsabil adjunct*;
Acad. A. Avramescu;
Prof. M. Marinescu, membru corespondent al Academiei R.P.R.;
V. M. Popov, membru corespondent al Academiei R.P.R.;
Prof. C. Aramă, membru corespondent al Academiei R.P.R.;
Prof. T. Ionescu, membru corespondent al Academiei R.P.R.;
Prof. Şt. Gheorghiu, membru corespondent al Academiei R.P.R.;
Ing. C. Apetrei;
Ing. Cs. Nagy;
Ing. V. Pimsner;
Ing. C. A. Vasilescu;
Ing. Ecaterina Arie — *secretar de redacţie*.

Manuscrisele, cărţile şi revistele pentru schimb, precum şi orice altă corespondenţă se trimit la Comitetul de redacţie pe adresa: BUCUREŞTI, Şos. Vitan nr. 236

INDICI COMPARATIVI AI TRANSPORTULUI DE COMBUSTIBIL ŞI ENERGIE ELECTRICĂ

de

M. ELEFTERESCU, ŞT. KOVÁCS şi GH. TRANDAFIRESCU

620.98.003 : 621.315 : 656.028 — 4

În ultima perioadă se manifestă o tendinţă de scădere a preţului energiei electrice, tendinţă manifestată în numeroase ţări, printre care şi ţara noastră şi, paralel cu aceasta, o creştere a consumului de energie electrică, ceea ce a condus la construirea de centrale noi, de putere sporită; ca urmare a acestei situaţii a rezultat mărirea distanţei dintre centrele de producere şi cele de consum de energie electrică şi deci, o creştere corespunzătoare a transportului de energie electrică.

Întrucît transportul de energie electrică încă nu poate fi considerat ca un transport ieftin de energie, el avînd, pentru anumite distanţe, serioşi concurenţi, cum sînt transportul de combustibil pe calea ferată, transportul de gaze şi, mai ales transportul de produse petrolifere prin conducte, în literatura tehnică de specialitate au apărut numeroase studii în legătură cu alegerea celor mai convenabile mijloace de transport de combustibil sau energie electrică; aceasta demonstrează, pe de o parte, importanţa acestei probleme din punct de vedere economic, iar pe de altă parte, faptul că problema este încă departe de a fi rezolvată.

În funcţie de natura formelor sau purtătorilor de energie al căror transport se compară, problema poate fi privită din două puncte de vedere :

1. Variantele de transport se referă la purtători de energie de aceeaşi natură, variantele respective diferind între ele numai în ceea ce priveşte sistemele de transport ce se utilizează ; în cazul în care purtătorii de energie consideraţi nu au aceeaşi putere calorifică, problema se rezolvă luînd în considerare şi raportul puterilor calorifice respective. Un exemplu pentru această situaţie îl constituie alegerea celui mai adecvat sistem pentru transportul cărbunelui la o anumită distanţă, sistemele de transport care ar veni în consideraţie fiind calea ferată, transportul rutier etc.

2. Variantele de transport ce se compară se referă la forme sau purtători de energie de natură diferită, variantele respective deosebindu-se deci, atît prin natura purtătorilor sau formelor de energie, cît şi prin sistemul de transport utilizat. Acesta este cazul cel mai frecvent întîlnit în practică, problema care apare de obicei fiind aceea de a compara transportul de energie electrică, cu transportul de combustibili de natură diferită, prin sisteme de transport diferite.

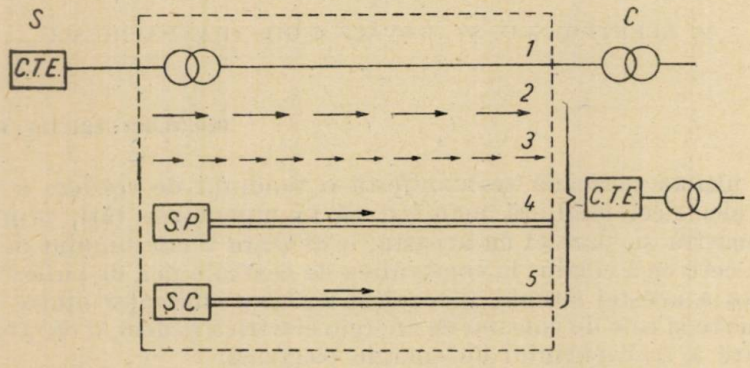
Variantele care se compară, de obicei, în acest caz sînt următoarele :

— transportul de energie electrică prin linii de 110—220—400 kV ;

— transportul de cărbune pe cale ferată, pe apă, sau chiar rutier, pentru distanţe mici ;

— transportul combustibilului lichid cu mijloacele discontinue menţionate mai sus, la care se adaugă transportul prin conducte ;

— transportul gazului metan prin conducte şi, mai rar, cu nave de construcţie specială.



Sisteme de transport luate în considerare pentru transportul energiei electrice şi combustibilului.

Avînd în vedere situaţia existentă în ţara noastră, variantele care vin în considerare în aceste condiţii, pot fi rezumate la cele menţionate în figură,

în care :

S — sursa de combustibil, care poate fi o exploatare minieră, sondă petroliferă, cîmp de gaze etc. ;
C — consumatorul de energie electrică ;
SP — staţia de pompare pentru produsele petrolifere ;
SC — staţia de comprimare pentru gaze ;
CTE — centrala termoelectrică ;
1 — transportul de energie electrică ;
2 — transportul de combustibil pe cale ferată ;
3 — transportul de combustibil cu mijloace auto ;
4 — transportul de produse petrolifere prin conducte ;
5 — transportul de gaze prin conducte.

În variantele menţionate elementele care diferă de la o variantă la alta, deci elementele care urmează a se compara sînt cele cuprinse în chenar.

Nu considerăm necesar a lua în considerare în etapa actuală alte mijloace de transport cum sînt transportul cu funiculare sau pe benzi transportoare, dat fiind domeniul de existenţă foarte restrîns al acestora, majoritatea acestor mijloace de transport fiind utilizate pe distanţe foarte scurte, în cadrul întreprinderilor. De asemenea, nu am luat în considerare transportul fluvial de combustibil, dat fiind faptul că rîurile din ţara noastră, fie din cauza debitului redus, fie din cauza îngheţului, nu permit un trafic continuu de mărfuri.

În cazurile frecvent întîlnite în literatură se consideră că în toate variantele ce se analizează se transportă aceeaşi cantitate de energie, echivalarea diverselor forme sau purtători de energie făcîndu-se pe baza randamentului centralei termoelectrice ; admiţîndu-se un randament, de exemplu de 32%, pentru centrala termoelectrică [1], se stabileşte următoarea echivalenţă :

1 kWh energie electrică = 0,38 kg cărbune cu o putere calorifică de 7 000 kcal/kg
= 0,31 Nm^3 gaz natural cu o putere calorifică de 8 500 kcal/Nm^3
= 0,30 l = 0,26 kg ţiţei brut cu putere calorifică de 10 400 kcal/kg.

În realitate, însă, transportîndu-se forme sau purtători de energie diferiţi, cu mijloace diferite de transport, şi pierderile de energie ce apar în cursul transportului vor fi diferite ; în aceste condiţii energia livrată consumatorului va fi de asemenea diferită.

Paralel cu aceasta este interesant de luat în considerare şi consumul de energie pentru efectuarea transportului, care, fiind diferit de la un sistem de transport la altul, contribuie de asemenea, la modificarea substanţială a raportului dintre cantitatea de energie ajunsă la consumator prin diverse sisteme de transport şi solicitările corespunzătoare ale surselor de energie.

În consecinţă, o metodă care să reflecte cît mai fidel situaţia reală, trebuie să ia în considerare faptul că, datorită pierderilor de energie în timpul transportului şi consumurilor specifice de combustibil diferite de la un sistem de transport la altul, pentru condiţii egale la punctul de plecare, vor rezulta condiţii diferite la punctul de sosire şi invers ; avînd în vedere însă că, în practica transportului, pierderile de combustibil pentru unele sisteme de transport sînt foarte mici, ele pot fi neglijate ; nu acelaşi lucru se poate spune însă despre transportul energiei electrice, la care pierderile de energie pot atinge valori importante ; considerăm util ca la analizarea variantelor de transport de combustibil şi energie electrică, pierderile de energie ce apar la transportul energiei electrice să fie comparate cu consumurile de combustibil caracteristice celorlalte variante de transport.

Avînd în vedere cele de mai sus rezultă că, paralel cu indicii referitori la preţul de cost, investiţie sau cheltueli de calcul, la alegerea soluţiei

privind transportul de combustibil şi energie electrică un rol important trebuie să fie atribuit şi indicelui de solicitare a sursei de energie, înţelegînd prin acest indice raportul dintre cantitatea de energie solicitată sursei şi cea ajunsă la consumator.

În aceste condiţii considerăm indicat ca la compararea variantelor de transport de combustibil şi energie electrică să se ia în considerare condiţii egale la consumator, rezultînd în funcţie de sistemul de transport utilizat şi de distanţa dintre consumator şi sursă, condiţii diferite la punctul de plecare.

Notînd cu :

E_c — cantitatea de energie electrică necesară anual consumatorului, exprimată în MWh/an ;

Q_s — cantitatea de combustibil solicitată sursei pentru satisfacerea cerinţelor consumatorului, exprimată în tone combustibil convenţional/an ;

L — distanţa la care se efectuează transportul,

pentru variantele menţionate în figură vor rezulta următorii indici de transport :

a. **Cantitatea de combustibil solicitată sursei pentru a avea anual la consumator cantitatea de energie electrică E_c**

1) În cazul transportului de energie electrică :

$$Q_{s_1} = E_c(1 + kL)\, q_{c.s.} \text{ tone combustibil convenţional/an,}$$

în care

k — coeficient reprezentînd consumul de energie electrică necesar pentru transportul unei kilowattore la distanţa de 1 km, exprimat în kWh/kWh.km ;

q_{cs} — consumul specific de combustibil în centrala termoelectrică situată lîngă sursa de combustibil, exprimat în tone cc/MWh ;

2) În cazul transportului de combustibil pe cale ferată

$$Q_{s_2} = E_c\, q_{c.c}\, \varphi_2 \left(1 + \frac{7\,000}{P_{c_i}} \cdot q_2 \cdot L 10^{-3}\right) \text{tone combustibil convenţional/an,}$$

unde

φ_2 — coeficient care ţine seama de pierderi ;

P_{c_i} — puterea calorifică inferioară a combustibilului ce se transportă, exprimată în kcal/kg ;

q_2 — consumul specific de combustibil caracteristic căii ferate în momentul la care se efectuează comparaţia, exprimat în kg c.c./t.km ;

$q_{c.c}$ — consumul specific de combustibil în centrala termoelectrică situată la consumator, exprimat în tone combustibil convențional/MWh.

În cazul variantelor care prevăd transportul de combustibil pe distanța L și transformarea acestuia în energie electrică într-o centrală amplasată în centrul de consum, se va considera situația generală în care consumul specific de combustibil din această centrală este diferit de cel al centralei amplasate lîngă sursă; de obicei lîngă sursele de combustibil se pot construi centrale electrice mai mari, avînd, natural, caracteristici superioare și care să alimenteze mai mulți consumatori.

În cazul amplasării centralei la consumator se consideră că aceasta este dimensionată numai pentru satisfacerea cerințelor de energie electrică ale consumatorului respectiv.

În aceste condiții

$$q_{cc} \geqslant q_{cs}.$$

3) În cazul transportului de combustibil cu mijloace auto

$Q_{s_3} = E_c \cdot q_{cc} \varphi_3 \left(1 + \frac{7\,000}{P_{c_i}} q_3 L 10^{-3}\right)$ tone combustibil convențional/an, notațiile fiind similare cu cele de la punctul 2.

4) În cazul transportului de combustibil lichid prin conducte

$$Q_{s_4} = E_c \cdot q_{c.c.} \varphi_4 \left(1 + \frac{7\,000}{P_{c_i}} w_4 q_c L 10^{-3}\right) \text{ tone combustibil convențional/an}$$

în care

w_4 — consumul specific de energie electrică pentru pomparea unei tone de combustibil lichid la distanța de 1 km, exprimat în kWh/t. km;

q_c — consumul specific de combustibil al centralei ce alimentează stația de pompare, exprimat în t.c.c./MWh,

celelalte notații avînd semnificațiile menționate anterior.

5) În cazul transportului de gaze prin conducte

$$Q_{s_5} = E_c q_{cc} \left(1 + \psi + \frac{7\,000}{P_{c_i}} w_5 q_c L 10^{-3}\right) \text{ tone combustibil convențional/an}$$

unde

ψ — termen care ține seama de pierderi;

w_5 — consumul specific de energie electrică în stațiile de comprimare exprimat în kWh/10^3Nm^3 ·km.

q_c — consumul specific de combustibil în centrala electrică ce alimentează stația de comprimare, în t.c.c./MWh;

P_{c_i} — puterea calorifică a gazului ce se transportă, exprimată în kcal/Nm^3.

b. Coeficientul de solicitare a sursei

Coeficientul de solicitare a sursei, k_s, definit anterior ca fiind raportul dintre cantitatea de combustibil solicitată sursei Q_s şi energia electrică ajunsă la consumator, E_c, va avea, în cazurile considerate, următoarele expresii :

1) În cazul transportului de energie electrică

$$k_{s_1} = \frac{Q_{s_1}}{E_c} = (1 + k\,L)\,q_{c.s.} \quad \text{tone combustibil convenţional/MWh.}$$

2) În cazul transportului de combustibil pe cale ferată

$$k_{s_2} = \frac{Q_{s_2}}{E_c} = \left(1 + \frac{7\,000}{P_{c_i}}\,q_2\,L\,10^{-3}\right)\varphi_2 q_{c.c} \text{ tone combustibil convenţional/MWh.}$$

3) În cazul transportului de combustibil cu mijloace auto

$$k_{s_3} = \frac{Q_{s_3}}{E_c} = \left(1 + \frac{7\,000}{P_{c_i}}\,q_3\,L\,10^{-3}\right)\varphi_3 q_{c.c.} \text{ tone combustibil convenţional/MWh.}$$

4) În cazul transportului de combustibil lichid prin conducte

$$k_{s_4} = \frac{Q_{s_4}}{E_c} = \left(1 + \frac{7\,000}{P_{c_i}}\,w_4 q_c L\,10^{-3}\right)\varphi_4 q_{c.c.} \text{ tone combustibil convenţional/MWh.}$$

5) În cazul transportului de gaze prin conducte

$$k_{s_5} = \frac{Q_{s_5}}{E_c} = \left(1 + \psi + \frac{7\,000}{P_{c_i}}\,w_5\,q_c\,L\,10^{-3}\right)q_{c.c.} \quad \text{tone combustibil convenţional/MWh.}$$

c. Energia e consumată pentru transport sau pierdută în timpul transportului

1) În cazul transportului de energie electrică

$$e_1 = k\,L\,E_c\,q_{cs} \qquad \text{tone combustibil convenţional/an}$$

sau

$$e_1' = k\,L\,E_c \qquad \text{MWh/an.}$$

2) În cazul transportului de combustibil pe cale ferată

$$e_2 = E_c\,q_{cc}\left(\frac{7\,000}{P_{c_i}}\,\varphi_2\,q_2\,L\,10^{-3} + \varphi_2 - 1\right) \text{ tone combustibil convenţional/an,}$$

sau

$$e'_2 = E_c\left(\frac{7\,000}{P_{c_i}}\,\varphi_2\,q_2\,L\,10^{-3} + \varphi_2 - 1\right)\text{MWh/an.}$$

3) În cazul transportului de combustibil cu mijloace auto

$$e_3 = E_c\,q_{cc}\left(\frac{7\,000}{P_{c_i}}\,\varphi_3\,q_3\,L\,10^{-3} + \varphi_3 - 1\right)\text{tone combustibil convenţional/an,}$$

sau

$$e'_3 = E_c\left(\frac{7\,000}{P_{c_i}}\,\varphi_3\,q_3\,L\,10^{-3} + \varphi_3 - 1\right)\text{ MWh/an.}$$

4) În cazul transportului de combustibil lichid prin conducte

$$e_4 = E_c\,q_{cc}\left(\frac{7\,000}{P_{c_i}}\,\varphi_4\,w_4\,q_c\,L\,10^{-3} + \varphi_4 - 1\right)\text{ tone combustibil convenţional/an,}$$

sau

$$e'_4 = E_c\left(\frac{7\,000}{P_{c_i}}\,\varphi_4\,w_4\,q_c\,L\,10^{-3} + \varphi_4 - 1\right)\text{MWh/an.}$$

5) În cazul transportului de gaze prin conducte

$$e_5 = E_c\,q_{cc}\left(\frac{7\,000}{P_{c_i}}\,w_5\,q_c\,L\,10^{-3} + \psi\right)\text{tone combustibil convenţional/an,}$$

sau

$$e'_5 = E_c\left(\frac{7\,000}{P_{c_i}}\,w_5\,q_c\,L\,10^{-3} + \psi\right)\text{MWh/an.}$$

d. Cheltuielile specifice pentru transport

Pentru variaţia cheltuielilor de transport în funcţie de distanţă se admite o expresie liniară de forma

$$P = a + bL,$$

expresie întîlnită frecvent în lucrările publicate [1], [5] şi care nu prezintă abateri faţă de formulele prezentate de întreprinderile specializate de transporturi.

În aceste condiţii expresia cheltuielilor specifice pentru transport, în cazul variantelor menţionate va fi

1) În cazul transportului de energie electrică

$$c_1 = (1 + kL)(a_1 + b_1L), \quad \text{lei/MWh}$$

în care

a_1 reprezintă cheltuielile independente de distanţă exprimate în lei/MWh;

b_1 cheltuielile dependente de distanţa în lei/MWh.km.

2) În cazul transportului de combustibil pe cale ferată

$$c_2 = \frac{7\,000}{P_{ci}} \varphi_2 q_{cc} \left(1 + \frac{7\,000}{P_{ci}} q_2 L\, 10^{-3}\right)(a_2 + b_2 L) \quad \text{lei/MWh}$$

unde

a_2, reprezentînd cheltuielile independente de distanţă este exprimat în lei/t, iar

b_2, cheltuieli dependente de distanţă, în lei/t. km.

3) În cazul transportului de combustibil cu mijloace auto

$$c_3 = \frac{7\,000}{P_{ci}} \varphi_3 q_{cc} \left(1 + \frac{7\,000}{P_{ci}} q_3 L\, 10^{-3}\right)(a_3 + b_3 L) \quad \text{lei /MWh.}$$

4) În cazul transportului de combustibil lichid prin conducte

$$c_4 = \frac{7\,000}{P_{ci}} \varphi_4 q_{cc} \left(1 + \frac{7\,000}{P_{ci}} w_4 q_c L\, 10^{-3}\right)(a_4 + b_4 L) \text{ lei/MWh.}$$

5) În cazul transportului de gaze prin conducte

$$c_5 = \frac{7\,000}{P_{ci}} q_{cc} \left(1 + \psi + \frac{7\,000}{P_{ci}} w_5 q_c L\, 10^{-3}\right)(a_5 + b_5 L) \text{lei/MWh.}$$

e. **Investiţia specifică pentru transport şi pentru producerea cantităţii de combustibil necesară efectuării transportului**

Notînd cu i_t investiţia specifică în sistemul de transport, exprimată în lei/t.km/an şi cu

i_c investiţia specifică în exploatarea de combustibil, în lei/t./an

valorile investiţiilor pentru variantele considerate vor avea următoarele expresii :

1) În cazul transportului de energie electrică

— investiţia totală

$$I_1 = I_{t_1} + \lambda_1 I_c = \frac{E_c}{h}(1 + kL)(i_l L + i_s) + \lambda_1 i_c e_1 \frac{7\,000}{P_{ci}} \text{lei}$$

în care I_t investiţia totală pentru transport, în lei;

I_c investiţia necesară exploatării de combustibil, în lei,

λ cota parte cu care investiţiile pentru cantitatea de combustibil consumată pentru transport intervin în investiţiile totale necesare pentru exploatarea de combustibil;

— investiţia specifică

$$i_1 = \frac{1}{h}(1 + kL)(i_l L + i_s) + \lambda_1 \frac{7\,000}{P_{ci}} k \cdot L\, q_{cs} \cdot i_c \text{ lei/MWh/an,}$$

unde h reprezintă numărul de ore de utilizare pe an,
i_l investiţia specifică în linia de transport, în lei/km.MW,
i_s investiţia specifică în staţiile de transformare, în lei/MW.

2) În cazul transportului de combustibil pe cale ferată:
— investiţia totală

$$I_2 = I_{t2} + \lambda_2 I_c = i_{t_2} Q_{s_2} \frac{7\,000}{P_{ci}} L + \lambda_2 i_c e_2 \frac{7\,000}{P_{ci}} \text{ lei}$$

sau, ţinînd seama de expresiile stabilite anterior pentru Q_{s_2} şi e_2,

$$I_2 = \frac{7\,000}{P_{ci}} E_c q_{cc} \left[\varphi_2 i_{t_2} L \left(1 + \frac{7\,000}{P_{ci}} q_2 L\, 10^{-3}\right) + \lambda_2 i_c \left(\frac{7\,000}{P_{ci}} \varphi_2 q_2 L\, 10^{-3} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \varphi_2 - 1\right)\right] \text{lei};$$

— investiţia specifică

$$i_2 = \frac{7\,000}{P_{ci}} q_{cc} \left[\varphi_2 \left(1 + \frac{7\,000}{P_{ci}} q_2 L\, 10^{-3}\right) i_{t_2} L + \lambda_2 \left(\frac{7\,000}{P_{ci}} \varphi_2 q_2 L\, 10^{-3} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \varphi_2 - 1\right) i_c \right] \text{lei/MWh/an.}$$

3) În cazul transportului de combustibil cu mijloace auto
— investiţia totală

$$I_3 = \frac{7\,000}{P_{ci}} E_c q_{cc} \left[\varphi_3 i_{t_3} L \left(1 + \frac{7\,000}{P_{ci}} q_3 L\, 10^{-3}\right) + \lambda_3 i_c \left(\frac{7\,000}{P_{ci}} \varphi_3 q_3 L\, 10^{-3} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \varphi_3 - 1\right)\right] \text{lei};$$

— investiţia specifică

$$i_3 = \frac{7\,000}{P_{ci}} q_{cc} \left[\varphi_3 \left(1 + \frac{7\,000}{P_{ci}} q_3 L\, 10^{-3}\right) i_{t_3} L + \lambda_2 \left(\frac{7\,000}{P_{ci}} \varphi_3 q_3 L\, 10^{-3} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \varphi_3 - 1\right) i_c \right] \text{lei /MWh/an.}$$

4) În cazul transportului de combustibil lichid prin conducte
— investiţia totală

$$I_4 = \frac{7\,000}{P_{ci}} E_c q_{cc} \left[\varphi_4 i_{t_4} L \left(1 + \frac{7\,000}{P_{ci}} w_4 q_c L 10^{-3}\right) + \lambda_4 i_c \left(\frac{7\,000}{P_{ci}} \varphi_4 w_4 q_c L 10^{-3} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \varphi_4 - 1\right)\right] \text{lei};$$

— investiția specifică

$$i_4 = \frac{7\,000}{P_{c_i}} q_{cc} \left[\varphi_4 \left(1 + \frac{7\,000}{P_{c_i}} w_4 q_c L\, 10^{-3} \right) Li_4 + \lambda_4 \left(\frac{7\,000}{P_{c_i}} \varphi_4 w_4 q_c L 10^{-3} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \varphi_4 - 1 \right) i_c \right] \text{lei/MWh/an.}$$

5) În cazul transportului de gaze prin conducte

— investiția totală

$$I_5 = \frac{7\,000}{P_{c_i}} E_c q_{cc} \left[\left(1 + \dot{\psi} + \frac{7\,000}{P_{c_i}} w_5 q_c L 10^{-3} \right) Li_{t5} + \right.$$

$$\left. + \lambda_5 \left(\frac{7\,000}{P_{c_i}} w_5 q_c L 10^{-3} + \dot{\psi} \right) i_c \right] \text{lei;}$$

— investiția specifică

$$i_5 = \frac{7\,000}{P_{c_i}} q_{cc} \left[\left(1 + \dot{\psi} + \frac{7\,000}{P_{c_i}} w_5 q_c L 10^{-3} \right) Li_{t_5} + \right.$$

$$\left. + \lambda_5 \left(\frac{7\,000}{P_{c_i}} w_5 q_c L 10^{-3} + \dot{\psi} \right) i_c \right] \text{lei/MWh/an.}$$

În cazul în care, pentru calcule orientative, se urmărește simplificarea problemei, neglijîndu-se pierderile de combustibil sau energie electrică ce apar în timpul transportului, precum și consumurile de combustibil ale sistemelor de transport ce se compară, relațiile menționate se simplifică, de asemenea, foarte mult, unii dintre indicii menționați pierzîndu-și semnificația.

În aceste condiții, menținînd notațiile anterioare, relațiile respective devin :

a) Cantitatea de combustibil solicitată sursei pentru a avea anual la consumator cantitatea de ene gie electrică E_c ;

1) În cazul transportului de energie electrică

$$Q'_{s_1} = E_c \cdot q_{c.r.} \text{ tone combustibil convențional/an.}$$

2) În cazurile în care se transportă combustibil, indiferent de sistemul de transport

$$Q'_{s.c} = E_c\, q_{c.c.} \text{ tone combustibil convențional/an.}$$

b) Coeficientul de solicitare a sursei k_s va fi în aceste condiții identic cu consumul specific de combustibil al centralei, adică :

$$k'_{s_1} = q_{c.s} \text{ respectiv } k'_{sc} = q_{cc}.$$

c) Noțiunea de energie consumată pentru transport sau pierdută în timpul transportului dispare.

d) Expresiile cheltuielilor specifice pentru transport se simplifică de asemenea foarte mult, devenind :

$c'_1 = a_1 + b_1 L$ lei/MWh în cazul transportului de energie electrică și

$$c'_c = \frac{7\,000}{P_{ci}} q_{cc} (a_c + b_c L) \text{ lei/MWh}$$

în cazul transportului de combustibil.

e) Investiția specifică pentru transport va deveni în cazul transportului de energie electrică :

$$i''_1 = \frac{1}{h} (i_l L + i_s) \text{ lei/MWh/an}$$

iar în cazul transportului de combustibil, expresiile investițiilor specifice vor fi de forma :

$$i''_c = \frac{7\,000}{P_{ci}} q_{c.c.} L i_t \quad \text{lei/MWh/an.}$$

După cum se constată, între cele două serii de expresii există deosebiri foarte mari, ceea ce se va reflecta, evident, și în rezultatele ce se obțin prin aplicarea lor.

Avînd în vedere că transportul în general, și, în particular transportul de combustibil este caracterizat prin consumuri specifice de combustibil mari, sectorul transporturi intervenind cu o pondere însemnată în bilanțul energetic al țării, considerăm util ca la compararea variantelor care vin în considerare pentru efectuarea unui anumit transport de combustibil sau energie electrică, să se ia în considerare expresii care țin seama atît de pierderile de energie în timpul transportului, cît și, mai ales, de consumurile de combustibil necesare efectuării transportului.

În aceste condiții alegerea celei mai corespunzătoare variante urmează a se efectua pe baza criteriului cheltuielilor de calcul minime.

Desigur, la alegerea soluției trebuie a se ține seama și de o serie de alți factori care pot interveni substanțial în soluționarea problemei, cum sînt, de exemplu, existența unor anumite sisteme de transport, condițiile în care se pot procura anumite materiale, interdependența ce există între transport și celelalte ramuri ale economiei naționale, evoluția posibilă a tehnicii și, în special, evoluția posibilă a cerințelor de energie ale consumatorului a cărui alimentare cu energie se analizează.

Primit la redacție la 15 noembrie 1963

BIBLIOGRAFIE

1. GASTONE FALOMO, *Economics of long-distance fuel transportation and electric transmission.* Conferința Mondială a Energiei, Madrid, 1960.
2. M. ELEFTERESCU, ȘT. KOVÁCS, GH. TRANDAFIRESCU, *Considerații asupra sistemelor de transport de combustibil și energie electrică.* St. cerc. energ., seria A 2 (1963).

3. M. ELEFTERESCU, ŞT. KOVÁCS, GH. TRANDAFIRESCU, *Aspecte ale comparării diverselor sisteme de transport de combustibil.* St. cerc.energ., seria A, *3* (1963).
4. В. К. САВЕЛЬЕВ, *Сравнительная экономическая эффективность транспорта топлива и передачи электроэнергии.* Издательство Академии Наук СССР, Москва, 1961.
5. Л. А. МЕЛЕНТЬЕВ, М. А. СТЫРИКОВИЧ, Е. О. ШТЕЙНГАУЗ, *Топливо-энергетический Баланс СССР.* Госэнергоиздат, Москва—Ленинград, 1962.
6. VELASCO MORENO, *Limites economicos del transporte de combustible para centrale termicas.* Conferința Mondială a Energiei, Madrid, 1960.

ASPECTE ENERGO-ECONOMICE ALE PRODUCERII FRIGULUI ÎN GOSPODĂRIILE CASNICE [1]

DE

V. CARACUDOVICI şi S. MANEA

628.83.003 : 620.12

1. INTRODUCERE

Între consumatorii de energie electrică din gospodăriile casnice, frigiderele ocupă un loc important, întrucît consumul lor reprezintă pînă la 30 — 40% din consumul casnic total de energie electrică. Ponderea consumului frigiderelor variază funcţie de structura consumului de energie electrică, de gradul de răspîndire al lor şi de condiţiile climatice ale fiecărei ţări.

În acest articol ne-am propus să tratăm unele aspecte energo-economice ale frigiderelor (prin frigider înţelegîndu-se răcitoarele electrice sau cu gaze).

2. RĂSPÎNDIREA FRIGIDERELOR

Faţă de răcitoarele cu gheaţă şi de celelalte soluţii pentru păstrarea alimentelor în gospodăriile casnice, apariţia şi perfecţionarea frigiderelor a însemnat un progres şi o dată cu creşterea nivelului de trai al populaţiei răspîndirea lor devine foarte rapidă. Aceasta deoarece frigiderul contribuie la creşterea comodităţii vieţii în gospodărie şi la realizarea de economie de timp în munca casnică.

Avantajele arătate mai sus, explică pe deplin ritmul rapid de creştere al producţiei mondiale de frigidere, care a ajuns în 1960 la 11 milioane bucăţi şi creşterea gradului de înzestrare cu aceste aparate a gospodăriilor casnice.

[1] Lucrare prezentată în şedinţa secţiei de energetică generală la 6 aprilie 1963.

3. CONSUMUL DE ENERGIE ELECTRICĂ

Puterea şi consumul de energie electrică pentru frigiderele casnice variază în principal în funcţie de :

— capacitatea aparatului ;
— tipul frigiderului ;
— temperatura inferioară şi exterioară ;
— modul de întrebuinţare etc.

Pentru a ilustra variaţia puterii şi consumului de energie electrică în funcţie de capacitate şi tipul frigiderului, se dau valorile din tabelele 1 şi 2 [1], [2].

Tabela 1

Puterea şi consumul de energie electrică pentru diferite mărimi de frigidere cu absorbţie

Capacitatea frigiderului (l)	Puterea absorbită (W)	Consumul mediu de energie electrică/zi (kWh)
50	85	1,0
70	95	1,1
110	125	1,2
140	250	1,9
200	300	2,6
300	425	3,3

Tabela 2

Puterea şi consumul de energie electrică pentru diferite mărimi de frigidere cu compresor

Capacitatea frigiderului (l)	Puterea absorbită (W)	Consumul mediu de energie electrică/zi (kWh)
120	100	0,60
150	125	0,85
200	150	1,10
300	250	1,35

Tabela 3

Variaţia consumului de energie electrică în funcţie de temperatura medie interioară

Treapta de reglaj a termostatului	Temperatura medie din interiorul frigiderului °C	Consumul aproximativ de energie electrică kWh/zi
7	+1...+4	3,60
6	+2...+4	3,24
5	+3...+5	3,00
4	+4...+6	2,64
3	+6...+8	2,30

Se constată că între puterile şi consumurile de energie electrică ale frigiderelor cu absorbţie şi ale celor cu compresor, există diferenţe mari care cresc o dată cu creşterea capacităţii.

Consumul de energie electrică depinde de asemenea de diferenţa de temperatură între mediul înconjurător şi spaţiul interior al frigiderului, pentru acelaşi tip şi aceeaşi capacitate. Astfel de exemplu, pentru frigiderul cu absorbţie de circa 100 litri se dau valorile din tabela 3.

Temperatura exterioară intervine prin timpul efectiv de funcţionare al frigiderului. Aceste aparate sînt de obicei prevăzute cu termostate

pentru a se asigura o temperatură interioară constantă, timpul efectiv de conectare variind direct cu temperatura mediului ambiant. De aceea, datele de consum se dau de obicei pentru temperatura medie exterioară de 18...20°C.

4. ALEGEREA SOLUȚIEI

Pentru a se determina soluția tehnică ce trebuie adoptată pentru frigiderele electrice de uz casnic s-au comparat cele două tipuri (frigidere cu absorbție și frigidere cu compresor) din punctul de vedere al cheltuielilor totale la consumator.

Din punctul de vedere al temperaturii medii interioare există o diferență netă între frigiderele cu absorbție și cele cu compresor, ultimele avînd posibilitatea să asigure o temperatură interioară mult mai coborîtă decît primele. În calculele comparative nu se va ține seama de acest aspect calitativ, considerînd că temperatura asigurată de frigiderul cu absorbție este suficientă pentru conservarea alimentelor în cadrul gospodăriei casnice.

Cheltuielile totale la consumator, calculate pentru o perioadă de 15 ani, considerată aproximativ egală cu durata de viață a ambelor tipuri de frigidere, sînt:

$$K_{15} = I + [(c_e + c_i)15 + C_r],$$

unde:

I — investiția făcută inițial pentru procurarea frigiderului;
c_e — cheltuielile anuale pentru energia electrică consumată;
c_i — cheltuielile anuale de întreținere;
C_r — cheltuielile de reparații capitale.

Pentru asigurarea funcționării frigiderului pe timp de 15 ani, s-a considerat necesară înlocuirea agregatului la tipul cu compresor [3] și schimbarea a trei grupuri de rezistențe electrice pentru frigiderul cu absorbție.

Rezultatele calculelor sînt prezentate în tabela 4 și în figură.

Tabela 4

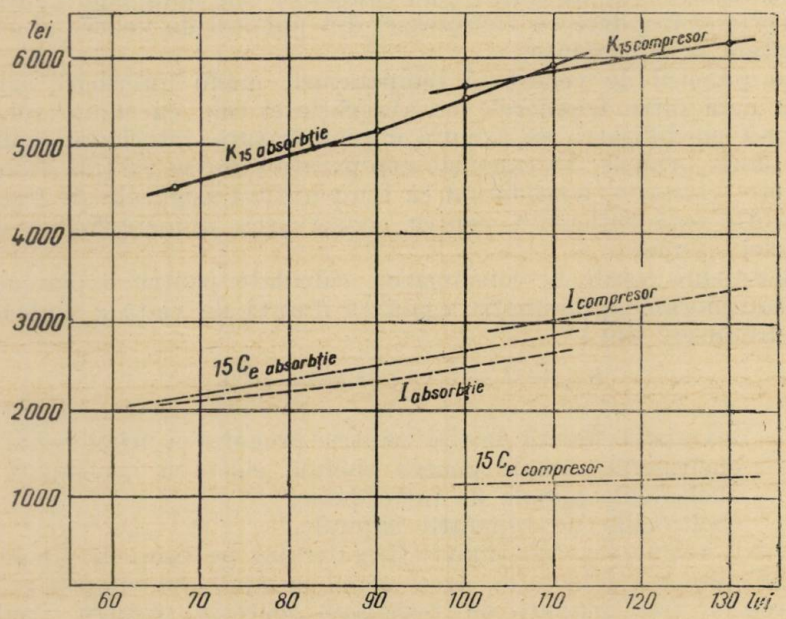
Calculul cheltuielilor totale la consumator pentru o perioadă de 15 ani[1])

Tipul frigiderului	Capacitatea l	I lei	Cons. anual de energie kWh/an	c_e lei/an	c_i lei/an	$(c_e+c_i)15$ lei	C_r lei	K_{15} lei
Absorbție	67	2 068	471	141	15	2 340	120	4 528
„	90	2 315	557	167	15	2 730	120	5 165
„	100	2 500	600	180	15	2 925	120	5 545
„	110	2 686	643	193	15	3 120	120	5 926
Compresor	100	2 950	257	77	15	1 380	1 350	5 680
„	130	3 372	278	83	15	1 470	1 350	6 192

[1]) Valorile din tabela 4 au fost determinate pe baza datelor referitoare la frigiderele de producție indigenă și a celor din străinătate.

De aici se constată că la o capacitate de circa 105 litri ambele tipuri de frigidere duc la aceleaşi cheltuieli totale la consumator, fiind deci independentă, din acest punct de vedere, alegerea uneia sau alteia dintre soluţii. Peste această capacitate frigiderul cu compresor devine mai rentabil, consumul lui de energie electrică crescînd mai încet cu capacitatea decît la frigiderul cu absorbţie.

Din punctul de vedere al economiei naţionale, considerînd ca neesenţială diferenţa de investiţii între o fabrică de frigidere cu compresor



Variaţia costului pe 15 ani a frigiderului cu absorbţie şi a celui cu compresor în funcţie de capacitate.

şi una de frigidere cu absorbţie, de aceeaşi mărime, economia de energie electrică obţinută prin utilizarea frigiderelor cu compresor rămîne singurul criteriu important de comparare economică a celor două tipuri de frigidere din punct de vedere al economiei naţionale.

Astfel dacă se consideră ca tip mediu frigiderul cu capacitatea de 100 litri, care satisface necesităţile unei familii compusă din 3 — 4 persoane, economia de energie obţinută prin utilizarea frigiderelor cu compresor în locul celor cu absorbţie revine la peste 300 000 kWh pe an şi mia de frigidere în funcţiune.

Considerînd că în următorii 20 de ani gradul de înzestrare cu frigidere a gospodăriilor casnice va ajunge la noi în ţară de ordinul 30 — — 40% din gospodăriile electrificate, adică vor fi în funcţiune 2 — 2,5 milioane frigidere, se poate deduce economia importantă de energie

electrică ce s-ar putea obține prin folosirea frigiderelor cu compresor. Această economie de energie electrică atrage după sine micșorarea corespunzătoare a volumului de investiții în instalațiile producătoare de energie, care în orice caz este mult mai importantă decît eventualul supliment de investiții făcut în fabricile de frigidere cu compresor.

Din punctul de vedere al încărcării rețelei electrice în timpul orelor de vîrf, frigiderele nu ridică probleme deosebite, în primul rînd, pentru că sînt aparate care au o curbă de sarcină asemănătoare cu cea dată de variația temperaturii în timpul zilei (deci cu valori maxime la prînz și minime seara și noaptea) și, în al doilea rînd, pentru că intervin cu pondere mai mare în timpul verii cînd rețeaua electrică este mai puțin încărcată.

Este adevărat că pentru fabricarea frigiderelor cu compresor față de cele cu absorbție este nevoie de un consum sporit de metale neferoase și o tehnicitate de fabricație superioară. Avînd în vedere faptul că tehnicitatea de fabricație poate fi asigurată de industria noastră în plină dezvoltare și că consumul suplimentar de metale neferoase este relativ mic pe ansamblul economiei, nu s-au considerat aceste aspecte drept criterii în alegerea soluției.

În afară de frigiderele electrice cu absorbție se mai folosesc și frigiderele cu gaze naturale sau chiar cu gaze lichefiate (aragaz). Comparînd pentru capacitatea medie de 100 litri, frigiderele electrice cu cele pe bază de gaze (tabela 5), ținînd seama de investițiile suplimentare făcute în

Tabela 5

Comparația cheltuielilor totale pe 15 ani între frigiderele de 100 litri de diferite tipuri

Tipul frigiderului	I lei	Invest. suplim. (I') lei	Cons. anual de energie	c_e lei/an	c_i lei/an	$(c_e+c_i)15$ lei	C_r lei	K_{15} lei
			kWh					
Electric cu compresor	2 950	—	257	77	15	1 380	1 350	5 680
Electric cu absorbție	2 500	—	600	180	15	2 925	120	5 545
			kWh					
Cu gaze naturale și absorbție	2 518	600	331	33	25	870	—	3 988
			Nm^3					
Cu aragaz și absorbție	2 518	380	113	122	30	2 280	—	5 178
			kg					

racordurile de gaze sau în buteliile și regulatoarele de aragaz, rezultă, ca cea mai economică, soluția frigiderului cu absorbție pe bază de gaze naturale.

Totuși, utilizarea gazului metan sau a aragazului, cu toate că prezintă avantaje din punct de vedere economic, păstrează toate inconvenientele

arderii gazelor (pericol de explozie, impurificarea aerului cu oxid de carbon, dificultăți la automatizare etc.).

La noi în țară nu se fabrică frigidere cu absorbție pe bază de gaze sau aragaz, cele existente fiind numai adaptări ale frigiderelor electrice cu absorbție. Din literatură, rezultă de asemenea o tendință de stagnare a producției de frigidere de acest tip [3].

În ultimul timp industria sovietică a realizat și frigidere bazate pe semiconductori. Despre aceste aparate s-au publicat însă prea puține date pentru a le putea compara. Dacă și aceste aparate vor căpăta o răspîndire corespunzătoare va trebui să se țină seama de ele în calculele tehnico-economice.

Dacă se ține seama în afară de cheltuielile totale pe 15 ani și de celelalte criterii care stau la baza alegerii celui mai potrivit tip de frigider pentru gospodăria casnică, situația se prezintă din punct de vedere calitativ, ca în tabela 6.

Tabela 6

Aprecierea comparativă a eficienței frigiderelor în gospodăriile casnice

Tipul frigiderului	Comoditatea în utilizare	Chelt. totale pe 15 ani	Periculozitate și vicierea aerului	Calitatea frigului produs
Electric cu compresor	I	IV	I I	I
Electric cu absorbție	I	III	II	II
Cu gaze naturale	II	I		II
Cu aragaz	III	II	II	II

Din punctul de vedere al economiei naționale, utilizarea gazului metan la frigidere antrenează după sine un consum corespunzător de metal în rețeaua de distribuție și nu poate veni în considerație decît în ipoteza utilizării gazului și pentru alte activități casnice (prepararea hranei, încălzit, apă caldă etc.) La fel, utilizarea aragazului necesită mărirea numărului de butelii, a rețelei de distribuție a acestora și a stațiilor de lichefiere și îmbuteliere.

5. CONCLUZII

Din cele expuse mai sus rezultă că frigiderele cu absorbție pe bază de gaze, din motive de securitate igienă și din unele considerente economice pe ansamblul economiei, nu sînt recomandabile pentru asigurarea necesităților de frig în gospodăriile casnice.

Pentru frigiderele electrice, la capacitatea medie de circa 100 litri din punct de vedere al consumatorului este independentă alegerea tipului cu compresor sau cu absorbție, însă din punct de vedere al economiei

naţionale, frigiderele cu compresor duc la economii importante de energie electrică. Se recomandă dezvoltarea producţiei de frigidere cu compresor la capacităţi de 100 litri şi mai mari şi menţinerea procedeului cu absorbţie pentru capacităţi mai mici de 100 litri.

Primit la redacţie la 1 noiembrie 1963

BIBLIOGRAFIE

1. A. CLAUSEN, *Kompressorkühlschränke im Haushalt.* Elektrizitätsverwertung **36**, *8* (1960).
2. K. BLUMER, *Die Entwicklung des Absorptions-Kühlapparates.* Elektrizitätsverwertung **33**, 5 (1958).
3. W. SCHIRP, *Der Haushaltkühlschrank mit Gasbeheizung.* Gas — u. Wasserfach, **99**, *25* (1958).

CONSUMUL DE ENERGIE ÎN GOSPODĂRIILE CASNICE PENTRU RADIO ŞI TELEVIZIUNE[1])

DE

M. WEISS şi V. CARACUDOVICI

628.83

1. INTRODUCERE

Practica şi datele statistice confirmă faptul că după racordarea unei gospodării la reţea şi introducerea iluminatului electric, următoarea folosinţă casnică a electricităţii o constituie în majoritatea cazurilor utilizarea aparatelor de radio, secondată în ultimul timp, de larga răspîndire a aparatelor de televiziune.

Lucrarea de faţă îşi propune ca, în cadrul predeterminării consumului de energie pentru utilizări casnice pe perioada care ajunge pînă în anul 1980, să trateze unul din aspectele particulare şi anume pe acela privind consumul pentru radio şi televiziune.

În acest scop, se precizează tipurile de aparate ce se iau în considerare şi sursele de energie, se apreciază dinamica puterii, a orelor anuale de utilizare, a numărului de aparate de radio şi televiziune etc., ţinîndu-se seama, pe de o parte, de posibilităţile de producţie indigenă şi de importul aparatelor de recepţie, iar pe de altă parte, de a ajunge şi depăşi numărul specific de abonaţi realizat astăzi în unele ţări dezvoltate din punct de vedere industrial [1]. Acest ultim argument a stat îndeosebi la baza ritmurilor accentuate prevăzute pentru viitor.

Consumul de energie pentru radio şi televiziune reprezintă numai circa 10 % din consumul casnic total ; în valoare absolută însă acest consum reprezintă o cifră importantă, fapt ce justifică elaborarea studiului.

În tabela 1, se prezintă pentru ţara noastră evoluţia unor mărimi legate de utilizarea radioului şi televiziunii în perioada 1938···1961.

[1]) Prezentat în şedinţa secţiei de energetică generală din 6 aprilie 1963.

Tabela 1

Unele date privind dezvoltarea folosirii radioului şi televiziunii din R.P.R. [2]

Nr. crt.	Specificare	U.M. buc.	Anul					
			1938	1950	1955	1959	1960	1961
1	Posturi de radio emisie		2	7	15	18	19	19
2	Localităţi radioficate		—	59	747	1 496	1 682	1 826
3	Posturi de televiziune (inclusiv staţii releu)		—	—	—	3	6	7
4	Abonamente radio	10^3	252	300	654	1 152	1 283	1 403
5	Abonamente radioficare	10^3	—	13	510	689	725	762
6	Abonamente televiziune	10^3	—	—	—	30	55	88
7	Producţia aparate radio	10^3	—	40	89	167	167	211
8	Import aparate radio	10^3	..	..	..	12	9	23
9	Import televizoare	10^3	—	—	..	10	29	28
10	Sate electrificate		..	815	1 857	2 927	3 373	3 880

Faţă de anul 1950 se constată că numărul posturilor de radio emisie au crescut în intervalul 1950···1960, de circa 2,7 ori. Creşteri mai importante au fost realizate la numărul localităţilor radioficate şi la abonamentele de radio. Producţia aparatelor de radio a crescut cu aproape 140% în ultimii cinci ani.

Televiziunea poate fi considerată încă în faza incipientă. Creşterea numărului de abonamente este deocamdată limitată de zonele de r cepţionare a imaginii, în jurul postului de emisie, a staţiilor releu, precum şi de unele cauze cu caracter economic.

2. CONSIDERAŢII ENERGETICE PRIVIND APARATELE DE RADIO ŞI TELEVIZIUNE

2. 1. **Sursa de energie.** Forma de energie pentru alimentarea aparatelor de radio şi de televiziune este exclusiv energia electrică, produsă prin reacţii chimice, în baterii şi acumulatoare, sau preluată din reţea. În cazul domeniului de faţă, energia electrică produsă prin reacţii chimice poate alimenta numai aparatele de radio la baterie şi cele cu transistori. În prezent, şi mai ales în anii care urmează se prevede dezvoltarea industriei transistorilor şi desigur a aparatelor de radio echipate ca atare. Este clar că acestea vor fi foarte solicitate datorită atît elementului de noutate ce-l prezintă, precum şi altor avantaje de ordin economic, tehnic, posibilitatea de a fi uşor transportate etc.

Datorită puterii mici (sub 1W) a aparatelor de radio cu transistori şi în consecinţă a consumului neglijabil de energie, ele nu au fost luate în considerare. Sistemul energetic nu va fi afectat de ele, chiar dacă se vor folosi acumulatoare mici, moderne, care se încarcă cu uşurinţă din reţea, prin branşarea lor la prize.

De asemenea, nu au fost luate în considerare aparatele de radio cu care sînt echipate autovehiculele, energia necesară fiind preluată din bate-

ria proprie de acumulatoare. Alţi consumatori fonici de energie folosiţi în gospodărie : pickup-ul ca atare şi magnetofonul, urmează să fie luaţi în considerare la „alţi consumatori de energie" în gospodăria casnică. Consumul pentru radioficare, de asemenea, nu a fost luat în considerare prin faptul că alimentarea cu energie se face la staţia de amplificare care intră în cadrul consumului gospodăresc comunal.

Se vor lua deci în considerare numai aparatele de radio şi televiziune alimentate din reţeaua de energie electrică.

2. 2. **Puteri unitare.** Un alt factor care intervine la determinarea consumului de energie electrică şi a puterii solicitate sistemului îl constituie puterile unitare ale aparatelor de recepţie radio şi televiziune.

Din analiza datelor caracteristice ale aparatelor de radio clasa I...III (4...8 tuburi) fabricate în R. P. R. precum şi a celor importate, care se încadrează în performanţele aceloraşi clase, puterile sînt în general cuprinse între 60...80 W.

Cum primează numeric aparatele de clasa III, se consideră pentru perioada imediată, puterea medie de 70 W/aparat.

Tendinţa în radio constă în introducerea emisiei şi recepţiei stereofonice, care nu este încă pusă la punct datorită dificultăţilor în modularea purtătoarei de radio frecvenţă precum şi a celor de tehnica captării sunetului. Audiţia stereofonică implică mărirea numărului de tuburi. Conjugînd această sporire cu scăderea puterii specifice a tuburilor, s-a majorat treptat puterea medie a aparatelor de radio, ajungînd astfel pentru anul 1980 la circa 90 W/aparat.

În ceea ce priveşte puterea aparatelor de televiziune, se observă o tendinţă de scădere. Astfel, televizoarele cu largă răspîndire în anul 1955, Avangard şi Temp. 2, aveau o putere în jurul a 220 W. Astăzi, puterea aparatelor similare este de 180 W, putere luată în considerare pînă în anul 1965.

După această dată, este foarte probabil că se va trece la televiziunea în culori care ridică probleme complexe.

Se pare că perspectiva cea mai mare de a căpăta o largă folosinţă în televiziunea în culori o are sistemul de transmisie simultan cu subpurtătoarei de crominanţă modulată în fază-amplitudine, însumată la un semnal de liminanţă, sistem folosit în U.R.S.S. şi în S.U.A. Acest sistem permite recepţionarea emisiunilor în culori cu un televizor care recepţionează imaginea alb-negru şi invers, cu modificări sumare, fapt ce va permite folosirea televizoarelor existente [3]. În cazul că se va adopta suprapunerea imaginilor în trei culori, puterea televizoarelor va creşte şi va ajunge la circa 250 W/aparat. Este de presupus că trecerea la televiziunea în culori se va face treptat şi în acest sens s-a admis că în anul 1970 puterea medie va fi de 220 W/aparat iar din anul 1975 s-a considerat 250 W/aparat.

Desigur că progresele tehnice şi în acest domeniu ar putea aduce modificări radicale. Amintim exemplificativ că introducerea transistorilor ar modifica radical consumul de energie, puterea şi repartizarea pe surse de alimentare.

3. DINAMICA NUMĂRULUI DE APARATE DE RADIO ŞI TELEVIZIUNE

Pentru evaluarea numărului aparatelor de radio şi de televiziune ce se vor folosi în R. P. R. s-a ţinut seama în primul rînd de Directivele Congresului al III-lea P. M. R. care prevăd că din 1965 se vor produce anual 300 mii aparate de radio din care 200 mii cu transistori şi 310 mii aparate de televiziune [4], [5] şi [6]. Acestea vor acoperi în mare parte consumul intern. În afară de producţia indigenă se vor importa aparate,

Tabela 2

Estimarea abonamentelor de radio-radioficare – şi televiziune din R. P. R. în perioada 1960 ... 1980

Anul	Total abonamente radioficare şi televiziune		Abonamente radio		Abonamente radioficare 10^3	Abonamente televiziune 10^3
	10^3	creşterea medie anuală %	alimentate din reţea 10^3	cu acumulator (transistor) 10^3		
1 960	2 060	–	1 280*)	–	725	55
1 965	3 450	11	1 800	400	850	400
1 970	5 675	10	2 600	1 100	975	1 000
1 975	8 100	7	3 300	2 000	1 100	1 700
1 980	10 400	5	3 700	3 000	1 200	2 500

*) Include şi aparatele alimentate din acumulatori sau cu transistori.

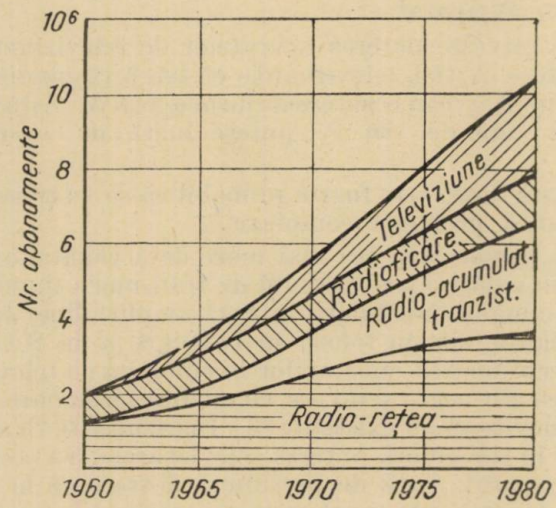


Fig. 1. Dinamica abonamentelor radio-radioficare- şi de televiziune din R.P.R. în anii 196...01980

spre a oferi consumatorilor o gamă largă de alegere precum şi pentru stimularea fabricării, care trebuie să fie în permanenţă la nivelul celor mai noi realizări tehnice. Luînd ca an de plecare datele din anul 1960 [2] şi

urmărind, după cum s-a mai arătat, să se realizeze creşteri care să permită atingerea nivelului ţărilor avansate, în privinţa dotării cu aparate de radio şi de televiziune, s-a estimat dezvoltarea viitoare şi s-a întocmit tabela 2 şi figura 1.

Se desprind unele aspecte şi anume :

— numărul total de abonamente radio-radioficare- şi televiziune va creşte în perioada 1960...1980, de peste 5 ori;

— ritmul mediu anual de creştere al acestor abonamente, la începutul intervalului considerat (1960...1965) este de 11% şi scade între anii 1975...1980 la 5% scădere justificată în parte prin faptul că în anul 1970 numărul total al abonamentelor va fi aproximativ egal cu cel al gospodăriilor şi prin aceasta se poate considera că s-a atins nivelul ţărilor dezvoltate din acest punct de vedere.

4. DETERMINAREA CONSUMULUI ANUAL DE ENERGIE

După cum s-a arătat la punctul 2.1, a rezultat că pentru radio şi televiziune singura formă de energie ce urmează să fie luată în considerare o constituie energia electrică, preluată din sistem.

În cele ce urmează vom calcula consumul anual total de energie pentru radio şi televiziune, aplicînd metoda analitică dezvoltată într-o lucrare anterioară [7] folosind relaţia

$$W = kN\frac{1}{n}\sum_{i}^{l}\sum_{j}^{m} k_i\, k_{ij}\, w_{ij}, \quad [kWh/an]$$

în care :

k — coeficient ce reprezintă raportul dintre populaţia încadrată în gospodărie (N') şi populaţie totală (N);

n — numărul mediu al persoanelor dintr-o gospodărie;

k_i — coeficient care ţine seama de gradul de răspîndire al utilizării respective şi se notează k_r pentru aparate de radio alimentate din reţea şi k_t pentru televiziune. Dinamica acestor coeficienţi este dată în figura 2;

k_{ij} — coeficient care ţine seama de structura consumului de energie pentru radio şi televiziune şi care în acest caz, are valoarea 1, alimentarea făcîndu-se numai cu energie electrică;

w_{ij} — consumul mediu anual de energie în kWh pentru un aparat şi se va nota respectiv cu w_r pentru radio şi w_t pentru televiziune.

Cu simplificarea menţionată, relaţia devine :

$$W = kN\frac{1}{n}(k_r\, w_r + k_t\, w_t) \ [\text{kWh/an}].$$

Valorile K, N, N' şi n au fost determinate într-o lucrare elaborată în cadrul Institutului de energetică; [1]) aceste date sînt prezentate în

[1]) V. Caracudovici ş.a. *Studiul consumului de energie şi combustibil în gospodăriile casnice*. Institutul de energetică, 1962.

tabela 3. Valorile consumurilor specifice medii anuale pentru un aparat radio (w_r) şi pentru un televizor (w_t) depind de puterile medii ale receptoarelor respective, apreciate la punctul 2.2., precum şi de numărul mediu al orelor anuale de folosire.

Dintr-o anchetă sumară au rezultat numărul orelor anuale de folosirea aparatelor de radio şi de televiziune în prezent şi s-a apreciat că în viitor numărul acestor ore va scade pentru radio şi va creşte pentru tele-

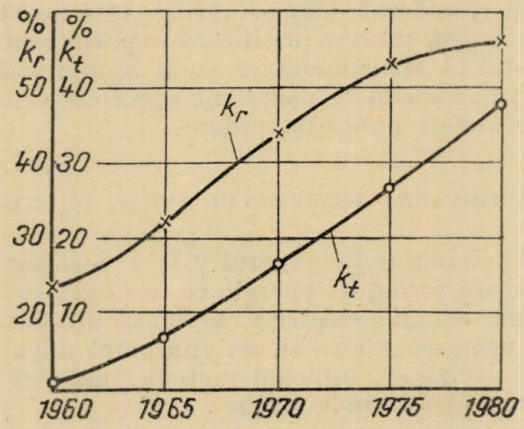


Fig. 2. — Dinamica coeficienţilor de răspîndire a aparatelor de radio alimentate din reţea (k_r) şi de televiziune (k_t)

viziune; unele gospodă ii dotate cu ambele tipuri de aparate vor prefera recepţionarea programelor de televiziune. Aceste valori împreună cu cele amintite mai sus au fost trecute în tabela 3, precum şi rezultatul calculelor, respectiv consumurile anuale totale pentru radio W_r, pentru televiziune W_t şi suma lor W_T.

Menţionăm că datorită recepţiei emisiunilor de televiziune şi îndeosebi a celor de radio, se prelungeşte numărul orelor de iluminat casnic şi în consecinţă creşte consumul de energie electrică. Acest consum afectat indirect aparatelor de radio şi televiziune nu a fost luat în considerare, în cadrul lucrării de faţă, depăşind obiectul temei.

5. DETERMINAREA PUTERILOR ANUALE MEDII ŞI MAXIME

Din punctul de vedere al solicitării sistemului energetic, prezintă importanţă puterea medie anuală şi puterea maximă solicitată sistemului energetic de aparatele de radio şi de televiziune.

Trebuie făcută remarca că în timpul recepţiei de televiziune se recomandă ca încăperea să fie slab luminată. Cum orele de consum ale

Tabela 3

Date privind consumul de energie electrică pentru radio și televiziune din R.P.R. în perioada 1960 ... 1980

Nr. crt.	Specificarea	Simbol	U.M.	Anul				
				1960	1965	1970	1975	1980
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	Populația totală	N	10^3	18 403	19 534	20 735	22 009	23 362
2	Populația încadrată în gospodării	N'	10^3	16 949	17 581	18 247	18 928	19 624
3	Coeficient	$k=N'/N$	—	0,92	0,90	0,88	0,86	0,84
4	Nr. mediu al persoanelor din gospodării	n	1	3,24	3,17	3,12	3,05	3,00
5	Abonamente radio alimentate la rețea	A_r	10^3	1 283	1 800	2 600	3 300	3 700
6	Putere medie aparat radio	p_r	W	70	75	80	80	90
7	Ore anuale de folosire a aparatelor de radio	h_r	ore	1 100	830	720	720	720
8	Energie folosită anual pentru un aparat de radio	w_r	kWh	77,0	62,3	57,6	57,6	64,8
9	Consum total anual de energie pentru radio	W_r	10^6kWh	98,79	112,05	149,76	190,08	239,76
10	Abonamente televiziune	A_t	10^3	55	400	1 000	1 700	2 500
11	Putere medie aparat televiziune	p_t	W	180	180	220	250	250
12	Ore anuale de folosință a aparatelor de televiziune	h_t	ore	550	900	1 000	1 080	1 080
13	Energia folosită anual pentru un aparat de televiziune	w_t	kWh	99,0	162,0	220,0	270,0	270,0
14	Consum total anual de energie pentru televiziune	W_t	10^6kWh	5,45	64,80	220,00	459,00	675,00
15	Total consum anual de energie electrică pentru radio și televiziune	W_T	10^6kWh	104,24	176,85	369,76	649,08	914,76

iluminatului coincid cu cele ale recepţiei de televiziune, nu se vor însuma puterile maxime ale acestor două consumuri [8].

Prin calcule, în care s-a pornit de la aprecierea folosirii medii orare a fiecărui aparat (separat radio şi televiziune), în intervalul unei zile (de iarnă şi de vară), s-au putut determina puterile medii orare, puterile maxime parţiale şi totale precum şi timpul (ora) cînd are loc, pentru fiecare an.

Exemplificarea rezultatelor se prezintă în figura 3 care dă puterea medie orară pentru anii extremi din perioada considerată şi anume: anul 1960 şi anul 1980.

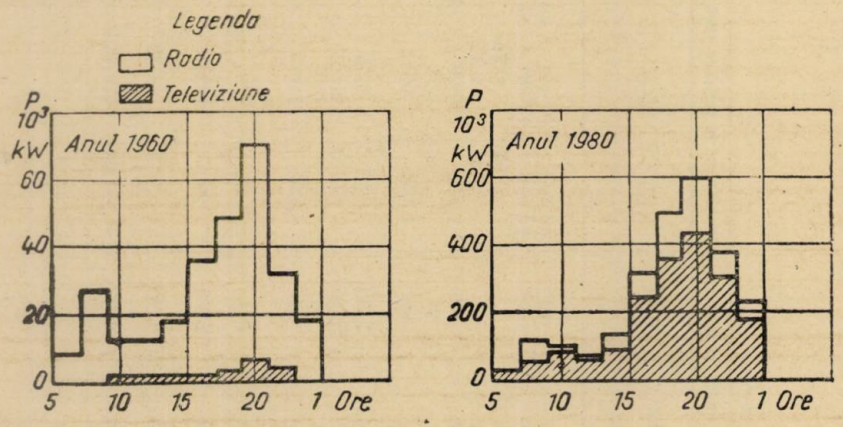


Fig. 3. — Puterea medie orară (zi de iarnă) solicitată de aparatele de radio şi televiziune din R.P.R.

Se observă în primul rînd o creştere a puterii solicitate din sistem; pe de altă parte, de unde în anul 1960 ponderea mare o aveau aparatele de radio, în anul 1980 ea va fi preluată de aparatele de televiziune.

6. CONSIDERAŢII FINALE ŞI CONCLUZII

Spre a se scoate în evidenţă aspectele generale ale dinamicii consumului anual de energie pentru radio şi televiziune raportat la producţia totală de energie, consumul pe locuitor, puterea solicitată raportată la puterea disponibilă, creşterile anuale etc. s-a întocmit tabela 4 şi figura 4.

Din analiza factorilor ce determină această dinamică au rezultat următoarele:

Consumul de energie pentru radio şi televiziune urmează să depăşească 900 mil. kWh, în anul 1980 şi va reprezenta o creştere de aproape 9 ori faţă de anul 1960. Consumul raportat la locuitor, în aceeaşi perioadă, va prezenta creşteri de circa 7 ori, ajungînd în anul 1980 la 39 kWh de la 5,6 kWh în anul 1960.

Creşterile anuale vor prezenta un salt cantitativ în intervalul 1965... 1970, după care ritmul va scade.

Tabela 4

Dinamica consumurilor de energie şi a puterii privind recepţia radio şi televiziune din R.P.R. în perioada 1960 ... 1980

Anul	Consumul anual de energie electrică						Puterea (10^3 kW)			Creşterea anuală a puterii medii orare %
	Radio	Televiziune	Total	Creştere anuală %	Pe locuitor (kWh)	Creştere anuală %	Raportată la producţia totală de energie electrică %	Maximă anuală	Medie orară	
	(10^6 kWh)									
1 960	98,79	5,45	104,24	..	5,6	..	1,4	69,7	19,1	..
1 965	112,05	64,80	176,85	11	9,1	10	1,0	117,5	41,5	17
1 970	149,76	220,00	369,76	16	17,8	15	..	258,0	75,8	12
1 975	190,08	459,00	649,08	11	29,5	11	1—0,9	429,5	102,9	7
1 980	239,76	675,00	914,76	8	39,2	6	..	604,0	145,8	7

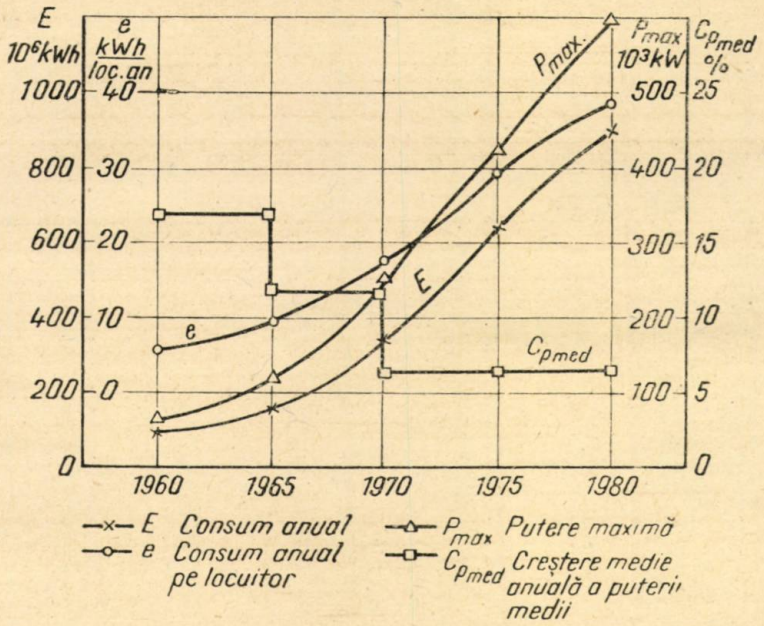


Fig. 4 — Elemente energetice privind recepţia radio şi televiziune din R.P.R.

Cu toată creşterea absolută a consumului de energie electrică pentru radio şi televiziune, el va reprezenta numai aproximativ 1% din producţia totală de energie electrică.

Puterea medie orară prezintă o creştere medie anuală de 17% între anii 1960...1965, după care scade şi se menţine constantă la 7%.

Primit la redacţie la 10 octombrie 1963

BIBLIOGRAFIE

1. *** *Annuaire statistique — Nations Unies.* Genève, 1961.
2. *** *Anuar statistic R.P.R.* 1962.
3. E. GROSS, *Radiodifuziunea şi televiziunea din R.P.R.* Revista Standardizarea, *6 — 7* (1962).
4. *** *Directivele Congresului al III-lea P.M.R.*, Ed. politică, Bucureşti, 1960.
5. F. D. LĂZĂROIU, *1 000 000 de radioreceptoare.* Revista ASIT, Telecomunicaţii, *2* (1962).
6. N. MIHĂILESCU, *Radioreceptoarele cu transistori.* Revista ASIT Telecomunicaţii, *1* (1962).
7. V. CARACUDOVICI, CS. NAGY, *Contribuţii asupra metodelor pentru predeterminarea consumului de energie în sectorul casnic.* St. cerc. energ., Seria A, *2* (1963).
8. R. I. KLIONSCAIA, *Influenţa televizoarelor asupra sarcinii electrice orăşeneşti.* Electricestvo, *1* (1957).

O NOUĂ APROXIMARE A FACTORILOR DE FORMĂ AI ȘARJEI CUPTOARELOR DE INDUCȚIE FĂRĂ FIER LA REFULARE NETĂ A CURENTULUI INDUS

DE

Academician REMUS RĂDULEȚ și C. I. MOCANU

621.365.52.014.1 :537.62

1. PROBLEMA FACTORILOR DE FORMĂ AI ȘARJEI CUPTOARELOR DE INDUCȚIE FĂRĂ FIER

Șarja topită a unui cuptor de inducție fără fier, coaxială cu bobina lui inductoare cilindrică, are o formă cuprinsă între cele de cilindru circular scurt și elipsoid de rotație (fig. 1), determinată în partea inferioară de forma fundului și pereților creuzetului izolant în care se găsește, iar în partea superioară de efectul de reostricțiune al curenților induși în șarjă și refulați spre suprafața ei, care produce un efect de brasaj ce ridică în părțile centrale nivelul materialului topit deasupra nivelului său în părțile laterale ale șarjei.

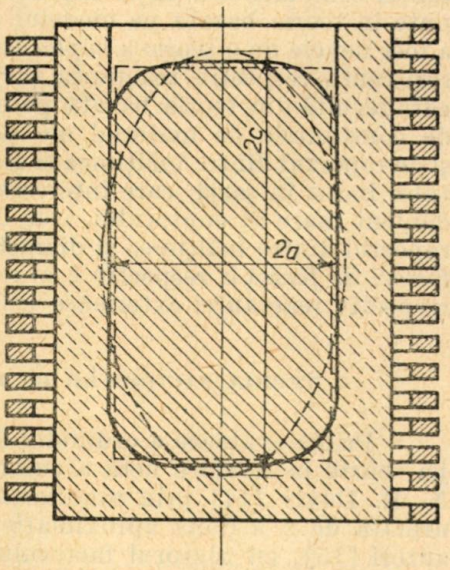


Fig. 1. — Secțiune axială printr-un cuptor de inducție fără fier.

Teoria cuptorului de inducție fără fier realizată prin aproximarea fenomenelor electromagnetice din el prin fenomenele dintr-un tronson de lungime egală cu înălțimea cuptorului și presupus că face parte dintr-un *cuptor model cilindric de înălțime infinită* — șarja modelului avînd diametrul șarjei reale, iar bobina cilindrică inductoare a cuptorului fiind înlocuită în model printr-o scoarță cilindrică circulară cu diametrele interior și

exterior egale cu diametrele respective ale bobinei și avînd o conductivitate egală cu produsul dintre factorul de umplere al înfășurării bobinei și conductivitatea materialului ei, — a putut folosi pentru descrierea fenomenelor din șarjă integrala ecuațiilor lui Maxwell obținută de H. Lamb [1] pentru cazul unui cilindru circular plin și infinit lung, situat într-un cîmp magnetic de origine externă omogen și funcțiune armonică de timp, iar pentru descrierea fenomenelor din bobina inductoare, integrala acelor ecuații obținută de A. Sommerfeld [2] pentru cazul unei coaje cilindrice infinit lungi, parcursă de curent alternativ armonic circular și avînd o densitate lineară constantă. Teoria a fost dezvoltată apoi pe baza unei lucrări a lui Sommerfeld [3], care a studiat și influența formei secțiunii firului bobinei inductoare și a pasului spirelor ei asupra rezistenței ei echivalente în curent alternativ armonic, bazat pe o lucrare anterioară a lui Picciati [4], cum și cu ajutorul unor formule mai precise deduse de S. Butterworth [5], [6] și a unei expresii corecte a inductivității unei bobine cilindrice cu un singur rînd de spire, stabilită de Nagaoka [7]. Această teorie a cuptorului pe baza modelului infinit lung a fost prezentată în lucrări ale lui F. Wever și W. Fischer [8], pe baza rezultatelor lui Lamb și Sommerfeld, cum și, mai tîrziu, ale lui M. I. O. Strutt [9], pe baza rezultatelor lui Lamb și Coffin [10], corectate de Esau [11]. De asemenea M. G. Ribaud [12] a dat o teorie simplificată a cuptoarelor și a făcut ample cercetări experimentale asupra comportării lor.

Experiența din exploatare, ca și cercetarea experimentală de laborator a autorului [13], au arătat că, la rapoartele curente, de 0,9 . . .1,6, între înălțimea și diametrul șarjei, valorile măsurate ale rezistenței și reactanței echivalente a șarjei cuptoarelor diferă considerabil de valorile obținute în teoria bazată pe modelul de înălțime infinită. În aceste condiții a fost nevoie de o teorie a *cuptorului scurt*, care să exprime raportul dintre rezistența respectiv reactanța șarjei scurte și mărimile corespunzătoare care rezultă din teoria bazată pe modelul de înălțime infinită, în funcție de constantele de material ale șarjei, de frecvența curentului inductor și de raportul dintre înălțimea și diametrul șarjei. La refulare netă a curentului indus în șarjă, care interesează în principal, fiindcă asigură un randament mare al cuptorului, cele două rapoarte depind practic numai de raportul dintre înălțimea și diametrul șarjei, adică de forma ei și sînt deci *factori de formă* k_r respectiv k_l ai rezistenței R și reactanței interioare X_i, respectiv reactanței exterioare echivalente X_e a șarjei.

2. TEORIA FACTORILOR DE FORMĂ PE BAZA BOBINEI MODEL

Prima evaluare a ordinului de mărime al factorilor de formă ai șarjei scurte la refulare netă a curentului indus, făcută de C. R. Burch și N. R. Davis [14] prin asimilarea șarjei cu o sferă conductoare, a fost urmată de o a doua aproximație pentru acești factori, dată de aceiași autori [15], cu ajutorul factorului k_N al lui Nagaoka, egal cu raportul dintre inductivitatea unei bobine cilindrice circulare subțiri, de diametru D și lungime L, și dintre valoarea care s-ar obține pentru această inducti-

vitate dacă ea ar fi calculată cu valoarea H_0, pe care ar avea-o intensitatea cîmpului magnetic (omogen) în bobină, dacă aceasta ar fi infinit lungă și ar fi parcursă de o densitate lineară de curent egală cu densitatea din bobină:

$$k_N = \frac{4}{3\pi}\frac{\cos\gamma}{\sin^2\gamma}\left[F(\sin\gamma) + (\operatorname{tg}^2\gamma - 1)E(\sin\gamma) - \operatorname{tg}\gamma\right], \qquad (1)$$

unde $\gamma = \operatorname{arc\,ctg}\frac{L}{D}$, iar $F(\sin\gamma)$ și $E(\sin\gamma)$ sînt integralele eliptice de primul și al doilea ordin, de modul $\sin\gamma$. Aproximînd șarja la refulare netă a curentului indus în ea printr-o *coajă cilindrică* de dimensiunile ei și cu densitate lineară de curent *constantă* de-a lungul înălțimii ei, autorii arătați i-au putut aplica factorul lui Nagoaka și au raționat că șarja ar anula în interior numai fracțiunea k_N din cîmpul magnetic al bobinei inductoare in-

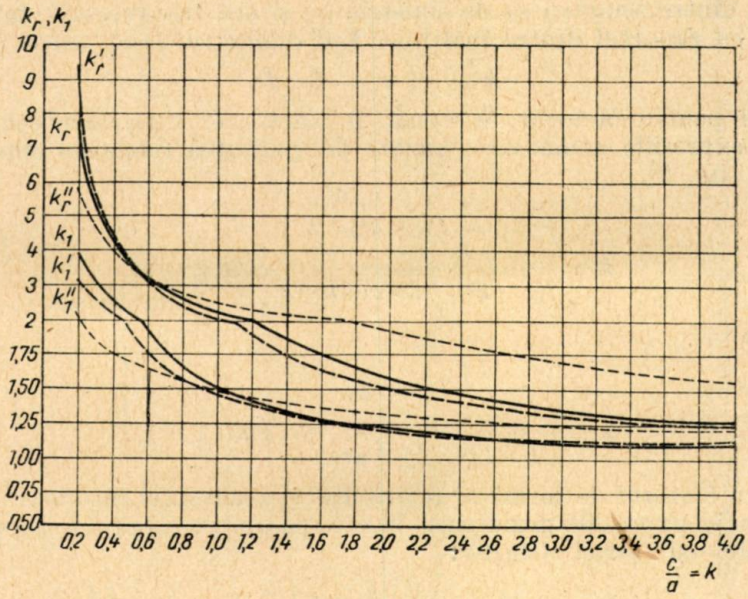


Fig. 2. — Factorii de formă ai șarjei cuptoarelor după lucrările [6], [16] și [13].

finit lungi și avînd densitatea lineară de curent a șarjei. Pentru a anula întregul cîmp, ca șarja-bobină de înălțime infinită, ar trebui ca densitatea ei lineară de curent să fie de $1 : k_N$ ori mai mare, ceea ce i-a condus la același factor de formă pentru reactanța echivalentă exterioară a șarjei

$$k_l' = \frac{1}{k_N}, \qquad (2)$$

și la un factor de formă egal cu pătratul acestuia pentru rezistența și

reactanța interioară echivalente ale șarjei (fiindcă puterea disipată e proporțională cu pătratul intensității curentului):

$$k_r' = \frac{1}{k_N^2}. \tag{3}$$

Formulele (2) și (3) dau la γ mare valori prea mici ale factorului de formă k_r' fiindcă nu țin seamă de neuniformitatea repartiției densității lineare de curent de-a lungul înălțimii șarjei cilindrice, cu densități foarte mari în apropiere de muchiile cilindrului ei (fig. 2).

3. TEORIA FACTORILOR DE FORMĂ PE BAZA ELIPSOIDULUI MODEL

În anul 1937, unul din autorii prezentei lucrări a calculat [16] cei doi factori de formă ai șarjei la refulare netă a curentului indus în ea, asimilînd-o cu un *elipsoid de rotație* coaxial cu bobina inductoare a cuptorului și avînd raportul dintre semiaxa sa de simetrie (c) și cea transversală față de ea (a) egal cu raportul dintre înălțimea L și diametrul D al șarjei (fig. 1):

$$k = c : a = L : D,$$

deducînd pentru factorul de formă al reactanței exterioare echivalente a șarjei expresiile următoare, bazate pe egalitatea *volumelor* elipsoidului și șarjei (fig. 2).

$$k_l = \frac{\frac{1}{k}(1-k^2)}{(1-k^2)^{-\frac{1}{2}} \arccos k - k} \quad \text{cînd } k < 1,$$

respectiv (4)

$$k_l = \frac{\frac{1}{k}(k^2-1)}{k-(k^2-1)^{-\frac{1}{2}} \operatorname{arch} k} \quad \text{cînd } k > 1,$$

iar pentru factorul de formă al rezistenței și reactanței interioare echivalente a șarjei expresiile următoare, bazate pe egalitatea *ariilor suprafețelor* elipsoidului și șarjei (fig. 2):

$$k_r = \left(1+\frac{1}{2k}\right) \frac{(1-k^2)\left[\left(\frac{2}{k^2}-1\right)\left(\frac{1}{k^2}-1\right)^{-\frac{1}{2}} \operatorname{arch}\frac{1}{k} - \frac{1}{k}\right]}{\left[(1-k^2)^{-\frac{1}{2}} \arccos k - k\right]^2 \cdot \left[\frac{1}{k} + \left(\frac{1}{k^2}-1\right)^{-\frac{1}{2}} \operatorname{arch}\frac{1}{k}\right]} \quad \text{cînd } k < 1$$

respectiv (5)

$$k_r = \left(1-\frac{1}{2k}\right) \cdot \frac{(k^2-1)\left[\frac{1}{k} - \left(\frac{2}{k^2}-1\right)\left(1-\frac{1}{k^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \arccos\frac{1}{k}\right]}{\left[k-(k^2-1)^{-\frac{1}{2}} \operatorname{arch} k\right]^2 \cdot \left[\frac{1}{k} + \left(1-\frac{1}{k^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \arccos\frac{1}{k}\right]} \quad \text{cînd } k > 1$$

deoarece aceste ultime două mărimi sînt determinate de o integrală de *suprafață* a vectorului lui Poynting.

Ecuațiile (5) ale autorului, care dau pentru $k = 1$ cazul special calculat de Burch și Davis, se regăsesc într-o lucrare publicată 7 ani mai tîrziu, de către M. Jouguet [17], cu modificarea determinată de egalarea *volumelor* elipsoidului și șarjei, adoptată în [17].

4. TEORIA FACTORILOR DE FORMĂ PE BAZA BAREI MODEL

În anii 1930—1931, unul din autori [13] determinase o aproximație a celor doi factori de formă ai șarjei cilindrice la refulare netă a curentului indus în ea, folosind ca model al jumătății superioare, respectiv inferioare, a șarjei, o porțiune (de lățime egală cu jumătatea din înălțimea șarjei) situată la marginea unei semiplăci plane care este indusă în fiecare moment de un cîmp magnetic alternativ omogen, de origine externă și avînd inducția magnetică egală cu media de volum, respectiv de supafață, a inducției

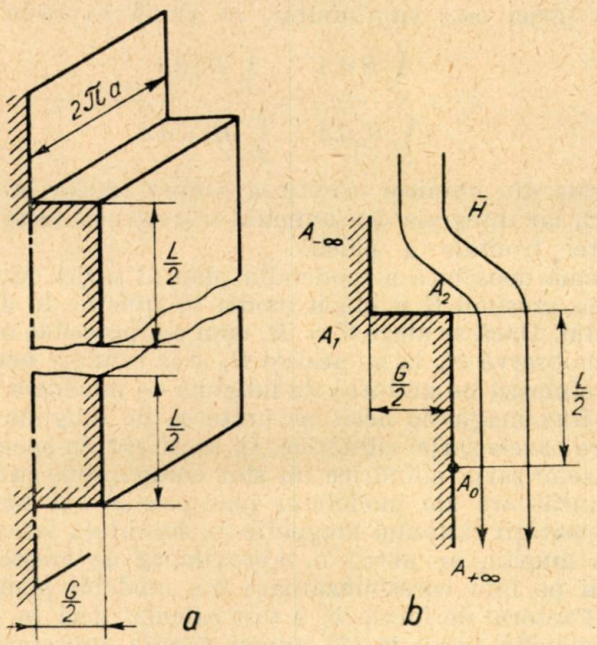


Fig. 3 — Modelul plan-paralel (3a) și modelul plan-paralel simplificat (3b) al șarjei cilindrice a unui cuptor de inducție fără fier.

magnetice produse de bobina inductoare în șarja cuptorului. Modelul plan (fig. 3) permite folosirea reprezentării conforme pentru determinarea cîmpului magnetic rezultant din exteriorul plăcii, care e laplacian și tangent la placă dacă refularea curentului indus în ea este netă. De altă parte,

dacă H_e este valoarea efectivă a intensității cîmpului magnetic exterior rezultant la suprafața plăcii, afluxurile de putere activă și reactivă spre placă, prin unitatea de arie a suprafeței ei, are expresia [18]

$$S = \frac{1}{\varkappa^2 \sigma} \sqrt{\frac{\varkappa \mu \sigma \omega}{2}} H_e^2, \tag{6}$$

dacă σ și μ sînt conductivitatea și permeabilitatea magnetică a materialului plăcii, ω e pulsația cîmpului magnetic inductor, iar $\varkappa$ este coeficientul de raționalizare, egal cu unitatea, respectiv cu 4π, după cum se folosesc sisteme de unități de măsură raționalizate, respectiv neraționalizate.

La refulare netă a curentului, intensitatea H_e a cîmpului magnetic în apropiere de muchiile plăcii model e mult mai mare decît pe fețele ei laterale și la mare depărtare de muchii, unde e egală cu intensitatea H_0 a cîmpului magnetic omogen de origine externă. În porțiunea de la marginea plăcii, afluxul de putere S prin unitatea de arie a suprafeței plăcii, în apropiere de muchiile ei, este deci mai mare decît la depărtare de muchii (S_0) și astfel factorul în alternativ al rezistenței și reactanței interioare echivalente a șarjei este supraunitar, el avînd expresia

$$k_r'' = \frac{\int_S S \, dA}{\int_{S_t} S_0 \, dA} = \frac{\int_S H_e^2 \, dA}{\int_{S_t} H_0^2 \mu \, dA}, \tag{7}$$

în care integrala din numitor e extinsă asupra fețelor laterale ale fîșiei de lățime L : 2, iar integrala din numărător e extinsă asupra acestor fețe și asupra feței frontale a plăcii.

O problemă deosebită a modelului plan al șarjei cuptorului o constituie alegerea grosimii G a plăcii model în funcție de diametrul D al șarjei cuptorului. Dacă se alege $G = D$, cum s-a procedat în lucrarea [13] a autorului, se observă că, la un același H_0 și la refulare netă a curentului din șarjă, se refulează pe unitatea de lungime de muchie a plăcii de două ori mai mult flux magnetic decît pe unitatea de lungime de periferie a oricăreia dintre bazele șarjei cilindrice. În acest caz, în special relațiile din suprafețele bazelor șarjei cilindrice nu sînt comparabile cu cele din suprafețele corespunzătoare ale modelului plan-paralel — și numai creșterea relativă a intensității cîmpului magnetic pe suprafața laterală a șarjei, la apropierea de muchii, ar putea fi, aproximată de creșterea relativă a acestei mărimi pe fața corespunzătoare din modelul plan, la apropierea de o muchie. Factorul de formă k_r'' a fost calculat deci în [13] extinzînd ambele integrale din expresia (7) numai asupra suprafeței laterale din modelul plan-paralel. S-au obținut astfel pentru factorul k_r'' expresia

$$k_r'' = 1 + \frac{4D}{\pi L} \operatorname{arsh} u_0 \tag{8}$$

iar pentru factorul k_l'' al reactanței exterioare echivalente expresia :

$$k_l'' = \frac{2D}{\pi L} u_0^2 \tag{9}$$

în care mărimea u_0 este o soluție (totdeauna pozitivă) a următoarei ecuații implicite :

$$\frac{\pi L}{2D} = |u_0 \sqrt{1+u_0^2}| - \operatorname{arsh} u_0 . \tag{10}$$

La șarje destul de scunde față de diametru ($k = L : D < 1$), factorul de formă calculat din (8) și (10) va fi deci prea mic, deoarece în aceste condiții afluxul de putere prin fețele frontale ale șarjei, care a fost neglijat, este sensibil față de afluxul prin fața lor laterală. La șarje de înălțime destul de mare față de diametrul lor ($k = L : D > 1$), afluxul de putere prin fețele frontale ale șarjei are pondere mică față de afluxul prin fața lor laterală, însă se manifestă împrejurarea că în modelul plan-paralel fluxul magnetic refulat peste unitatea de lungime de muchie e mai mare decît în originalul cilindric și deci, în aceste condiții, valorile factorului de formă k_r'' calculat din (8) și (10) vor fi prea mari, cum s-a indicat și în articolul [16] al autorului.

Ținînd seamă de aceste constatări, se dezvoltă în lucrarea de față o aproximație mai bună a factorilor de formă, menținînd principiul modelului plan-paralel folosit în lucrarea [13], dar făcînd o alegere mai judicioasă a grosimii G a plăcii din modelul plan-paralel în funcție de diametrul D al șarjei — și se compară rezultatele cu cele obținute prin vechile aproximații, cum și cu date experimentale.

5. TEORIA FACTORILOR DE FORMĂ PE BAZA BAREI MODEL APLATISATE

Pentru a putea folosi, în calculul factorilor de formă ai barei model din cîmpul magnetic de origine externă omogen și alternativ, la refulare netă

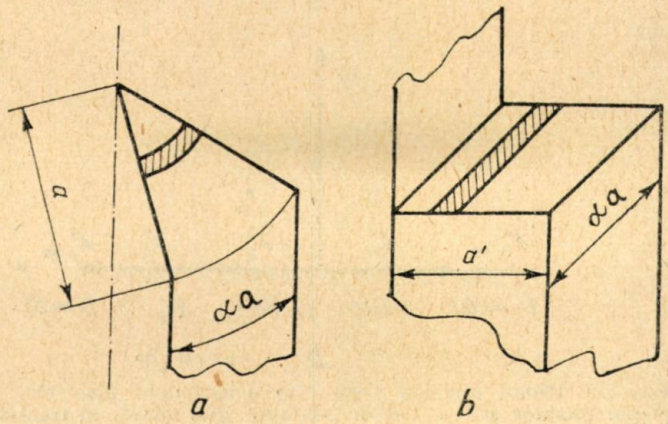


Fig. 4. — Modele pentru calculul grosimii echivalente a plăcii ce înlocuiește șarja.

a curentului indus în ea, atît afluxul lateral, cît și afluxul frontal de putere, trebuie folosit, în determinarea dependenței dintre grosimea G a barei model și diametrul D al șarjei cilindrice, principiul ca în cele două construcții

fluxurile magnetice de origine externă, refulate peste lungimi egale al muchiilor, să fie egale. Din figurile 4*a* și 4*b* rezultă că, dacă B_0 e inducția magnetică a cîmpului de origine externă, fluxul extern refulat peste o lungime l de muchie a șarjei cilindrice de diametru $D = 2a$ care determină unghiul la centru $\alpha = l : a$, are expresia

$$\Phi_r = B_0 \frac{1}{2} a \cdot a\alpha = \frac{a}{2} l B_0$$

și că fluxul extern refulat peste aceeași lungime l de muchie a barei model de grosime G are expresia

$$\Phi_r = \frac{G}{2} l B_0,$$

de unde rezultă

$$G = a,$$

față de condiția $G = 2a$, folosită în lucrarea [13]. Modelul plan simplificat

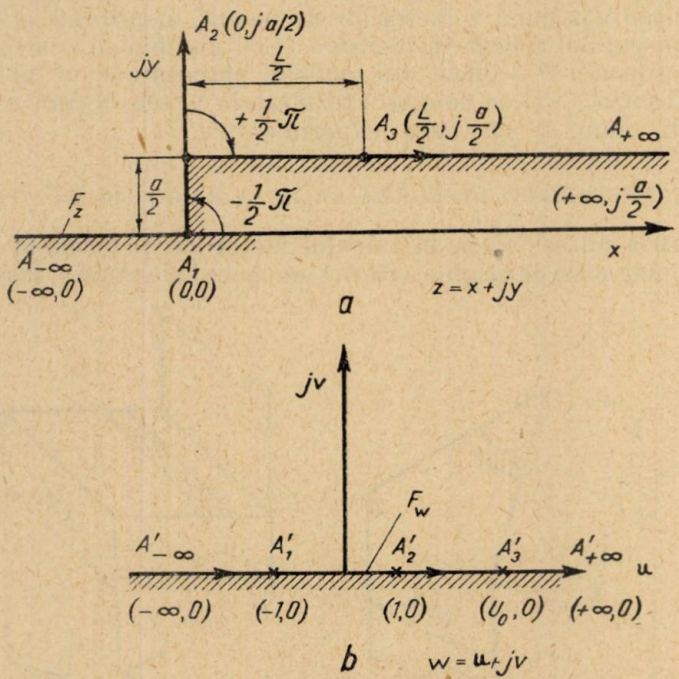


Fig. 5. — Planul complex $z = x + jy$ al modelului plan (5a) și planul complex $w = u + jv$ de referință (5b) folosite în transformarea conformă Schwarz-Christoffel.

al barei aplatisate la jumătate din grosimea șarjei are deci dimensiunile din figura 5*a*.

Problema determinării cîmpului laplacian plan din exteriorul unei astfel de bare, situată într-un cîmp magnetic de origine exterioară, omogen

și alternativ, perpendicular pe fața frontală a barei, a fost rezolvată însă și direct de R. Răduleț și C. Mocanu, într-o lucrare care privește și efectul omogen de proximitate în astfel de bare [19].

În lucrarea [19] s-a arătat cu ajutorul teoremei lui Schwarz-Christoffel că funcțiunea $w\ (z)$, definită de

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}w} = \frac{a}{2\pi}\sqrt{\frac{w-1}{w+1}} \tag{9}$$

și dată implicit de ecuația

$$z = \frac{a}{2\pi}\left[\sqrt{w^2-1} - \ln\left(w+\sqrt{w^2-1}\right) + j\pi\right], \tag{10}$$

transformă conform domeniul de deasupra liniei poligonale $A_{-\infty}A_1A_2A_3A_\infty$ din planul z din figura 5*a* pe semiplanul superior din planul w din figura 5*b*. S-a mai arătat în [19] că, în condițiile problemei puse ($H = H_0$ în punctele $A_{-\infty}$ și A_∞), intensitatea H_0 a cîmpului magnetic laplacian de deasupra liniei poligonale considerate, din figura 5*a*, care e pretutindeni tangent la acea linie poligonală, are următoarea expresie în complex

$$H_z = \frac{a}{2\pi}H_0\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right)^* = H_0\left(\sqrt{\frac{w+1}{w-1}}\right)^*. \tag{11}$$

În aceste condiții, părțile reală și imaginară ale vectorului lui Poynting au pe conturul $A_{-\infty}A_1A_2A_3A_\infty$ ($w = u$) expresia comună

$$S = \nu|H|_z^2, \tag{12}$$

unde

$$\nu = \frac{1}{\varkappa^2\sigma}\sqrt{\frac{\varkappa\mu\sigma\omega}{2}}. \tag{13}$$

Afluxul P_f de putere activă prin fața „frontală" a modelului plan, de adîncime $2\pi a$, are deci expresia

$$P_f = 2\pi a\nu\int|H_z|^2\cdot|\mathrm{d}z| = 2\pi a\nu\frac{a^2}{4\pi^2}H_0^2\int\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right)^*\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right)\cdot|\mathrm{d}z| =$$

$$= 2\pi a\nu\frac{a^2}{4\pi^2}H_0^2\int_{-1}^{+1}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\,\mathrm{d}u = 2\pi a\nu\frac{a^2}{4\pi^2}H_0^2\frac{2\pi}{aa}\int_{-1}^{+1}\sqrt{\frac{1+u}{1-u}}\,\mathrm{d}u =$$

$$= a^2\nu H_0^2\left[\arcsin u - \sqrt{1-u^2}\right]_{-1}^{+1},$$

adică

$$P_y = \pi a^2\nu H_0^2. \tag{14}$$

Afluxul P_l de putere activă prin fîșia orizontală de adîncime $2\pi a$ și de lățime $h = \frac{L}{2}$ din stînga punctului A_3 din planul z are, analog, expresia

$$P_l = 2\pi a \nu \int |H_z|^2 \cdot |\mathrm{d}z| = 2\pi a \nu \frac{a^2}{4\pi^2} H_0^2 \int_1^{u_0>1} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \mathrm{d}u =$$

$$= 2\pi a \nu \frac{a^2}{4\pi^2} H_0^2 \frac{2\pi}{a} \int_1^{u_0} \sqrt{\frac{u+1}{u-1}}\, \mathrm{d}u = a^2 \nu H_0^2 \int_1^{u_0} \left| \frac{u}{\sqrt{u^2-1}} + \frac{1}{\sqrt{u^2-1}} \right| \mathrm{d}u =$$

$$= a^2 \nu H_0^2 [\sqrt{u_0^2-1} + \ln(u_0 + \sqrt{u_0^2-1})], \tag{15}$$

unde u_0 este valoarea lui u care corespunde în planul w punctului ce reprezintă în acest plan punctul A_3, de coordonată complexă $z = j\frac{a}{2} + \frac{L}{2}$, din planul z, adică este rădăcina următoarei ecuații care rezultă din (10)

$$2\pi \frac{L}{D} = \sqrt{u_0^2-1} - \ln(u_0 + \sqrt{u_0^2-1}). \tag{16}$$

Afluxul de putere activă P′ prin suprafața de adîncime 2π a, care corespunde în planul z urmei $A_1A_2A_3$, dacă deasupra ei ar exista cîmpul magnetic uniform H_0 din cazul plăcii infinit lungi, ar fi

$$P' = 2\pi a \nu \cdot H_0^2 \frac{L}{2}$$

și deci factorul de formă al rezistenței și reactanței interioare a șarjei are expresia

$$k_r''' = \frac{P_l + P_e}{P'} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{D}{L} [\pi + \sqrt{u_0^2-1} + \ln(u_0 + \sqrt{u_0^2-1})], \tag{17}$$

cu valoarea u_0 care rezultă din (16), adică, dacă se înlocuiește $\sqrt{u_0^2-1}$ cu valoarea lui care rezultă din (16):

$$k_r''' = 1 + \frac{D}{2L} + \frac{D}{\pi L} \ln(u_0 + \sqrt{u_0^2-1}), \tag{18}$$

ceea ce arată că $\lim k_R = 1$ cînd $\lim L : D = \infty$.

Figura 6 reprezintă grafic în ordonate, în curbele 1 și 2, cu abscisele u_0, funcțiunile

$$f_1(u_0) = \sqrt{u_0^2-1}\,; \; f_2(u_0) = \ln(u_0 + \sqrt{u_0^2-1}),$$

iar în curbele 3 şi 4 suma şi diferenţa lor :

$$\psi(u_0) = f_1(u_0) + f_2(u_0)\,;\quad \varphi(u_0) = f_1(u_0) - f_2(u_0),$$

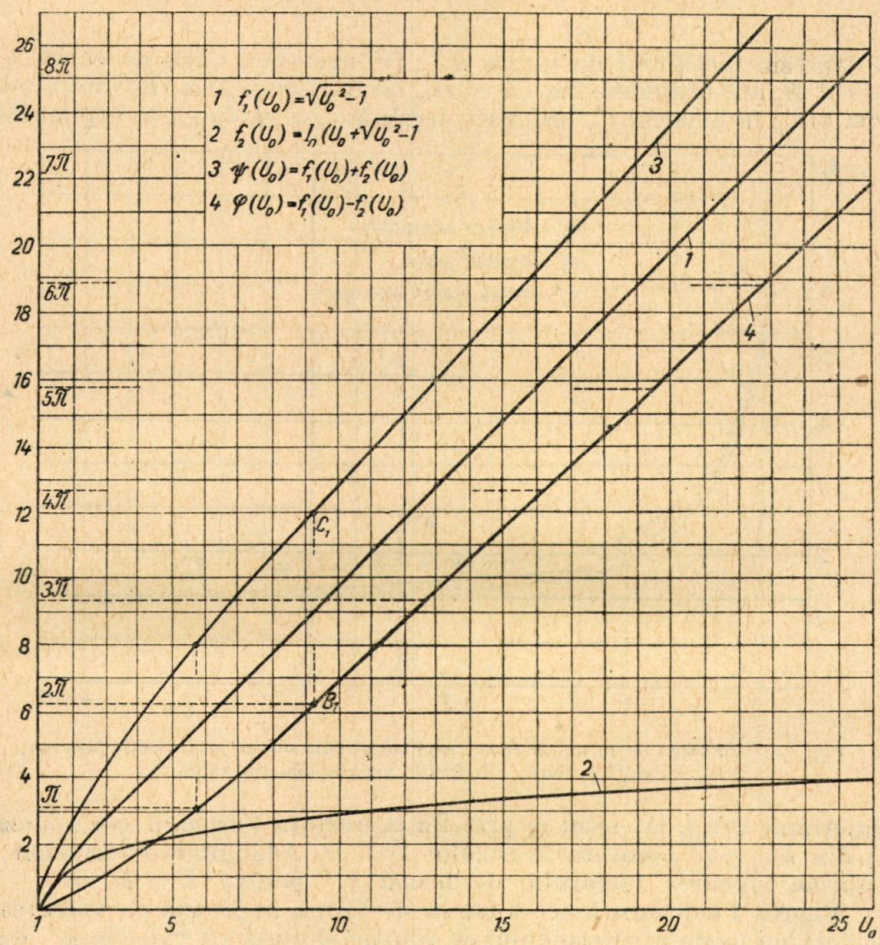


Fig. 6. — Figură auxiliară pentru calculul factorului de formă al rezistenţei şarjei.

dintre care prima intervine în relaţia (17)

$$k_r''' = \frac{D}{2L} + \frac{D}{2\pi L}\,\psi(u_0), \tag{19}$$

iar cea de a doua intervine în relaţia (16) :

$$\frac{2\pi L}{D} = \varphi(u_0). \tag{20}$$

Cu ajutorul figurii 4 se poate construi grafic termenul

$$\frac{D}{2\pi L}\,\psi(u_0) \tag{21}$$

din expresia factorului de formă k_r'''. De exemplu, dacă pe curba $\varphi(u_0)$ punctul B_1 are ordonata 2π, $(L = D)$, iar verticala prin B_1 intersectează curba $\psi(u_0)$ în punctul C_1, ordonata acestuia este valoarea corespunzătoare

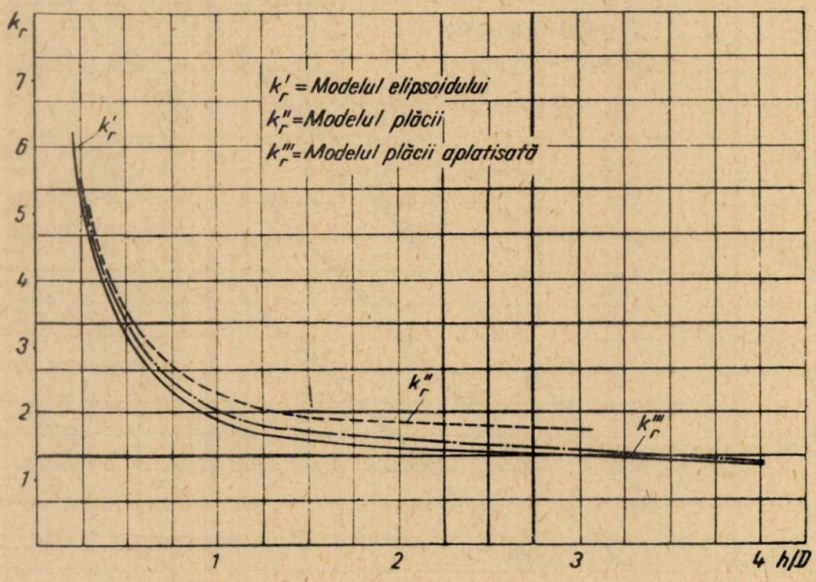


Fig. 7. — Factorul de formă al rezistenței șarjei cuptoarelor de inducție fără fier, calculați pe baza diferitelor modele ale autorului.

a funcțiunii $\psi(u_0)$, iar cîtul ei prin 2π reprezintă termenul corespunzător (21) din k_r''' care corespunde cazului $L = D$. Adăugîndu-i termenul 1/2, se obține valoarea factorului de formă k_r''' pentru $L = D$ etc.

Figura 7 reprezintă acest factor de formă împreună cu valoarea lui calculată cu modelul elipsoidului de rotație și arată că valorile k_r''' determinate în acest fel sînt ușor superioare valorilor calculate cu modelul elipsoidului, mult mai apropiate de acestea decît valorile factorului k_r'' calculate în [13] după principiul $G = D$ și folosind o dezvoltare în serie (fig. 2).

Modelul plan-paralel din figura 5 permite să se calculeze și factorul de formă k_l''' al reactanței exterioare a șarjei, egal cu cîtul înlănțuirii magnetice

$$I_m = \sum i_k\,\Phi_{kb}$$

dintre curenții i_k din modelul unei jumătăți de șarjă și fluxurile Φ_{kb} date de bobina primară infinit lungă (cîmpul magnetic H_0) îmbrățișate de

acești curenți, — prin înlănțuirea magnetică I_{ma} determinată în ipoteza că modelul șarjei ar avea densitatea liniară de curent J_{l0} care corespunde intensității H_0 la periferia șarjei (șarja infinit lungă):

$$J_{l0} = \frac{1}{\varkappa} H_0,$$

adică:

$$I_{ma} = 2\pi a \frac{a}{2} \mu H_0 \cdot \int_0^{\frac{L}{2}} J_{l0}\, \mathrm{d}x = \pi a^2 \mu \frac{H_0^2}{\varkappa} \frac{L}{2}.$$

Dacă se calculează I_m în ipoteza că întregul curent al șarjei îmbrățișează același flux ca și partea de curent corespunzătoare feței laterale a șarjei, se obține următoarea valoare mai mare decît cea reală.

$$I'_m = 2\pi a \frac{a}{2} \mu H_0 \cdot \int \frac{|Hz|}{\varkappa}\, \mathrm{d}s = \pi a^2 \mu \frac{H_0^2}{\varkappa} \frac{a}{2\pi} \int_{-1}^{u_0} \mathrm{d}u$$

sau

$$I'_m = \pi a^2 \mu \frac{H_0^2}{\varkappa} \frac{L}{2} \cdot \frac{2a}{2\pi L} (1 + u_0).$$

Se obține astfel următoarea expresie a aproximației prin exces a factorului de formă al reactanței exterioare a șarjei:

$$k_l''' = \frac{I'_m}{I_m} = \frac{D}{2\pi L} (1 + u_0). \tag{22}$$

Cum u_0 din (16) depășește totdeauna valoarea $\frac{2\pi L}{D}$, rezultă că factorul k_X e supraunitar și că $\lim k_X = 1$ cînd $\lim L : D = \infty$.

Factorii de formă ai șarjei reale vor fi cuprinși între valorile k_r și k_r''', respectiv k_l și k_l''', la refulare netă a curentului indus în șarjă.

BIBLIOGRAFIE

1. H. LAMB, *Proceedings*. London Math. Society, *15* (1884), 138.
2. A. SOMMERFELD, *Annalen der Physik*. **17** (1904), 673.
3. A. SOMMERFELD, *Annalen der Physik*. **24** (1907), 609.
4. PICCIATI, Nuovo Cimento, **5** (1904).
5. S. BUTTERWORTH, Proceedings Royal Society, **107** ser. A (1925), 693.
6. S. BUTTERWORTH, Philosophical Transactions, **222**, ser. A (1922), 57.
7. NAGAOKA, Coll. Sci. Tokyo. **27** (1909).
8. F. WEVER, W. FISCHER, Mitteilungen a. d. Kaiser-Wilhelm-Institut für Eisenforschung, **8** (1920), 149.
9. M. I. O. STRUTT, Annalen der Physik, **82** (1927) 605, Archiv für Elektrotechnik, **19** (1928), 424.

10. G. COFFIN, Proceedings of American Academy, **41** (1906), 794.
11. A. ESAU, Annalen der Physik, **34** (1911), 76.
12. M. G. RIBAND, Technique moderne, **15** (1923), 225, Journal de physique et le radium, **4** (1924), 185 și 214.
13. R. RĂDULEȚ, *Zur Theorie der eisenlosen Induktionsöfen*, 1931.
14. C. R. BURCH, N. R. DAVIS, Philosophical Magasine, (1926) 768.
15. C. R. BURCH, N. R. DAVIS, *An Introduction to the Theory of Eddycurrent Heating*, London (1928).
16. R. RĂDULEȚ, *Zur Vorausberechnung eisenloser Induktionsöfen*, 1937.
17. M. JOUQUET, *Courants de Foucault et fours à induction*. 1944m Ganthier-Villars, Paris.
18. R. RĂDULEȚ, *Bazele teoretice ale electrotehnicii*, Editura didactică și pedagogică,București, 1955.
19. R. RĂDULEȚ și C. MOCANU, *Efectele de margine și de proximitate în barele plate la refulare netă a curentului electric alternativ*, St. cerc. energ. *4* (1962).

O APROXIMAȚIE A FENOMENELOR DE REFULARE NETĂ A CURENTULUI ELECTRIC ALTERNATIV ÎN CONDUCTOARELE PRISMATICE CU ORICÎTE FEȚE

DE

Academician R. RĂDULEȚ și C. I. MOCANU

537.62 :621.3.014.1

1. PRINCIPIUL APROXIMAȚIEI

Problema calculului rezistenței în alternativ a unui conductor prismatic, avînd o secțiune poligonală oarecare, la refulare netă a curentului funcțiune sinusoidală de timp, care-l parcurge axial, se abordează cu ajutorul transformărilor conforme, deoarece în exteriorul conductorului cîmpul magnetic este potențial. Transformarea conformă a exteriorului conturului poligonal al secțiunii conductorului pe semiplanul superior al unui alt plan se poate realiza cu ajutorul teoremei lui Christoffel-Schwarz, însă dificultățile de efectuare completă a calculelor cresc o dată cu numărul de laturi ale poligonului.

Fie A_0, $A_1,\ldots,A_k,\ldots,A_n$, A_0, vîrfurile secțiunii poligonale a conductorului prismatic (fig. 1*a*), considerate în planul complex $z = x + jy$, în care sistemul de coordonate x, jy are originea în vîrful A_1 și axa reală orientată după prima latură $A_0 A_1$ — și fie $w = u + jv$ planul complex în al cărui semiplan superior se trece prin transformare (fig. 1*b*).

Teorema lui Christoffel-Schwarz a domeniului din exteriorul conductorului prismatic din planul z în semiplanul superior w este

$$z = A\int_{w_0}^{w} (w - w_1)^{\alpha_1}(w - w_2)^{\alpha_2}\cdots(w - w_n)^{\alpha_n}\frac{dw}{(w^2+1)^2} + B \qquad (1)$$

în care :

α_k sînt cîturile rapoartelor prin π ale unghiurilor conturului poligonal, pozitive sau negative după cum unghiurile se măsoară în cîmp sau în conductor ;

w_k sînt constante reale astfel încît $w_{k-1} < w_k < w_{k+1}$;
A este o constantă de scară și de rotație a conturului poligonal;
B este o constantă care permite fixarea unui vîrf oarecare al poligonului.

Calculul integralei (1), în care numai trei constante w_k pot fi alese arbitrar, este cu atît mai dificil, cu cît numărul laturilor poligonului este mai mare.

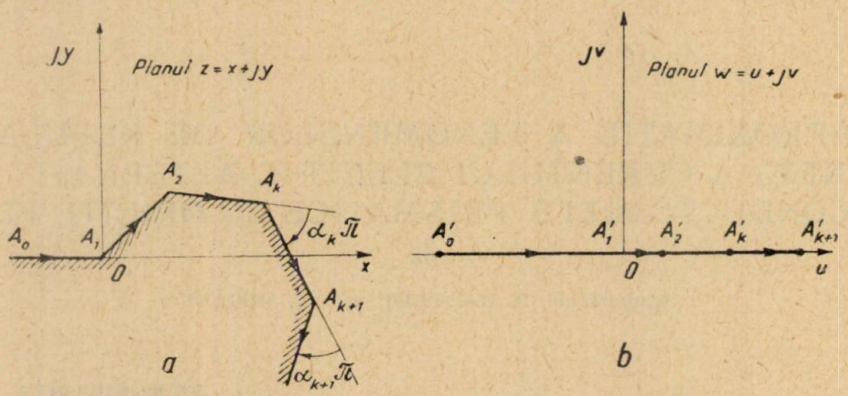


Fig. 1. — Transformarea Christoffel-Schwarz a exteriorului unui contor poligonal (a) pe semiplanul superior al unui plan w (b).

Din egalitatea tensiunilor magnetomotoare calculate de-a lungul curbelor Γ_z și Γ_w adică

$$\oint_{\Gamma_z} H_z \, dz = \oint_{\Gamma_w} H_w \, dw, \tag{2}$$

rezultă

$$H_z = H_w \frac{dw}{dz}, \tag{3}$$

în care H_z este intensitatea cîmpului magnetic în planul z, variabilă în diferite puncte ale planului, iar H_w este intensitatea cîmpului magnetic în planul w.

Aproximări ale soluțiilor problemelor de efect pelicular în barele prismatice cu secțiune poligonală avînd n laturi se pot obține astfel :

Într-o primă aproximație se consideră n diedre (fig. 2), ale căror unghiuri plane sînt egale cu unghiurile plane ale conductorului, se calculează afluxul de putere prin fîșii ale celor două fețe ale diedrelor avînd lățimile fețelor prismei, se însumează puterile calculate asemănător pentru toate cele n diedre, se împarte cu doi, iar rezultatul se consideră drept puterea totală disipată în conductorul prismatic. Aproximația este cu atît mai bună, cu cît unghiurile diedre sînt mai apropiate de două unghiuri drepte.

Într-o a doua aproximație — mai bună — se consideră n diedre trunchiate avînd fața mijlocie de trunchiere egală cu cîte o față a conductorului prismatic dat, mărginită de cîte două semiplane ce formează cu ea unghiuri diedre egale cu unghiurile diedre corespunzătoare ale prismei reale (fig. 3), se calculează afluxul de putere prin fața mijlocie $\overline{A_k A_{k+1}}$, iar suma puterilor astfel obținute pentru toate cele n diedre trunchiate se consideră drept putere disipată în prisma reală. Se observă că această aproximație

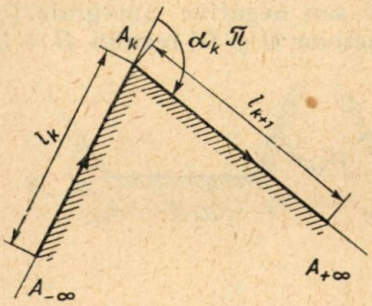


Fig. 2. — Diedru model din planul z.

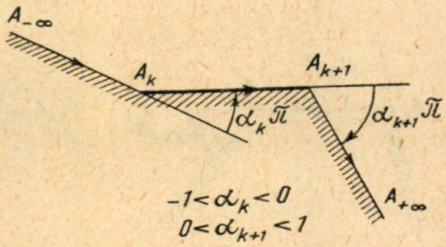


Fig. 3. — Diedru trunchiat model din planul z.

este aplicabilă pentru $\alpha_k + \alpha_{k+1} \leqslant 1$ și $n \geqslant 4$. Ea este cu atît mai bună, cu cît unghiurile diedrului sînt mai apropiate de două unghiuri drepte.

Aplicarea acestor două metode de aproximare implică și o alegere a solenațiilor pentru cele n diedre, respectiv n diedre trunchiate model, care se face mai jos cu ajutorul unei metode de continuitate pe suprafață.

În ambele aproximații, reprezentarea conformă, pe un anumit semiplan, a exteriorului unui domeniu închis este înlocuită prin reprezentarea pe acest semiplan a unui domeniu deschis, ceea ce conduce la înlocuirea relației (1) cu următoarea relație mai simplă, care nu mai conține termenul de la numitorul din (1):

$$z = A \int_{w_0}^{w} (w-w_1)^{\alpha_1} (w-w_2)^{\alpha_2} \cdots (w-w_k)^{\alpha_k} \cdots (w-w_n)^{\alpha_n} \, dw + B. \qquad (4)$$

Autorii vor aborda problema cu ajutorul aproximației mai bune. Ei vor aplica varianta a doua — a celor n diedre trunchiate — și vor arăta apoi că, pentru conductoarele prismatice cu secțiune poligonală regulată și număr mare de laturi, poate fi utilizată și aproximația mai slabă, a celor n diedre.

2. APROXIMAȚIA PE BAZĂ DE DIEDRE TRUNCHIATE A REZISTENȚEI ÎN ALTERNATIV A CONDUCTOARELOR PRISMATICE LA REFULARE NETĂ A CURENTULUI

Fie $\overline{A_k A_{k+1}}$ urma uneia din fețele prismei cu urmele A_k și A_{k+1} ale muchiilor unghiurilor diedre $\pi\alpha_k$, $\pi\alpha_{k+1}$ adiacente feței, ale căror unghiuri plane pot avea orice valori și coincizînd cu elementele corespunzătoare din prisma-model (fig. 4 *a*,*b*,*c*).

Fie $z = x + jy$ și $w = u + jy$ cele două variabile în planele complexe (fig. 5).

Transformarea lui Christoffel-Schwarz a „exteriorului" prismei model din planul Z pe semiplanul superior al planului w este

$$z = A\int_{w_0}^{w} w^{\alpha_k}(w-1)^{\alpha_{k+1}}\,dw + B, \tag{5}$$

în care α_k și α_{k+1} pot avea valori pozitive sau negative. Integrala (5) este de tipul Euler. Din corespondența punctelor O și O' rezultă $B = O$,

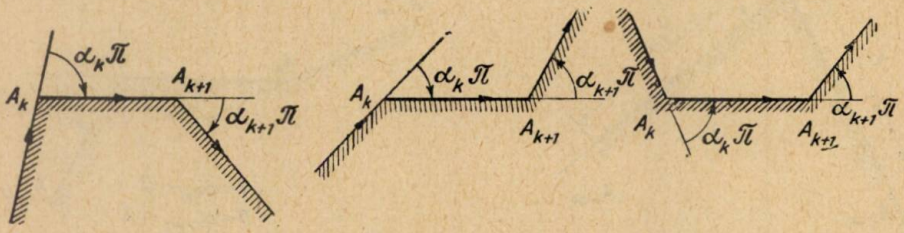


Fig. 4. — Prisme model: convexă (*a*), convex-concavă (*b*) și concavă (*c*), în planul z.

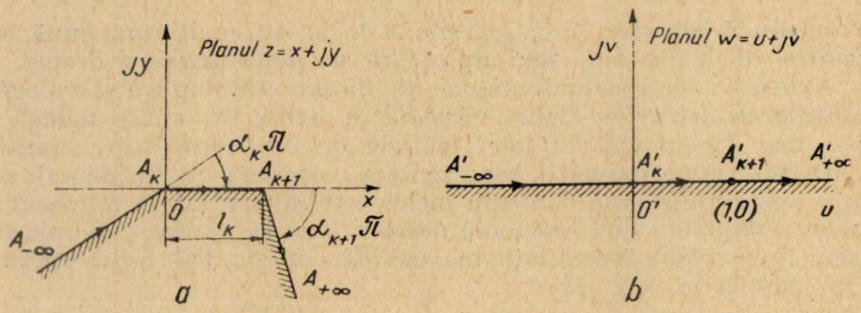


Fig. 5. — Planele z (*a*) și w (*b*) pentru transformarea conformă Christoffel-Schwarz.

iar din corespondența punctelor A_{k+1} și A'_{k+1} rezultă valoarea constantei A

$$l_k = A\int_0^1 w^{\alpha_k}(w-1)^{\alpha_{k+1}}\,dw = A(-1)^{\alpha_{k+1}}\int_0^1 w^{\alpha_k}(1-w)^{\alpha_{k+1}}\,dw =$$

$$= (-1)^{\alpha_{k+1}}\,A\,\frac{\Gamma(1+\alpha_k)\,\Gamma(1+\alpha_{k+1})}{\Gamma(2+\alpha_k+\alpha_{k+1})}, \tag{6}$$

în care s-a notat cu $\Gamma(1+x)$ funcția gamma a lui Legendre

$$\Gamma(1+x) = \lim_{n\to\infty}\frac{1,2,3,\ldots,(n-1)\cdot(n)}{(x+1)(x+2)\ldots(x+n)}\,n^x, \tag{7}$$

x având orice valoare reală.

Din ecuația (6) rezultă pentru constanta A expresia

$$A = \frac{l_k \Gamma(2+\alpha_k+\alpha_{k+1})}{(-1)^{\alpha_{k+1}} \Gamma(1+\alpha_k)\Gamma(1+\alpha_{k+1})}. \tag{8}$$

Dacă se notează cu H_{zk} intensitatea cîmpului magnetic stabilit de curentul I prin domeniul $A_{-\infty}\ A_k\ A_{k+1}\ A_{+\infty}$ și cu H_{wk} intensitatea cîmpului magnetic în planul w, urmează din ecuația (3)

$$H_{zk} = H_{wk}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} = (-1)^{\alpha_{k+1}} H_{wk} \frac{\Gamma(1+\alpha_k)\Gamma(1+\alpha_{k+1})}{l_k \Gamma(2+\alpha_k+\alpha_{k+1})} w^{-\alpha_k}(w-1)^{-\alpha_{k+1}}. \tag{9}$$

Constanta H_{wk} se determină aplicînd teorema lui Ampère de-a lungul axei u din planul w, între $u=0$ și $u=1$

$$\int_0^1 H_{wk}\,\mathrm{d}w = H_{wk}\int_0^1 \mathrm{d}w = H_{wk} = \varkappa I_k, \tag{10}$$

unde s-a notat cu I_k solenația corespunzătoare porțiunii $A'_k\ A'_{k+1}$, adică laturii l_k a poligonului, iar $\varkappa$ este coeficientul de raționalizare, egal cu 1, respectiv cu 4π, în unități raționalizate, respectiv neraționalizate.

Introducînd valoarea constantei H_{wk} din ecuația (10) în ecuația (9) se obține

$$H_{zk} = (-1)^{\alpha_{k+1}} \frac{\varkappa I_k}{l_k} \frac{\Gamma(1+\alpha_k)\Gamma(1+\alpha_{k+1})}{\Gamma(2+\alpha_k+\alpha_{k+1})} w^{-\alpha_k}(w-1)^{-\alpha_{k+1}}. \tag{11}$$

Vectorul S_k al lui Poynting are într-un punct de pe latura l_k expresia [1]

$$S_k = \frac{\rho}{\varkappa^2}\sqrt{\frac{\varkappa\mu\omega\sigma}{2}}\cdot H_{lk}^2, \tag{12}$$

în care H_{wk} se obține din (9) punînd $w=u$, cu $0<u<1$. Afluxul de putere P_k pe unitatea de lungime de bară, prin fața l_k, este

$$P_k = \int S_k\,\mathrm{d}z = \frac{\rho}{\varkappa^2}\sqrt{\frac{\varkappa\mu\omega\sigma}{2}}\,H_{wk}^2\int\left|\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right||\mathrm{d}w| =$$

$$= \frac{\rho}{\varkappa^2}\sqrt{\frac{\varkappa\mu\omega\sigma}{2}}\,\frac{\varkappa^2 I_k^2}{l_k}\,\frac{(-1)^{\alpha_{k+1}}\Gamma(\alpha_k+1)\Gamma(\alpha_{k+1}+1)}{\Gamma(2+\alpha_k+\alpha_{k+1})}\times$$

$$\times\int_0^1 |w^{-\alpha_k}||(w-1)^{-\alpha_{k+1}}|\cdot|\mathrm{d}w| = \rho\sqrt{\frac{\varkappa\mu\omega\sigma}{2}}\,\frac{I_k^2}{l_k}\times$$

$$\times\frac{\Gamma(\alpha_k+1)\Gamma(\alpha_{k+1}+1)}{\Gamma(2+\alpha_k+\alpha_{k+1})}\int_0^1 |w^{-\alpha_k}(1-w)^{-\alpha_{k+1}}||\mathrm{d}w| =$$

$$= \rho\sqrt{\frac{\varkappa\mu\omega\sigma}{2}}\,\frac{\Gamma(1-\alpha_k)\Gamma(1+\alpha_{k+1})\Gamma(1-\alpha_{k+1})\Gamma(1+\alpha_k)}{\Gamma(2+\alpha_k+\alpha_{k+1})\Gamma(2-\alpha_k-\alpha_{k+1})}\times\frac{I_k^2}{l_k}. \tag{13}$$

Puterea totală pe unitatea de lungime de bară se obține însumînd puterile P_k pentru cele n laturi l_k ale poligonului

$$P = \sum_{k=1}^{n} P_k = \rho \sqrt{\frac{\varkappa\mu\omega\sigma}{2}} \sum_{k=1}^{n} \frac{I_k^2}{l_k} \times$$

$$\times \frac{\Gamma(1+\alpha_k)\,\Gamma(1-\alpha_k)\,\Gamma(1+\alpha_{k+1})\,\Gamma(1-\alpha_{k+1})}{\Gamma(2+\alpha_k+\alpha_{k+1})\,\Gamma(2-\alpha_k-\alpha_{k+1})} \tag{14}$$

și în care mărimile I_k satisfac relația

$$\sum_{k=1}^{n} I_k = I, \tag{15}$$

unde I este curentul care trece prin bară.

Notînd cu A aria secțiunii conductorului, puterea P disipată în curent continuu pe unitatea de lungime de bară, la valoarea I a intensității curentului, are expresia

$$P_c = R_c I^2 = \frac{\rho}{A} I^2, \tag{16}$$

în care R_c este rezistența unității de lungime a conductorului, în curent continuu.

Raportul puterilor P și P_c din (14) și (16) reprezintă factorul în alternativ k_R al barei

$$k_R = \frac{P}{P_c} = \frac{R_a}{R_c} = \sqrt{\frac{\varkappa\mu\omega\sigma}{2}} A \sum_{k=1}^{n} \frac{I_k^2}{I^2} \frac{1}{l_k} \times$$

$$\times \frac{\Gamma(1+\alpha_k)\,\Gamma(1-\alpha_k)\,\Gamma(1+\alpha_{k+1})\,\Gamma(1-\alpha_{k+1})}{\Gamma(2+\alpha_k+\alpha_{k+1})\,\Gamma(2-\alpha_k-\alpha_{k+1})} = \tag{17}$$

$$= \sqrt{\frac{\varkappa\mu\omega\sigma}{2}} A \sum_{k=1}^{n} \frac{m_k^2}{l_k} \frac{\Gamma(1+\alpha_k)\,\Gamma(1-\alpha_k)\,\Gamma(1+\alpha_{k+1})\,\Gamma(1-\alpha_{k+1})}{\Gamma(2+\alpha_k+\alpha_{k+1})\,\Gamma(2-\alpha_k-\alpha_{k+1})},$$

în care s-a notat cu R_a rezistența barei în curent alternativ și cu m_k raportul

$$m_k = \frac{I_k}{I}, \tag{18}$$

reprezentînd fracțiunea din solenația totală care revine laturii l_k și care se va calcula prin metoda de minim.

În cazul particular al barelor de secțiune dreaptă poligonală regulată cu $n \geqslant 4$ laturi l și avînd un cerc circumscris din raza R, din motive de simetrie

$$I_k = \frac{I}{n};\ m_k = \frac{1}{n};\ \alpha_k = \frac{2}{n};\ A = n\frac{l^2}{4}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}. \tag{19}$$

Factorul în alternativ k_R are deci în acest caz expresia

$$k_R = \sqrt{\frac{\varkappa\mu\omega\sigma}{2}}\,\frac{l\operatorname{ctg}\pi/n}{4}\,\frac{\Gamma^2\left(1+\frac{2}{n}\right)\Gamma^2\left(1-\frac{2}{n}\right)}{\Gamma\left(2+\frac{4}{n}\right)\Gamma\left(2-\frac{4}{n}\right)}. \tag{20}$$

Dacă se exprimă factorul în alternativ k_R în funcție de raza R a cercului circumscris, se obține

$$k_R = \sqrt{\frac{\varkappa\mu\omega\sigma}{2}}\,\frac{R\cos\frac{\pi}{n}}{2}\,\frac{\Gamma^2\left(1+\frac{2}{n}\right)\Gamma^2\left(1-\frac{2}{n}\right)}{\Gamma\left(2+\frac{4}{n}\right)\Gamma\left(2-\frac{4}{n}\right)}. \tag{21}$$

Cînd numărul de laturi n ale poligonului regulat tinde către infinit, prisma tinde către un cilindru circular, iar expresia (21) a factorului în alternativ k_R devine

$$\lim_{n\to\infty} k_R = \sqrt{\frac{\varkappa\mu\omega\sigma}{2}}\,\frac{R}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{\cos\frac{\pi}{n}\,\Gamma^2\left(1+\frac{2}{n}\right)\Gamma^2\left(1-\frac{2}{n}\right)}{\Gamma\left(2+\frac{4}{n}\right)\Gamma\left(2-\frac{4}{n}\right)} =$$

$$= \sqrt{\frac{\varkappa\mu\omega\sigma}{2}}\,\frac{R}{2}, \tag{22}$$

deoarece [2]

$$\Gamma(1) = 1 \text{ și } \Gamma(2) = 1.$$

S-a obținut astfel expresia (22) a lui Sommerfeld pentru factorul în alternativ al conductoarelor cilindrice la refulare netă a curentului. În acest caz, formula autorilor coincide cu formula „exactă", fiindcă unghiurile $\alpha_k\pi$ tind către zero și — în condiții în rest egale — aproximația autorilor este cu atît mai bună, cu cît unghiurile $\alpha_k\pi$ sînt mai mici.

Pentru bara prismatică de secțiune pătrată ($n = 4$) și de lățime l, pentru care $\alpha_k\pi = \frac{\pi}{2}$ și deci aproximația autorilor este cea mai slabă, formula (20) devine

$$k_R = \sqrt{\frac{\varkappa\mu\omega\sigma}{2}}\,\frac{l}{4}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}\cdot\frac{\Gamma^2\left(1+\frac{1}{2}\right)\Gamma^2\left(1-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2+1))\,\Gamma(2-1)}.$$

Deoarece [2]:

$$\Gamma\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2};\ \Gamma\left(1-\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi};\Gamma(2+1)=2!;\Gamma(2-1)=1, \tag{23}$$

expresia factorului în alternativ k_R al barei pătrate ia forma

$$K_R=\sqrt{\frac{\varkappa\mu\omega\sigma}{2}}\frac{l}{4}\frac{\pi^2}{2!1}=\frac{\pi^2}{32}l\sqrt{\frac{\varkappa\mu\omega\sigma}{2}}. \tag{24}$$

Notînd cu α valoarea reciprocă a adîncimii de pătrundere

$$\alpha=\sqrt{\frac{\varkappa\mu\omega\sigma}{2}}, \tag{25}$$

expresia (24) ia forma

$$k_R=\frac{\pi^2}{32}\alpha l. \tag{26}$$

S. I. Haefner [8] a măsurat rezistența în alternativ a barelor cu secțiuni variate și frecvențe pînă la 8 000 Hz, luînd ca variabilă independentă mărimea p

$$p=\sqrt{4\mu\omega\sigma A}. \tag{27}$$

Folosind mărimea p, expresia (26) a factorului în alternativ al barei de secțiune pătrată devine

$$k_R=\frac{\pi^2}{32}\sqrt{\frac{\pi}{2}}p. \tag{28}$$

Tabloul 1

p =	k_R		$k_R = k_{R1} - k_{R2}$
	k_{R1}, după formula (28)	k_{R2} după S. I. Haefner	
5,00	1,95	2,10	−0,15
5,25	2,05	2,20	−0,15
5,50	2,15	2,30	−0,15
5,75	2,25	2,40	−0,15
6,00	2,34	2,50	−0,16
6,25	2,44	2,60	−0,16
6,50	2,54	2,70	−0,16
6,75	2,64	2,80	−0,16
7,00	2,73	2,88	−0,15

Tabloul I cuprinde o comparație între valorile factorului în alternativ k_R calculate cu formula (28) și cele măsurate de S. I. Haefner.

Diagrama din figura 6 cuprinde curbele $k_R=f(p)$ după formula (28) și după rezultatele experimentale ale lui S. I. Haefner.

J. D. Cockroft [3] a calculat rezistența în alternativ a barelor cu secțiune dreptunghiulară folosind mijloace matematice mai complicate și indică pentru secțiunea pătrată valoarea aproximativă $k_R = 0{,}418\ p$, față de $k_R = 0{,}399\ p$ din formula (28) a autorilor.

În cazul barelor prismatice a căror secțiune dreaptă este un poligon convex oarecare trebuie calculate rapoartele m_k din (18), ceea ce se poate

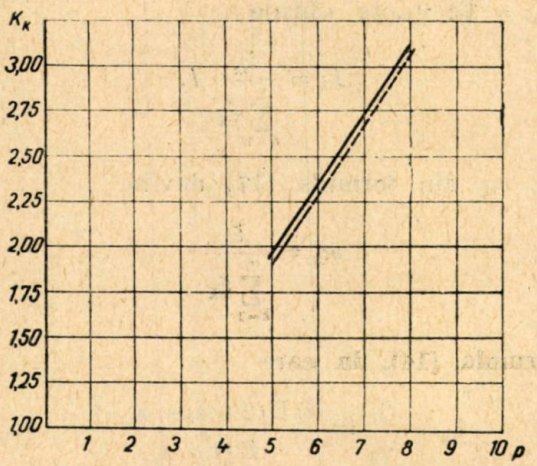


Fig. 6. — Factorul în alternativ k_R al barelor de secțiune pătrată, calculat după formula (28) a autorilor (----) și după datele experimentale ale lui S. I. Haefner (——).

realiza prin metoda de continuitate. Solenațiile încă necunoscute $I_{k'}$, corespunzătoare lățimilor l_k ale poligonului determinat de baza prismei, satisfac relația (15).

Notînd cu H_{zk} și H_{zk+1}, intensitățile cîmpurilor magnetice ale diedrelor teșite alăturate (11), din condiția de continuitate a inducției magnetice și deci în cazul considerat și a intensității cîmpului magnetic pe muchea A_{k+1}, rezultă

$$H_{\substack{zk+1\\w=1}} = H_{\substack{zk+1\\w=0}} ; (-1)^{\alpha_{k+1}} \frac{\varkappa I_k}{l_k} \frac{\Gamma(1+\alpha_k)\Gamma(1+\alpha_{k+1})}{\Gamma(2+\alpha_k+\alpha_{k+1})} \times$$

$$\times w^{-\alpha_k} (w-1)^{-\alpha_{k+1}} \Big|_{w=1} = (-1)^{\alpha_{k+2}} \frac{\varkappa I_k}{l_k} \frac{\Gamma(1+\alpha_{k+1})\Gamma(1+\alpha_{k+2})}{\Gamma(2+\alpha_{k+1}+\alpha_{k+2})} w^{-\alpha_{k+1}} \times$$

$$\times (w-1)^{-\alpha_{k+2}} \Big|_{w=0}, \tag{29}$$

în care notînd

$$\gamma_k = \frac{\Gamma(1+\alpha_k)\Gamma(1+\alpha_{k+1})}{l_k \Gamma(2+\alpha_k+\alpha_{k+1})}, \tag{30}$$

rezultă

$$\frac{I_k}{I_{k+1}} = \frac{\gamma_{k+1}}{\gamma_k} = \frac{l_k\,\Gamma(2+a_k+a_{k+1})\,(\Gamma(1+\alpha_{k+2})}{l_{k+1}\,\Gamma(2+\alpha_{k+1}+\alpha_{k+2})\,\Gamma(1+a_k)}. \tag{31}$$

Cele $(n-1)$ relații (31) împreună cu (15) alcătuiesc sistemul de n ecuații din care se calculează cele n necunoscute I_k.

Notînd $\xi_k = 1 : \gamma_k$, se obține

$$I_k = \frac{\xi_k}{\sum_{k=1}^{n} \xi_k} I, \tag{32}$$

iar coeficientul m_k din formula (17) devine

$$m_k = \frac{\xi_k}{\sum_{k=1}^{n} \xi_k}. \tag{33}$$

Pentru formula (14), în care

$$\xi_k = \frac{1}{\gamma_k} = \frac{l_k\,\Gamma(2+\alpha_k+\alpha_{k+1})}{\Gamma(1+\alpha_k)}, \tag{34}$$

solenațiile I_k au valorile

$$I_k = \frac{\dfrac{l_k\,\Gamma(2+\alpha_k+\alpha_{k+1})}{\Gamma(1+\alpha_k)\,\Gamma(1+\alpha_{k+1})}}{\sum_{k=1}^{n} \dfrac{l_k\,\Gamma(2+\alpha_{k+1}+\alpha_k)}{\Gamma(1+\alpha_k)\Gamma(1+\alpha_{k+1})}}$$

care degenerează în cazul poligonului regulat în

$$I_k = \frac{I}{n}. \tag{35}$$

Pentru bara prismatică de secțiune dreptunghiulară și avînd laturile a și b, abaterile de la valorile reale cresc cu a/b sau b/a și rezultă din (34) pentru solenațiile I_k valorile

$$I_a = \frac{a}{2(a+b)} I$$

și

$$I_b = \frac{b}{2(a+b)} I,$$

iar coeficienții m_k devin

$$m_a = \frac{a}{2(a+b)}; \quad m_b = \frac{b}{2(a+b)}. \tag{36}$$

Expresia (17) a factorului în alternativ ia pentru dreptunghiuri forma

$$k_R = \alpha ab \cdot 2\left[\frac{m_a^2}{a} + \frac{m_b^2}{b}\right] \frac{\Gamma^2\left(1+\frac{1}{2}\right)\Gamma^2\left(1-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2+1)\,\Gamma(2-1)} =$$

$$= \alpha \frac{ab}{2} \frac{a+b}{(a+b)^2} \frac{\frac{\pi^2}{4}}{2!\cdot 1} = \frac{\pi^2}{16} \cdot \frac{ab}{a+b}\,\alpha. \tag{37}$$

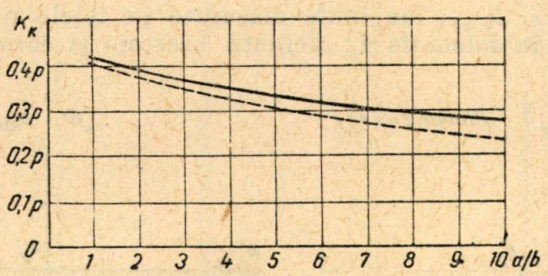


Fig. 7.— Factorul în alternativ k_R al barelor de secțiune dreptunghiulară, calculat după formula (38) a autorilor (----) și după formula lui J. D. Cockroft (——).

Exprimînd factorul în alternativ k_R în funcție de mărimea $p = \sqrt{4\mu\omega\sigma A}$, în care aria bazei prismei are expresia $A = ab$, se obține expresia

$$k_R = \frac{\pi^2}{16}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{ab}}{a+b}p = \frac{\pi^2}{16}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}}p, \tag{38}$$

care degenerează pentru bara de secțiune pătrată ($a = b$) în expresia (28) a factorului în alternativ.

Diagrama din figura 7 cuprinde curbele $k_R = f(a/b)$ după formula (38) și după formula lui J. D. Cockroft.

3. APROXIMAȚIA PE BAZĂ DE DIEDRE A REZISTENȚEI ÎN ALTERNATIV A CONDUCTOARELOR PRISMATICE, LA REFULARE NETĂ A CURENTULUI.

Pentru bare de secțiune poligonală cu număr relativ mare de laturi se poate utiliza și transformarea conformă a lui Christoffel-Schwarz pentru cazul cîte unui unghi diedru. Pentru unghiul diedru al muchiei A_k (fig. 8), ecuația (4) devine

$$z = A\int_{w_0}^{w} w^{\alpha_k}\,dw + B, \tag{39}$$

în care pentru constanta arbitrară A se poate lua valoarea 1, iar din corespondența punctelor A_k și A'_k în planele variabilelor $z = x + jy$ și $w = u + jv$, rezultă

$$B = 0.$$

Deci

$$z = \frac{1}{\alpha_k + 1} w^{\alpha_k + 1}. \tag{40}$$

Fie $l_{k,k-1}$ și $l_{k,k+1}$ lungimile măsurate pe fețele unghiului diedru A_k, ce intervin în solenația I_k aferentă acestuia și cărora, prin trans-

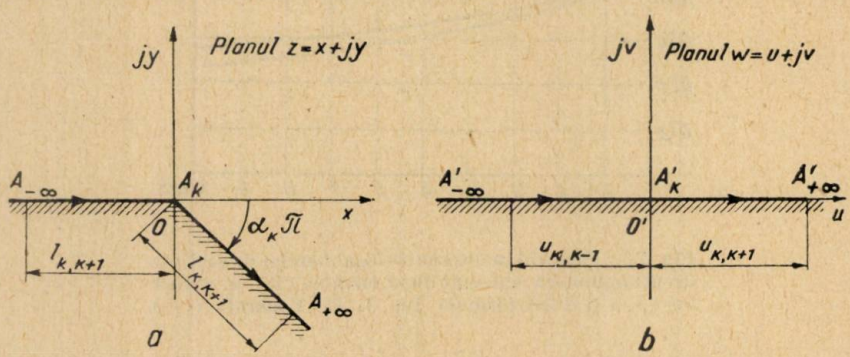


Fig. 8. — Reprezentarea exteriorului unui contur cu un singur unghi din planul z pe semiplanul superior al planului variabilei w.

formarea (30), le corespund în planul w mărimile $u_{k,k-1}$ și $u_{k,k+1}$, adică

$$l_{k,k-1} = \frac{1}{\alpha_k + 1} u_{k,k-1}^{\alpha_k + 1};\quad l_{k,k+1} = \frac{1}{\alpha_k + 1} u_{k,k+1}^{\alpha_k + 1}. \tag{41}$$

Constanta H_{wk}, ce intervine în ecuația (3) a intensității H_{zk}, se obține aplicînd teorema lui Ampère pe axa u din planul w între $-u_{k,k-1}$ și $+u_{k,k+1}$,

$$\int_{u_{k,k-1}}^{u_{k,k+1}} H_{wk}\,dw = H_{wk}(u_{k,k-1} + u_{k,k+1}) = \varkappa I_k, \tag{42}$$

de unde rezultă

$$H_{wk}=\frac{\varkappa I_k}{u_{k,k-1}+u_{k,k+1}}. \tag{43}$$

Deoarece în (41) mărimile $u_{k,k-1}$ şi $u_{k,k+1}$ se pot exprima în funcţie de mărimile $l_{k,k-1}$ şi $l_{k,k+1}$ cum urmează

$$u_{k,k-1}=(\alpha_k-1)\,l_{k,k-1}^{\frac{1}{\alpha_k+1}}; \tag{44}$$

$$u_{k,k+1}=[(\alpha_k+1)\,l_{k,k+1}]^{\frac{1}{\alpha_k+1}},$$

intensitatea H_{kz} a cîmpului magnetic este dată de formula (3)

$$H_{zk}=H_{wk}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}=\frac{\varkappa I_k}{[(\alpha_k+1)\,l_{k,k-1}]^{\frac{1}{\alpha_k+1}}+[(\alpha_k+1)\,l_{k,k+1}]^{\frac{1}{\alpha_k+1}}}\times\frac{1}{w^{\alpha_k}}. \tag{45}$$

Vectorul S_k al lui Poynting are expresia

$$S_k=\frac{\rho}{\varkappa^2}\sqrt{\frac{\varkappa\mu\omega\sigma}{2}}\,H_{tk}^2, \tag{46}$$

în care H_{zk} se obţine din (45) pentru w_k real cuprins între $-u_{k,k-1}$ şi $+u_{k,k+1}$. Afluxul de putere P_k pe unitatea de lungime de bară, prin cele două feţe $l_{k,k-1}$ şi $l_{k,k+1}$ ale unghiului diedru A_k, este

$$P_k=\int S_k\,\mathrm{d}z=\frac{\rho}{\varkappa^2}\sqrt{\frac{\varkappa\mu\omega\sigma}{2}}\,H_{wk}^2\int\left|\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right|\,|\mathrm{d}w|=$$

$$=\rho\sqrt{\frac{\varkappa\mu\omega\sigma}{2}}\,\frac{I_k^2}{[u_{k,k-1}+u_{k,k+1}]^2}\int_{-u_{k,k-1}}^{u_{k,k+1}}\left|\frac{1}{w^{\alpha_k}}\right|\,|\mathrm{d}w|=$$

$$=\rho\sqrt{\frac{\varkappa\mu\omega\sigma}{2}}\,\frac{I_k^2}{1-\alpha_k}\,\frac{u_{k,k+1}^{1-\alpha_k}+(-1)^{-\alpha_k}u_{k,k-1}^{1-\alpha_k}}{[u_{k,k+1}+u_{k,k-1}]^2}. \tag{47}$$

Numerotăm astfel laturile poligonului barei, încît latura l_k să unească vîrfurile A_{k-1} şi A_k şi deci: $l_{k,k-1}=l_k$; $l_{k,k+1}=l_{k+1}$, respectiv $u_{k,k-1}=u_k$; $u_{k,k+1}=u_{k+1}$. Calculînd afluxul de putere P_k din formula

(47) pentru ambele fețe ale diedrului pe fîșii avînd lățimile egale cu ale fețelor corespunzătoare ale barei (fig. 9), însumînd expresiile P_k pentru toate muchiile A_k și împărțind cu doi, se obține puterea totală disipată în bară

$$P=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}P_k=\frac{\rho}{2}\sqrt{\frac{\varkappa\mu\omega\sigma}{2}}\sum_{k=1}^{n}\frac{I_k^2}{1-\alpha_k}\times\frac{u_k^{1-\alpha_k}+(-1)^{-\alpha_k}u_{k+1}^{1-\alpha_k}}{[u_k+u_{k+1}]^2}=$$

$$=\frac{\rho}{2}\sqrt{\frac{\varkappa\mu\omega\sigma}{2}}\sum_{k=1}^{n}\frac{I_k^2}{1-\alpha_k}\frac{l_{k+1}^{\frac{1-\alpha_k}{1+\alpha_k}}+(-1)^{\alpha_k}l_k^{\frac{1-\alpha_k}{1+\alpha_k}}}{\left[l_{k+1}^{\frac{1}{1+\alpha_k}}+l_k^{\frac{1}{1+\alpha_k}}\right]^2}\frac{1}{\alpha_k+1}, \tag{48}$$

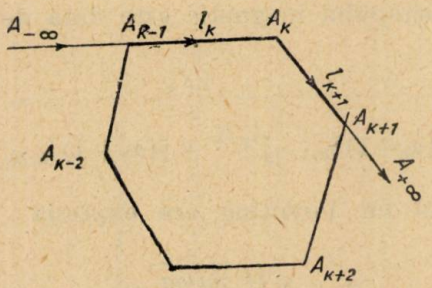


Fig. 9. — Diedru model în planul z cu lățimile l_k și l_{k+1} ale fețelor, pentru calculul afluxului de putere.

în care

$$\sum_{k=1}^{n}I_k=2I.$$

Cu aceleași notații ca în ecuațiile (16) și (18), factorul în alternativ k_R ia expresia

$$k_R=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varkappa\mu\omega\sigma}{2}}A\sum_{k=1}^{n}\frac{m_k'^2}{1-\alpha_k^2}\frac{l_k^{\frac{1-\alpha_k}{1+\alpha_k}}+(-1)^{-\alpha_k}l_k^{\frac{1-\alpha_k}{1+\alpha_k}}}{\left[l_{k+1}^{\frac{1}{1+\alpha_k}}+l_k^{\frac{1}{1+\alpha_k}}\right]^2}, \tag{49}$$

în care coeficienții m_k' nu se pot calcula prin metoda de continuitate aplicată în cazul modelelor în diedre teșite. Din motive de simetrie, în cazul poligoanelor regulate cu n laturi:

$$m_k'=\frac{2}{n}. \tag{50}$$

În cazul particular al conductorului avînd secțiunea în poligon regulat cu n laturi egale cu l și cu raza R a cercului circumscris, formula (49) se transformă astfel

$$k=\frac{2}{n};\quad l=2R\sin\frac{\pi}{n};\quad A=nR^2\sin\frac{2\pi}{n};\quad m_k=\frac{2}{n}=\frac{I_k}{I},$$

$$k_R=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varkappa\mu\omega\sigma}{2}}\cdot\frac{1}{2}nR^2\sin\frac{2\pi}{n}\frac{2^2n}{R^2}\frac{1}{1-\frac{4}{n^2}}\cdot\frac{1}{2}\frac{l}{2R\sin\frac{\pi}{n}}=$$

$$=\sqrt{\frac{\varkappa\mu\omega\sigma}{2}}\frac{R}{2}\frac{n^2}{n^2-4}\cos\frac{\pi}{n}=\frac{\alpha R}{2}\frac{n^2}{n^2-4}\cos\frac{\pi}{n}. \tag{51}$$

Exprimînd factorul în alternativ din formula (51) în funcție de latura l a poligonului regulat, se obține

$$k_R=\frac{\alpha l}{4}\frac{n^2}{n^2-4}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}. \tag{52}$$

Cînd numărul de laturi ale poligonului tinde către infinit, formula (52) conduce din nou la expresia lui Sommerfeld pentru factorul în alternativ al cilindrului circular la efect pelicular net

$$\lim_{n\to\infty}k_R=\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha R}{2}\frac{n^2}{n^2-4}\cos\frac{\pi}{n}=\frac{\alpha R}{2}. \tag{53}$$

Pentru bara de secțiune pătrată, formula (52) devine

$$k_R=\frac{\alpha l}{3}. \tag{54}$$

Dacă se folosește în formula (54) mărimea $p=\sqrt{4\omega\mu\sigma A}$, se obține expresia

$$k_R=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{\pi}{2}}p. \tag{55}$$

Notînd factorul în alternativ din formula (49) cu k_R'' și pe cel din formula (28) cu k_R', raportul

$$\frac{k_R''}{k_R'}=\frac{3^2}{3\pi^2}=\sim 1{,}08 \tag{56}$$

arată că formula (55) conduce la rezultate cu circa 8% mai mari decît formula (28) și deci cu aproximativ 6% mai mari și decît valorile măsurate de S. I. Haefner.

BIBLIOGRAFIE

1. R. RĂDULET, *Bazele teoretice ale electrotehnicii*. Vol. IV, Lit. învățămîntului, București, 1956.
2. E. JAHNKE, F. EMDE, *Funktionertafeln mit Formeln und Kinrer*. Teubner, Leipzig, 1928.
3. S. I. HAEFNER, *Alternating-current resistance of rectangular conductors*. Proceedings of the Institute of Radio Engineers, New York, 1937.

EFECTUL DE PROXIMITATE DINTRE UN FIR RECTILINIU PARCURS DE CURENT ALTERNATIV ŞI UN CILINDRU CONDUCTOR PARALEL CU FIRUL[1])

DE

ANDREI ŢUGULEA

537.312.8 : 621.3.014.1

1. INTRODUCERE

Fie un conductor rectiliniu filiform parcurs de curentul alternativ $i = \sqrt{2}\, I \sin \omega t$ şi un cilindru conductor de rază a, avînd axa paralelă cu firul şi situată la distanţa $r_0 > a$ (fig. 1). Materialul cilindrului este presupus liniar şi omogen din punct de vedere electromagnetic, deci avînd conductivitatea σ şi permeabilitatea μ constante şi independente de mărimile de cîmp.

În aceste condiţii, interesează determinarea cîmpului electromagnetic, în interiorul conductorului cilindric, cum şi puterea electromagnetică dezvoltată în conductor. Această determinare se va face în cadrul regimului cuasistaţionar al cîmpului electromagnetic din conductor, cînd densitatea curentului electric de deplasare este neglijabilă în raport cu densitatea curentului electric de conducţie [1].

Într-un sistem de coordonate cilindrice, avînd axa Oz coincidentă cu axa cilindrului, problema se reduce la integrarea următoarelor ecuaţii ale potenţialului vector

$$\Delta \underline{A}_i = -\mu \underline{J}, \tag{1}$$

pentru interiorul cilindrului şi

$$\Delta \underline{A}_e = 0, \tag{2}$$

[1]) Comunicare prezentată la sesiunea ştiinţifică pe ţară a cadrelor didactice din domeniul electrotehnicii, Bucureşti, 17 — 19 decembrie, 1962.

pentru exteriorul cilindrului, exceptînd punctele în care se află firul parcurs de curent și în care $\underline{A}_e$ are o singularitate logaritmică.

În ecuațiile (1) și (2) $\underline{A}_i$ și $\underline{A}_e$ sînt reprezentările în complex ale componentelor după axa Oz ale potențialului vector în interiorul și exteriorul cilindrului, care depind numai de r și ϑ adică

$$\overline{\underline{A}} = \overline{k}\,\underline{A}_z(r,\vartheta). \tag{3}$$

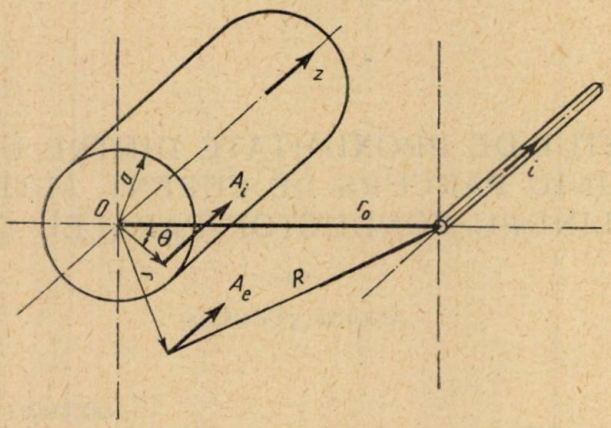


Fig. 1 — Cilindru conductor în cîmpul magnetic alternativ al unui conductor rectiliniu parcurs de curentul $i = \sqrt{2}\, I \sin \omega t$.

Deoarece $\underline{J}_z = \sigma \underline{E}_z = -j\omega\sigma \underline{A}_i$ ecuația (1) se mai poate scrie

$$\Delta \underline{A}_i - j\omega\sigma\mu \underline{A}_i = 0. \tag{4}$$

Deoarece sînt în prezență două medii diferite în care sînt valabile ecuații diferite, se vor determina soluțiile pentru fiecare în parte, constantele de integrare determinîndu-se din condițiile de trecere la frontiera de separație dintre conductor și vid.

2. SOLUȚIA PROBLEMEI ÎN INTERIORUL CILINDRULUI CONDUCTOR

Exprimînd explicit laplacianul în coordonate cilindrice, ecuația (4) se transcrie

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \underline{A}_i}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \underline{A}_i}{\partial \vartheta^2} + \gamma^2 \underline{A}_i = 0 \tag{5}$$

unde s-a notat

$$\gamma^2 = -j\omega\mu\sigma. \tag{6}$$

Utilizînd metoda separării variabilelor, se caută soluția sub forma

$$\underline{A}_i(r,\vartheta) = R(r)\cdot\Theta(\vartheta), \tag{7}$$

care conduce la ecuațiile

$$\frac{d^2\Theta}{d\vartheta^2} + n^2\Theta = 0, \tag{8}$$

și

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr} + \left(\gamma^2 - \frac{n^2}{r^2}\right)R = 0, \tag{9}$$

în care n este un număr întreg.

Soluțiile ecuațiilor (8) și (9) sînt, respectiv

$$\Theta_n = B_n \sin n\vartheta + C_n' \cos n\vartheta \tag{10}$$

și

$$R_n = D_n J_n(\rho) + E_n Y_n(\rho), \tag{11}$$

unde B_n, C_n', D_n, E_n sînt constante de integrare, iar $J_n(\rho)$ și $Y_n(\rho)$ sînt funcțiunile Bessel de prima și a doua speță și de ordinul n de variabila complexă $\rho = \gamma r$.

Deoarece $|Y_n(\rho)| \to \infty$ cînd $\rho \to 0$, iar soluția trebuie să fie finită în întreg domeniul $r \leqslant a$, și din motive de simetrie în raport cu dreapta ce unește centrul cilindrului cu firul, rezultă $E_n = 0$ și $B_n = 0$, astfel că soluția pentru interior obținută prin însumarea tuturor produselor posibile va fi:

$$\boxed{\underline{A}_i = \sum_{n=1}^{\infty} C_n J_n(\rho) \cos n\vartheta,} \tag{12}$$

unde s-a notat $C_n = C_n' \cdot D_n$, constante ce urmează a fi determinate din condițiile de trecere la frontieră.

3. SOLUȚIA PROBLEMEI PENTRU EXTERIORUL CILINDRULUI

Pentru a ține seama de singularitatea logaritmică corespunzătoare firului, soluția problemei exterioare se va căuta sub forma

$$\underline{A}_e = \underline{A}_e' + \underline{A}_e'', \tag{13}$$

unde

$$\underline{A}_e' = -\frac{\mu I}{2\pi}\ln R = \frac{\mu I}{2\pi}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{r}{r_0}\right)^n \cos n\vartheta - \ln r_0\right], \tag{14}$$

în care s-a utilizat egalitatea [2]

$$-\ln R = -\frac{1}{2}\ln(r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos\vartheta) = -\ln r_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{r}{r_0}\right)^n \cos n\vartheta, \tag{15}$$

valabilă pentru $r < r_0$.

În aceste condiții $\underline{A}_e''$ va satisface ecuația lui Laplace fără nici un fel de restricții în întreg domeniul $r > a$:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \underline{A}_e''}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \underline{A}_e''}{\partial \vartheta^2}=0. \tag{16}$$

Căutînd soluția sub forma

$$\underline{A}_e''=R_e(r)\cdot\Theta_e(\vartheta), \tag{17}$$

se obțin ecuațiile

$$\frac{\mathrm{d}^2\Theta_e}{\mathrm{d}\vartheta^2}+n^2\Theta_e=0, \tag{18}$$

$$r^2\frac{\mathrm{d}^2R_e}{\mathrm{d}r^2}+r\frac{\mathrm{d}R_e}{\mathrm{d}r}-n^2R_e=0. \tag{19}$$

Cu soluțiile

$$\Theta_{en}=F_n'\cos n\vartheta+G_n\sin n\vartheta, \tag{20}$$

și

$$R_{en}=H_n r^{-n}+I_n r^n \tag{21}$$

care conduc la soluția generală

$$\underline{A}_e''=\sum_{n=0}^{\infty}F_n r^{-n}\cos n\vartheta, \tag{22}$$

în care s-a ținut seamă de condițiile de simetrie și de faptul că soluția trebuie să fie finită la infinit, constantele $F_n = H_n F_n'$ urmînd a fi determinate din condițiile de trecere.

Soluția rezultantă pentru exterior va fi

$$\boxed{\underline{A}_e=\sum_{n=0}^{\infty}F_n\cos n\vartheta\cdot r^{-n}+\frac{\mu I}{2\pi}\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{r}{r_0}\right)^n\cos n\vartheta-\ln r_0\right|}. \tag{23}$$

Condițiile de trecere pe frontieră sînt

$$\underline{A}_e(a,\ \vartheta)=\underline{A}_i(a,\vartheta) \tag{24}$$

și

$$\left(\frac{\partial \underline{A}_e}{\partial r}\right)_{r=a}=\left(\frac{\partial \underline{A}_i}{\partial r}\right)_{r=a} \tag{25}$$

în care, introducînd relațiile (12) și (23) se obține

$$\sum_{n=1}^{\infty}C_n J_n(\gamma a)\cos n\vartheta=\sum_{n=0}^{\infty}F_n a^{-n}\cos n\vartheta+\frac{\mu I}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{a}{r_0}\right)^n\cos n\vartheta-$$

$$-\frac{\mu I}{2\pi}\ln r_0, \tag{26}$$

și

$$\sum_{n=1}^{\infty} \gamma C_n J'_n(\gamma a) \cos n\vartheta = \sum_{n=1}^{\infty} - nF_n a^{-(n+1)} \cos n\vartheta +$$

$$+ \frac{\mu I}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r_0} \left(\frac{a}{r_0}\right)^{n-1} \cos n\vartheta, \tag{27}$$

relații ce trebuie să fie satisfăcute pentru orice ϑ. Din această condiție rezultă relațiile

$$F_0 = \frac{\mu I}{2\pi} \ln r_0, \tag{28}$$

$$C_n J_n(\gamma a) = F_n a^{-n} + \frac{\mu I}{2\pi} \frac{1}{n} \left(\frac{a}{r_0}\right)^n, \tag{29}$$

$$\gamma C_n J'_n(\gamma a) = - nF_n a^{-(n+1)} + \frac{\mu I}{2\pi} \frac{1}{r_0} \left(\frac{a}{r_0}\right)^{n-1}. \tag{30}$$

Rezolvînd sistemul ultimelor două ecuații se obține

$$C_n = \frac{\mu I}{\pi} \frac{\left(\frac{a}{r_0}\right)^n}{n J_n(\gamma a) + \gamma a J'_n(\gamma a)} \tag{31}$$

și deci potențialul vector în interior, singurul care interesează, va fi

$$\underline{A}_i = \frac{\mu I}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{a}{r_0}\right)^n J_n(\gamma r)}{n J_n(\gamma a) + \gamma a J'_n(\gamma a)} \cos n\vartheta, \tag{32}$$

sau

$$\boxed{\underline{A}_i = \frac{\mu I}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{a}{r_0}\right)^n J_n(\gamma r)}{\gamma a J_{n-1}(\gamma a)} \cos n\vartheta} \tag{33}$$

unde s-a ținut seamă de identitatea [3]:

$$\frac{n}{\gamma a} J_n(\gamma a) + J'_n(\gamma a) = J_{n-1}(\gamma a). \tag{34}$$

4. CALCULUL CÎMPURILOR ȘI A PUTERII COMPLEXE ABSORBITE

Pentru calculul vectorului Poynting și al puterii complexe absorbite de conductor sînt necesare numai componentele tangențiale ale cîmpurilor la frontiera conductorului

$$\underline{E}_z = -j\omega(\underline{A}_i)_{r=a} = -\frac{j\omega\mu I}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{a}{r_0}\right)^n J_n(\gamma a)}{\gamma a J_{n-1}(\gamma a)}\cos n\vartheta, \tag{35}$$

$$\underline{H}_\vartheta = -\frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial \underline{A}_i}{\partial r}\right)_{r=a} = -\frac{I}{\pi a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{a}{r_0}\right)^n J_n'(\gamma a)}{J_{n-1}(\gamma a)}\cos n\vartheta =$$

$$= -\frac{I}{\pi a}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a}{r_0}\right)^n\left[1-\frac{n}{\gamma a}\frac{J_n(\gamma a)}{J_{n-1}(\gamma a)}\right]\cos n\vartheta \tag{36}$$

unde s-a ținut seamă de relația (34).

Vectorul Poynting complex va avea o singură componentă normală de suprafață laterală a conductorului

$$\underline{S}_r = \underline{E}_z\underline{H}_\vartheta^* = -\frac{j\omega\mu I^2}{\gamma\pi^2 a^2}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{a}{r_0}\right)^n J_n(\gamma a)}{J_{n-1}(\gamma a)}\cos n\vartheta\right]\times\left[\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{a}{r_0}\right)^m\left(1-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{m}{\gamma^* a}\frac{J_m^*(\gamma a)}{J_{m-1}^*(\gamma a)}\right)\cos m\vartheta\right], \tag{37}$$

iar fluxul acestuia către interiorul conductorului pe o lungime l va fi

$$\underline{P}_a = l\int_0^{2\pi}\underline{S}_r a\,d\vartheta = \frac{-j\omega\mu l I^2}{\gamma\pi a}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a}{r_0}\right)^{2n}\frac{J_n(\gamma a)}{J_{n-1}(\gamma a)}\left[1-\frac{n}{\gamma^* a}\frac{J_n^*(\gamma a)}{J_{n-1}^*(\gamma a)}\right], \tag{38}$$

sau încă

$$\underline{P}_a = \frac{\alpha}{\sigma}(1-j)\frac{lI^2}{\pi a}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a}{r_0}\right)^{2n}\frac{J_n(\gamma a)}{J_{n-1}(\gamma a)}\left[1-\frac{n}{\gamma^* a}\frac{J_n^*(\gamma a)}{J_{n-1}^*(\gamma a)}\right] \tag{39}$$

unde

$$\alpha = Re\{\gamma\} = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}.$$

5. CAZURI PARTICULARE

Pentru $a << r_0$ reținînd primul termen din serie se obține

$$\underline{A}_i = \frac{\mu I}{2\pi r_0}\frac{2aJ_1(\gamma r)}{\gamma a J_0(\gamma a)}\cos\vartheta = B_0\frac{2aJ_1(\gamma r)}{\gamma a J_0(\gamma a)}\cos\vartheta \tag{40}$$

și reprezintă potențialul magnetic într-un conductor cilindric situat în cîmp magnetic alternativ omogen de inducție B_0[4].

Puterea complexă corespunzătoare va fi

$$\underline{P}_a = \frac{\alpha}{\sigma}(1-j)\frac{lI^2}{\pi a}\left(\frac{a}{r_0}\right)^2 \frac{J_1(\gamma a)}{J_0(\gamma a)}\left[1-\frac{1}{\gamma^* a}\frac{J_1^*(\gamma a)}{J_0^*(\gamma a)}\right] =$$

$$= \frac{4\pi\alpha a l}{\sigma\mu^2}(1-j)B_0^2\frac{J_1(\gamma a)}{J_0(\gamma a)}\left[1-\frac{1}{\gamma^* a}\frac{J_1^*(\gamma a)}{J_0^*(\gamma a)}\right]. \tag{41}$$

Pentru cazul efectului pelicular pronunțat, $|\gamma a| >> 1$, ținînd seamă de dezvoltările asimptotice pentru valori mari ale argumentelor, ale funcțiunilor Bessel, se obține

$$\underline{P}_a = \frac{4\pi}{\sigma}H_0^2\left[1+j\left(1+\frac{1}{a\alpha}\right)\right]\alpha a \approx \frac{2\pi}{\sigma}H_{0\max}^2\frac{a}{\delta}(1+j), \tag{42}$$

unde $H_{0\max}$ este valoarea maximă a intensității cîmpului magnetic, iar $\delta = \frac{1}{\alpha}$ este adîncimea de pătrundere.

Pentru cazul efectului pelicular slab $|\gamma a| \ll 1$ sau $a \ll \delta$ ținînd seamă de dezvoltările funcțiunilor Bessel pentru argumente mici, se obține pentru puterea activă absorbită de cilindru

$$P = Re\{\underline{P}_a\} = \frac{\pi}{\sigma}H_0^2\left(\frac{a}{\delta}\right)^4 = \frac{\pi}{2\sigma}H_{0\max}^2\left(\frac{a}{\delta}\right)^4, \tag{43}$$

în care s-a folosit dezvoltarea

$$\frac{J_1(x)}{J_0(x)} \approx \frac{x}{2}\left[1+\frac{x^2}{8}\right] \tag{44}$$

pentru $|x| < 1$.

CONCLUZII

Utilizînd metoda separării variabilelor s-a găsit soluția exactă privind cîmpul electromagnetic cuasistaționar al curenților turbionari induși într-un conductor cilindric masiv de cîmpul magnetic alternativ al unui fir paralel cu cilindrul. Dacă la soluția obținută se adaugă soluția cunoscută [5] a efectului pelicular într-un cilindru circular conductor se poate obține soluția generală corespunzînd cazului cînd conductorul

cilindric este parcurs de curent alternativ și se află în cîmpul alternativ al unui fir paralel cu el. Această soluție poate prezenta interes în calculul factorului de majorare a rezistenței și a reactanței interioare în curent alternativ pentru înfășurări din conductoare cilindrice.

BIBLIOGRAFIE

1. R. RĂDULET, *Bazele teoretice ale electrotehnicii*. Vol. **IV**, Lit. învățămîntului, București, 1957.
2. W. SMYTHE, *Static and dynamic electricity*. Sec. edition, New-York, Toronto, London, 1950.
3. E. JANKE, F. EMDE, *Tabele de funcții*. Moscova, 1959.
4. G. KADEN, *Ecrane electromagnetice*. Gosenergoizdat, Moscova-Leningrad, 1957.
5. L. R. NEIMAN, P. L. KALANTAROV, *Bazele teoretice ale electrotehnicii*. Vol. **III**, București, 1957.

DESPRE POSIBILITATEA DE REZOLVARE ANALOGICĂ A PROBLEMEI ÎNCĂLZIRII POLILOR INDUCTORI MASIVI AI MAȘINILOR SINCRONE

DE

C. V. BĂLĂ

621.3.004.61 : 537.312.8 : 518.5

Studiul cîmpului magnetic și determinarea încălzirii în timpul pornirii motoarelor sincrone cu polii inductori masivi a format obiectul a numeroase lucrări, datorită complexității problemei.

Pornind de la o repartiție dată a pierderilor în piesele polare masive, Ph. K. Sattler [1] a determinat analitic încălzirea suprafeței dinspre întrefier a piesei polare. Problema este insuficient rezolvată, deoarece pentru dimensionarea izolației înfășurării de excitație interesează și încălzirea suprafeței interioare a piesei polare, precum și încălzirea suprafeței laterale a polului inductor.

Problema încălzirii rotoarelor masive netede ale mașinilor sincrone la funcționarea în asincron a fost rezolvată analitic de A. Nicolaide [2], considerînd dat cîmpul de pierderi specifice.

Metodele generale de determinarea încălzirii mașinilor electrice au fost sintetizate de B. M. Weedy [3]; în introducerea lucrării [3] se subliniază rămînerea în urmă a cercetărilor privind determinarea încălzirii și studiul răcirii mașinilor electrice. Apoi sînt expuse metodele analitice, numerice și analogice pentru calculul transmisiei căldurii în medii lipsite de surse de căldură.

În [4], Roberts a expus o metodă analogică pentru determinarea repartiției cîmpului magnetic în miezul feromagnetic considerînd o caracteristică de magnetizare neliniară idealizată, sau pe cea reală. O metodă analitică de determinarea cîmpului magnetic în corpurile feromagnetice masive și saturabile a fost dezvoltată de Lee Shevel [5] și Kesavamurthy și Rajagopalan [6].

Problema determinării cîmpului temperaturii pe suprafețele polilor inductori care vin în contact cu izolația înfășurării de excitație, — în timpul pornirii motorului sincron în regim asincron, — este dependentă de determinarea cîmpului magnetic, respectiv a pierderilor în miezul feromagnetic; repartiția cîmpului magnetic caracterizată prin adîncimea de pătrundere este funcție de:

— frecvența cîmpului magnetic. În perioada pornirii, frecvența cîmpului magnetic în inductor variază de la frecvența rețelei (în momentul pornirii) pînă la zero (cînd rotorul a atins viteza sincronă);

— permeabilitatea magnetică;

— rezistivitatea miezului feromagnetic. Datorită încălzirii neuniforme care se produce, rezistivitatea mediului este funcție de temperatura locală.

Adoptarea unei funcții univoc determinate pentru caracterizarea repartiției pierderilor apare nejustificată, deoarece rezistivitatea și permeabilitatea magnetică variază în timpul pornirii.

În regimul tranzitoriu de pornire a motoarelor sincrone în asincron, se produc pierderi importante în zonele dinspre suprafețele exterioare ale pieselor polare și ale miezului polilor inductori. Se consideră procesul tranzitoriu adiabatic, neglijîndu-se căldura transmisă prin convecție și radiație de la inductor la mediul ambiant; căldura dezvoltată în zonele dinspre suprafețele exterioare se transmite în parte prin conducție spre interiorul polului și spre jug. La suprafața polilor inductori pot apare încălziri inadmisibil de mari, care periclitează izolația înfășurării de excitație. Totodată și valoarea cuplului de pornire fiind funcție de pierderi, depinde și de valorile locale ale permeabilității și rezistivității inductorului.

În această lucrare, pornind de la descompunerea cîmpului magnetic învîrtitor în două cîmpuri alternative [7] se determină cîmpul magnetic alternativ după cele două direcții principale ale inductorului și se prezintă o metodă analogică de rezolvare prin aproximații succesive a sistemelor de ecuații cu derivate parțiale neliniare, care descriu procesul termic tranzitoriu.

1. FLUXURILE MAGNETICE ÎN ROTORUL MASIV CU POLII IEȘIȚI

Deoarece pentru producerea cuplului interesează în primul rînd fundamentalele cîmpului magnetic din întrefier, în continuare vom considera cîmpul magnetic învîrtitor repartizat sinusoidal.

Cîmpul magnetic învîrtitor rezultant

$$B = B_0 \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{\tau} x\right), \tag{1}$$

din mașină, îl descompunem în două cîmpuri alternative defazate în timp

și decalate în spațiu cu unghiul electric $\frac{\pi}{2}$ și ale căror axe coincid cu axele principale ale rotorului, după relația

$$B = B_0 \sin \omega t \cos \frac{\pi}{\tau} x + B_0 \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \cos \left(\frac{\pi}{\tau} x + \frac{\pi}{2}\right). \qquad (2)$$

Alegem originea sistemului de coordonate în axa polului; în acest caz componenta $B_{d_1} = B_0 \sin \omega t \cos \frac{\pi}{\tau} x$ reprezintă cîmpul magnetic alternativ din axa polului inductor, iar componenta $B_{q_1} = B_0 \sin \left(\omega t + \right.$ $\left. + \frac{\pi}{2}\right) \cos \left(\frac{\pi}{\tau} x + \frac{\pi}{2}\right)$, cîmpul magnetic alternativ din axa transversală a polilor.

Cîmpurile magnetice din axele principale ale mașinii cu întrefier uniform, ale căror fundamentale cu amplitudinile egale cu cele de mai sus, au valorile maxime

$$B_{dm} = \frac{B_0}{k_d} \text{ respectiv } B_{qm} = \frac{B_0}{k_q} \text{ și}$$

expresiile aproximative

$$B_d = \frac{B_0}{k_d} \sin \omega t \cos \frac{\pi}{\tau} x, \quad \text{pentru } \frac{\pi}{2}(1-\alpha) \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}(1+\alpha), \qquad (3)$$

$$B_d = 0, \quad ,, \quad \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}(1-\alpha) \\ \frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \pi \end{cases}$$

respectiv

$$B_q = \frac{B_0}{k_q} \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \cos \left(\frac{\pi}{\tau} x + \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{pentru} \quad \frac{\pi}{2}(1-\alpha) \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}(1+\alpha) \qquad (4)$$

$$B_q = 0, \quad ,, \quad \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}(1-\alpha), \\ \frac{\pi}{2}(1+\alpha) \leqslant x \leqslant \pi, \end{cases}$$

în care k_d și k_q sînt coeficienții de formă ai cîmpurilor magnetice de reacție după cele două axe, iar α factorul de acoperire polară ideală.

Datorită fenomenului de refulare, liniile cîmpului magnetic se închid ca în figura 1*a*, pentru cîmpul din axa longitudinală și ca în figura 1*b* pentru cîmpul din axa transversală.

Prin urmare, de-a lungul zonei, din vecinătatea conturului *abc*, se produc pierderi datorită componentelor B_d și B_q ale cîmpului, iar de-a lungul conturului *ade* ... *fgc* numai datorită componentei B_d. Apoi, de-a lungul zonei vecine conturului *de* și *gf*, fluxul magnetic este constant

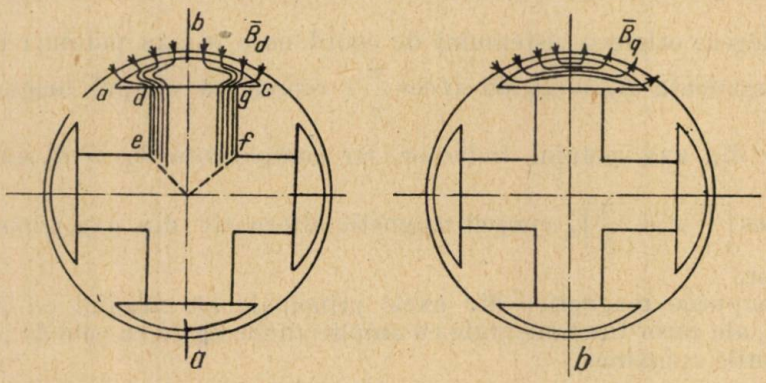


Fig. 1. — Cîmpul magnetic în rotorul masiv cu polii ieșiți.

și pierderile sînt constante; în zona dinspre întrefier, fluxul magnetic variază conform relațiilor (3) respectiv (4) și prin urmare condițiile la limită diferă de la punct la punct.

2. ECUAȚIILE CÎMPURILOR (MAGNETIC ȘI TERMIC) ÎN MEDII FEROMAGNETICE

Pe baza experimentărilor prezentate în [8] și din soluțiile analitice prezentate pentru încălzirea suprafețelor corpurilor masive în cîmp magnetic, se pot adopta următoarele ipoteze:

— Deoarece pierderile se produc în zona de la suprafața corpurilor se neglijează efectul marginal al rotorului și efectul de curbură și problema se rezolvă pentru transmisia căldurii după o singură direcție.

— În perioada scurtă de pornire se poate neglija căldura transmisă prin convecție și radiație; datorită repartiției neuniforme a pierderilor în miezul feromagnetic, căldura produsă se transmite în timp prin conducție spre masa polului.

— Căldura specifică și conductibilitatea termică sînt constante.

De aceea, vom stabili ecuațiile cîmpului magnetic și termic direct pentru un corp feromagnetic reprezentat într-un spațiu semiinfinit, delimitat de un plan și străbătut de cîmpul magnetic de-a lungul unei axe longitudinale paralelă cu planul (fig. 2). Fie H intensitatea cîmpului magnetic în direcția axei Oy, B — inducția magnetică, ϑ — încălzirea, ρ — rezistivitatea și μ — permeabilitatea magnetică într-un punct de abscisă x.

Din ecuațiile cîmpului electromagnetic scrise în sistemul MKSA raționalizat rezultă

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial B}{\partial t}; \tag{5}$$

această ecuație se mai poate scrie și astfel:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = \frac{\partial \ln \frac{1}{\rho}}{\partial x}\cdot\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial B}{\partial t}. \tag{6}$$

Să considerăm trei benzi succesive (fig. 2) de grosime h și fie $P_{\nu+1}$, P_ν și $P_{\nu-1}$ mijloacele lor; dezvoltînd în serie Taylor intensitățile cîmpului magnetic în punctele $P_{\nu+1}$ și $P_{\nu-1}$ rezultă

$$H_{\nu+1} = H_\nu + \frac{1}{1!}h\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)_\nu + \frac{1}{2!}h^2\left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}\right)_\nu + \dots$$

$$H_{\nu-1} = H_\nu - \frac{1}{1!}h\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)_\nu + \frac{1}{2!}h^2\left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}\right)_\nu + \dots$$

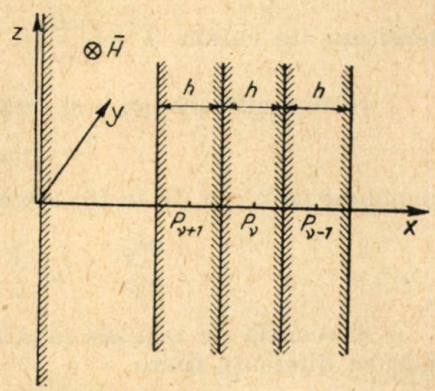


Fig. 2. — Explicativă pentru stabilirea ecuațiilor cîmpului magnetic și termic.

Din acestea se obține:

$$\left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}\right)_\nu \approx \frac{1}{h^2}(H_{\nu+1} - 2H_\nu + H_{\nu-1}),$$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)_\nu \approx \frac{1}{h}(H_{\nu+1} - H_\nu) \approx \frac{1}{h}(H_\nu - H_{\nu-1}) \approx \frac{1}{2h}(H_{\nu+1} - H_{\nu-1}).$$

În consecință, ecuația cu derivate parțiale (5) se poate scrie sub forma unei ecuații diferențiale cu diferențe finite astfel

$$H_{\nu+1} - 2H_\nu + H_{\nu-1} = -\frac{1}{2\rho_\nu}[(\rho_{\nu+1} - \rho_\nu)(H_{\nu+1} - H_\nu) + (\rho_\nu - \rho_{\nu-1})(H_\nu - H_{\nu-1})] + \frac{1}{\rho}h^2\left(\frac{dB}{dt}\right)_\nu. \tag{5a}$$

La pornirea motorului sincron rezistivitatea ρ este constantă și ecuația (5) devine

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial B}{\partial t} \tag{6'}$$

Între B, și H există și relația stabilită pe baza legii polarizației magnetice

$$B = \mu H. \tag{7}$$

Ecuația conducției termice scrisă pentru cazul simplificat de față în mediul de conductibilitate termică λ, greutate specifică γ și căldură specifică c este

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\rho}{\lambda}\left(\frac{\overline{\partial H}}{\partial x}\right)^2 = \frac{c\gamma}{\lambda}\frac{\partial \vartheta}{\partial t}, \tag{8}$$

în care termenul al 2-lea din partea stîngă, cuprinde valoarea efectivă a densității de curent $J = \left(\frac{\overline{\partial H}}{\partial x}\right)$.

Între rezistivitatea ρ și încălzirea ϑ se poate scrie o relație liniară

$$\rho = \rho_0(1 + \alpha\vartheta); \tag{9}$$

înlocuind pe ϑ din (9) în (8) rezultă o ecuație în ρ

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \rho_0 \alpha \frac{\rho}{\lambda}\left(\frac{\overline{\partial H}}{\partial x}\right)^2 = \frac{c\gamma}{\lambda}\frac{\partial \rho}{\partial t}. \tag{10}$$

Și ecuația de mai sus se poate scrie sub forma unei ecuații diferențiale cu diferențe finite

$$\rho_{\nu+1} - 2\rho_\nu + \rho_{\nu-1} = -\rho_0 \frac{\alpha}{\lambda}\left(\frac{\overline{\partial H}}{\partial x}\right)_\nu^2 h^2 \rho_\nu + \frac{c\gamma}{\lambda} h^2 \left(\frac{d\rho}{dt}\right)_\nu, \tag{10a}$$

în care $\nu+1$, ν și $\nu-1$ sînt abscisele a trei puncte succesive situate la distanțe egale cu h.

Ecuațiile (6), (7) și (10) determină cîmpul magnetic și cîmpul de valori ale rezistivității corpului feromagnetic.

Comparînd ecuațiile (6) și (6′) rezultă influența variației rezistivității asupra cîmpului magnetic. În ecuația (5), respectiv în (6) și (6′) intervin valorile instantanee ale intensității cîmpului magnetic și ale inducției magnetice; în ecuația (8), respectiv (10) intervine valoarea efectivă a intensității cîmpului magnetic. Rezolvarea sistemului se poate face pas cu pas; astfel se consideră o repartiție inițială a cîmpului de valori ale rezistivității și se determină intensitatea cîmpului magnetic din ecuațiile (6) și (7). Apoi, cunoscînd cîmpul magnetic și presupunînd pierderile constante într-un anumit interval de timp, se determină funcția $\rho(x, t)$ din ecuația (10), și se introduce în ecuația (6) pentru rezolvarea problemei pe pasul următor.

Intervalul de timp trebuie ales de cel puțin cîteva perioade ale curbei cîmpului magnetic, pentru a rezulta o variație sensibilă a încălzirii piesei polare; deoarece frecvența curenților induși în rotor variază proporțional cu alunecarea și intervalul de timp variază proporțional cu alunecarea asigurîndu-se astfel o precizie de calcul constantă.

3. CIRCUITE ELECTRICE ANALOGICE PENTRU REZOLVAREA ECUAȚIILOR CU DERIVATE PARȚIALE

Pentru rezolvarea sistemului de ecuații cu derivate parțiale neliniare (6), (7), (10) propunem în continuare metode analogice, în care se utilizează circuite electrice neliniare. Pentru rezolvarea unei singure ecuații neliniare de tipul ecuației (6′) s-au propus în [4] diferite circuite neliniare, a căror schemă este funcție de variația permeabilității magnetice. În [9] sînt analizate circuitele electrice analogice liniare pentru rezolvarea ecuațiilor cu derivate parțiale.

Se pune însă problema de a stabili circuite electrice analogice pentru rezolvarea ecuațiilor cu derivate parțiale, neliniare mai generale decît a celor de tipul (6′).

Fie un circuit electric cu parametrii repartizați neuniform și format numai din rezistențe și condensatoare; rezistențele circuitului pot fi funcții și de tensiunea aplicată la borne (sau de intensitatea curentului). Notăm cu :

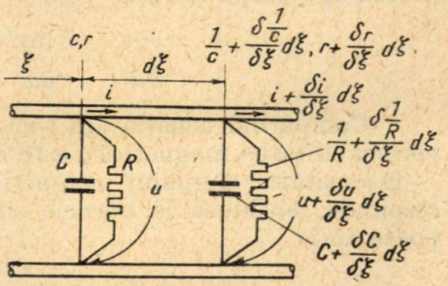


Fig. 3. — Circuitul analogic echivalent cu parametrii repartizați neuniform.

— c și r capacitatea și rezistența longitudinală a circuitului pînă la distanța ξ ;

— C și R capacitatea și rezistența transversală pînă la distanța ξ.

Fie r', $c' = \dfrac{1}{\delta(1/c)/\delta\xi}$, $R' = \dfrac{1}{\delta(1/R)/\delta\xi}$ C' derivatele acestora în raport cu coordonata ξ (fig. 3). Ecuațiile circuitului pentru tensiunea u la distanța ξ și curentul prin latura circuitului la distanța ξ sînt

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = r' i + \frac{1}{c'} \int i \, d\tau, \tag{11}$$

$$\frac{\partial i}{\partial \xi} = \frac{u}{R'} + C' \frac{\partial u}{\partial \tau}. \tag{12}$$

Din acest caz general, vom reține cîteva cazuri particulare, interesante pentru rezolvarea problemei menționate la punctul 2. Astfel :

— pentru $c' = \infty$, ecuația scrisă în funcție de u, dedusă din ecuațiile (11) și (12) este

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = \frac{r'}{R'} u + \frac{1}{r'} \frac{\partial r'}{\partial \xi} \frac{\partial u}{\partial \xi} + r' C' \frac{\partial u}{\partial \tau}; \tag{13}$$

— pentru $R' = \text{const.}$ și $C' = \text{const.}$, ecuația în care numai i este funcția necunoscută, dedusă din aceleași ecuații (11) și (12) este

$$\frac{\partial^2 i}{\partial \xi^2} = \frac{r'}{R'} i + \frac{1}{C'R'} \int i \, d\tau + C' \frac{\partial}{\partial \tau} r' i + \frac{C'}{c'} i. \tag{14}$$

a. **Despre posibilitatea de rezolvare analogică a ecuației (6) cu ajutorul circuitelor electrice.** Ecuațiile (13) și (14) stau la baza rezolvării analogice a ecuațiilor cu derivate parțiale cu coeficienți constanți, sau funcții de necunoscute; r', c', R' și C' pot fi funcții de variabila ξ, sau funcții de u, respectiv, i.

Ecuația (13) pentru $R' = \infty$, devine

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = \frac{1}{r'} \frac{\partial r'}{\partial \xi} \frac{\partial u}{\partial \xi} + r' C' \frac{\partial u}{\partial \tau}. \tag{13'}$$

Dacă se notează $\xi = k_x \cdot x$ și $\tau = k_t \cdot t$ în care k_x și k_t sînt factori de scară, ecuația (13') se poate scrie

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial \ln r'}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + r' C' \frac{k_x^2}{k_t} \frac{\partial u}{\partial t}. \tag{13''}$$

Comparînd ecuația (13') cu ecuația (6) scrisă pentru cazul în care permeabilitatea magnetică μ este constantă, rezultă următoarea analogie; — intensității cîmpului magnetic la distanța x de la suprafață, îi corespunde tensiunea la bornele circuitului situate la distanța ξ, încît se poate scrie

$$H \equiv u, \tag{15a}$$

— termenului $\frac{\partial \ln \frac{1}{\rho}}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial x}$ îi corespunde termenul $\frac{\partial \ln r'}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x}$ și prin urmare

$$\rho \equiv \frac{1}{r'}, \tag{15 b}$$

— termenului $\frac{\mu}{\rho} \frac{\partial H}{\partial x}$ îi corespunde termenul $r' C' \frac{k_x^2}{k_t} \frac{\partial u}{\partial t}$

încît se poate scrie

$$\frac{\mu}{\rho} \equiv \frac{k_x^2}{k_t} r' C'. \tag{15 c}$$

Factorii k_x^2 și k_t se aleg potrivit pentru ca parametrii r' și C' ai circuitului analogic să ia valori realizabile tehnic.

În locul circuitului din figura 3 cu parametrii repartizați și variabili, se poate utiliza un șir de cuadripoli conectați în serie și formați din rezistențe variabile și condensatoare fixe (fig. 4).

Între tensiunile $u_{\nu+1}$, u_ν și $u_{\nu-1}$ ale acestui circuit rezultă relația aproximativă

$$u_{\nu+1} - 2u_\nu + u_{\nu-1} = \frac{1}{r_\nu} \left[\frac{r_{\nu+1} - r_\nu}{2} (u_{\nu+1} - u_\nu) + \frac{r_\nu - r_{\nu-1}}{2} (u_\nu - \right.$$

$$\left. - u_{\nu-1}) + r_\nu C \frac{\mathrm{d}u_\nu}{\mathrm{d}\tau} \right], \tag{13' a}$$

stabilită în ipoteza că avem

$$\frac{r_{\nu+1}+r_\nu}{2r_\nu}\approx\frac{r_{\nu-1}+r_\nu}{2r_\nu}\approx 1,$$

și considerînd pentru derivatele de ordinul întîi al funcțiilor, expresiile

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_\nu\approx h(y_{\nu+1}-y_\nu)\approx h(y_\nu-y_{\nu-1}),$$

h, fiind creșterea variabilei.

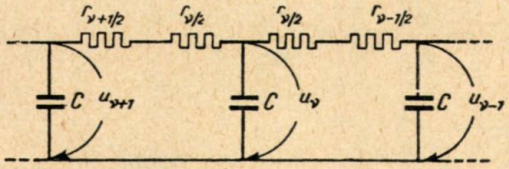


Fig. 4. — Circuitul analogic simplificat C = const., iar r variabil.

Transformînd în mod asemănător și ecuația (6), rezultă următoarea corespondență:

$$H\equiv u, \tag{16 a}$$

$$\rho_\nu\equiv\frac{1}{r_\nu}, \tag{16 b}$$

$$\frac{\mu h^2}{\rho_\nu}\equiv\frac{r_\nu C}{k_t}. \tag{16 c}$$

Ecuația (6) se poate rezolva și cînd μ este o funcție dată de H, dar numai pentru cazul simplificat ρ = const., așa cum s-a procedat în lucrarea [4], în care s-a considerat un circuit format dintr-un șir de cuadripoli de tipul celui reprezentat în figura 4, avînd rezistența longitudinală funcție de curent și considerînd drept funcție imagine, intensitatea curentului electric.

b. **Despre posibilitatea de rezolvare a ecuației (10) cu ajutorul circuitelor electrice analogice.** Ecuația (13) pentru $c'=\infty$ și r' = const. devine

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}=\frac{r'}{R'}u+r'C'\frac{\partial u}{\partial\tau}. \tag{17}$$

Comparînd această ecuație cu ecuația (10) se ajunge la concluzia că o corespondență între funcțiile ρ și u este posibilă numai pentru cazul

$$\text{în care } \frac{r'}{R'}\equiv-\frac{1}{k_x^2}\rho_0\frac{\alpha}{\lambda}\left(\frac{\overline{\partial H}}{\partial x}\right)^2 \text{ iar } r'C'\equiv\frac{cr}{\lambda}\frac{k_t}{k_x^2} \tag{18 a,b}$$

Prin urmare în circuitul de cuadripoli din figura 5, rezistențele negative R' trebuie realizate cu ajutorul unor rezistențe neliniare conectate în paralel cu amplificatoare operaționale de tipul celor utilizate curent în calculatoarele analogice; deoarece r' și C' sînt constante, rezultă pentru R' expresia

$$R' \equiv -\frac{r'\lambda}{\rho_0 \alpha} \frac{k_x^2}{\left(\overline{\frac{\partial H}{\partial x}}\right)^2}.$$

În cazul utilizării unui lanț de cuadripoli (fig. 5), ecuația circuitului este

$$u_{\nu+1} - 2u_\nu + u_{\nu-1} = \frac{r}{R_\nu} u_\nu + rC \frac{du_\nu}{d\tau}. \qquad (17\,a)$$

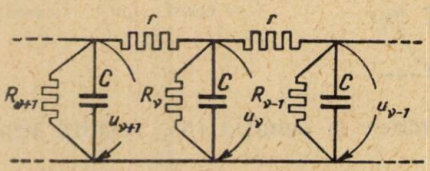


Fig. 5. — Circuitul analogic simplificat r = const., C = const., iar R = variabil și negativ.

Comparînd ecuațiile (17 a) și (10 a) rezultă următoarea corespondență

$$\left.\begin{aligned} \frac{r}{R_\nu} &\equiv -\rho_0 \frac{\alpha}{\lambda} \rho_\nu h^2 \left(\overline{\frac{\partial H}{\partial x}}\right)^2_\nu \\ \frac{crh^2}{\lambda} &= rC \frac{1}{k_t} \end{aligned}\right\} \qquad (19\,a, b)$$

Precizia de rezolvare a problemei prin această metodă este funcție de numărul de cuadripoli care formează circuitul analogic. În [10] se arată, de exemplu, că se obține o precizie suficientă la rezolvarea ecuațiilor cu derivate parțiale liniare, dacă se consideră un număr de cuadripoli mai mare decît cinci.

CONCLUZII

Determinarea soluției problemei încălzirii rotoarelor masive ale mașinii sincrone la porni ea în asincron, se reduce admițînd ipotezele prezentate în lucrare, la problema după o singură direcție.

Rezolvarea ecuației cu derivate parțiale neliniare a cîmpului magnetic din mediu feromagnetic semiinfinit, respectiv a rezistivității electrice locale a mediului feromagnetic este posibilă cu ajutorul circuitelor analogice neliniare formate din cuadripoli, în cazul în care permeabilitatea magnetică este constantă pe un anumit interval.

În schema electrică de cuadripoli intervin condensatoare și rezistențe de parametri funcții de ordinul cuadripolului (respectiv distanța x) și pot fi realizați direct cu ajutorul amplificatoarelor operaționale.

Primit la redacție la 15 noiembrie 1963

BIBLIOGRAFIE

1. PHILIPP KLAUSS SATTLER, *Erwärmung der massiven Polschuhe von Synchronmotoren bei asynchronem Anlauf*. ETZ-A, **83**, *24*, 807 — 810 (1960).
2. A. NICOLAIDE, *Încălzirea rotoarelor masive ale mașinilor sincrone la funcționarea asincronă*. Electrotehnica, **8**, *12*, 409 — 416 (1960).
3. B. M. WEEDY, *Temperature rises in electrical machines*. El. Review, **170**, *18*, 741 — 745 (1962).
4. J. ROBERTS, *Analogue treatement of eddy currents and magnetic flux penetration in saturated iron*. The Procedings of the Inst. of Electrical Engineers, Part C. **109**, *16*, 406 — 411 (1962).
5. W. LEE SHEVEL, *A modified limiting nonlinear Theory of eddycurrent phenomena in solid iron*. Transaction AIEE : Communication and Electronics, *59*, martie, 48 — 55 (1962).
6. N. KESAVAMURTHY, P. K. RAJAGOPALAN, *Theoretical investigation of the eddy current loss in thin feromagnetic plates due to saturation*. Proc. Roy. Society A. Mathematical and Physical Science, **274**, 1357, 187 — 194 (1963).
7. C. BĂLĂ, *Pierderile în rotorul masiv al turboalternatorului la funcționarea în regim asincron*. St. cerc. energ., **X**, *2*, 353 — 367 (1960).
8. I. A. SÎROMIATNIKOV, *Regimurile de funcționare ale generatoarelor sincrone*. GEI, 1952.
9. STANLEY FIFER, *Analogue computation*, Vol. **III**, Mc. Grow-Hill Book Company, New-York, Toronto, London, 1961.
10. V. PASCKIS, *Assurancy of Measurements in Lumped R-C Circuits*. Trans. A.I.E.E., **63** (1944).

REZULTATE OBȚINUTE ÎN R.P.R. PRIVIND CALCULUL REGIMURILOR STAȚIONARE DE FUNCȚIONARE A SISTEMULUI ENERGETIC, CU AJUTORUL CALCULATOARELOR ELECTRONICE NUMERICE

DE

A. PETROIANU, V. ROMERT, B. UNGUREANU și I. ZAMFIRESCU

621.311.1.004.15 : 518.5

Determinarea regimurilor staționare de funcționare este problema cea mai frecvent întîlnită, în cadrul problemelor de proiectare și exploatare a sistemelor energetice, și apare în legătură cu : determinarea condițiilor tehnice de funcționare a rețelei, încadrarea în sistem a unor mari consumatori sau centrale electrice, repartiția optimă a sarcinilor, dezvoltarea de perspectivă a sistemului etc.

Din literatură sînt cunoscute două categorii de metode pentru determinarea regimului staționar de funcționare.

a) Metode iterative ce utilizează matricea admitanțelor (Y);

b) Metode iterative ce utilizează matricea impedanțelor proprii și de transfer (Z).

Datorită ușurinței de obținere și de modificare a matricei Y, o dată cu modificări structurale ale rețelei (configurație, schimbarea prizelor la autotransformatoare etc.), prima grupă de metode a căpătat o largă aplicare.

A doua categorie de metode este mai puțin utilizată deoarece obținerea și modificarea matricei Z este o operație dificilă (necesită inversarea matricei Y). Totuși, ea prezintă unele avantaje prin faptul că permite utilizarea matricei Z și în alte probleme de sistem (probleme de pierderi etc.) și conduce la o reducere de aproximativ 2—3 ori a numărului de iterații în raport cu prima categorie de metode.

Tratarea problemelor regimurilor staționare de funcționare a fost impusă de necesitățile de exploatare și proiectare a sistemului energetic din R.P.R. și ea a constituit o etapă importantă în activitatea de însușire a unor metodologii moderne de calcul și de formare a cadrelor tehnice necesare folosirii calculatoarelor electronice în probleme electroenergetice.

În cele ce urmează se expun pe scurt cele două categorii de metode și unele rezultate obținute cu ajutorul calculatoarelor CIFA.

1. CALCULUL REGIMURILOR STAȚIONARE DE FUNCȚIONARE A SISTEMELOR ENERGETICE UTILIZÎND METODA ITERATIVĂ NODALĂ

Acest capitol prezintă procedeul aplicat de autori[1]) precum și rezultatele obținute pe scheme reale ale sistemului energetic din R.P.R., privind calculul circulațiilor de putere, folosind calculatoarele : CIFA-101, CIFA-3 (50 operații/s). Programul de calcul întocmit se bazează pe *metoda iterativă nodală* ce utilizează matricea Y. Pe plan mondial, eforturile depuse în rezolvarea acestei probleme s-au îndreptat asupra dezvoltării metodelor de calcul, în special a metodei nodale [1], [2], [4], [5], și în direcția dezvoltării metodelor de mărire a vitezei de convergență a procesului iterativ [3], [6].

METODA ITERATIVĂ NODALĂ

Pentru calculul distribuției tensiunilor pe barele sistemului, metoda nodală utilizează teorema I a lui Kirchhoff ($\Sigma I = 0$) pe baza căreia se poate scrie următorul sistem de ecuații neliniare cu cantități complexe

$$\sum_{j=1}^{n} \underline{Y}_{ij} \cdot \underline{U}_j = \frac{\underline{S}_i^*}{\underline{U}_i^*} \; i = 1,\ldots, n, \tag{1}$$

unde : necunoscutele sînt tensiunile U în cele n noduri ale rețelei, Y_{ij} sînt admitanțele liniilor care leagă nodurile i și j iar S_i^* sînt puterile aparente conjugate în nodurile schemei. Termenii diagonali Y_{ii} se formează ca sumă (cu semn schimbat) a admitanțelor ce converg în nodurile respective, ținîndu-se seama de aportul capacitiv al liniilor și de autotransformatoarele de reglaj.

Metoda iterativă nodală permite rezolvarea sistemului de ecuații (1) prin procedeul Seidel-Gauss. Acest procedeu constă în introducerea valorilor calculate pentru tensiunile nodurilor $1,\ldots,(k-1)$, la iterația p, în ecuația nodului k, și anume

$$\underline{U}_k^{(p)} = \frac{\dfrac{\underline{S}_k^*}{\underline{U}_k^{*(p-1)}} - \sum_{i=1}^{k-1} \underline{Y}_{ki} \cdot \underline{U}_i^{(p)} - \sum_{i=k+1}^{n} \underline{Y}_{ki} \cdot \underline{U}_i^{(p-1)}}{-\underline{Y}_{k0} - \underline{Y}_{k1} - \underline{Y}_{k2} - \cdots - \underline{Y}_{kn}} \tag{2}$$

[1]) B. Ungureanu și I. Zamfirescu.

în care, Y_{k0} este o admitanță ce leagă nodul pămînt cu nodul k (capacitatea liniilor, condensatoare sau o admitanță provenită din schema echivalentă a autotransformatoarelor).

Procesul iterativ începe de la un nivel de tensiune apreciat (pe baza cunoașterii aproximative a sistemului), După ce relația (2) a fost aplicată succesiv tuturor nodurilor, se reia calculul începînd cu nodul 2 întrucît în nodul 1 (nod de balansare) tensiunea este menținută constantă.

În scopul măririi vitezei de convergență a procesului iterativ, se utilizează un factor de accelerare ω a cărui valoare este cuprinsă între 1 și 2.

Astfel valoarea tensiunii $\underline{U}_k^{(p)}$ obținută la iterația p, conform relației (2), se va introduce în ecuațiile nodurilor $k+1 \ldots n$, ca $\underline{U}_k^{(p)\prime}$ dat de relația

$$\underline{U}_k^{(p)\prime} = \underline{U}_k^{(p-1)} + \omega \cdot (\underline{U}_k^{(p)} - \underline{U}_k^{(p-1)}).$$

Alegerea judicioasă a factorului de accelerare poate reduce cu peste 50% numărul de iterații în comparație cu situația $\omega = 1$.

Durata de rezolvare a unui sistem de ecuații în vederea determinării tensiunilor trebuie considerată în legătură cu precizia dorită. Calculul este oprit cînd diferența tensiunilor între două iterații succesive ajunge la o eroare admisă (în funcție de tipul problemei). Acestui criteriu îi corespunde acceptarea unei anumite toleranțe la calculul circulațiilor de puteri.

Calculul circulațiilor și pierderilor de puteri în rețea constituie a doua etapă de calcul a regimurilor care însă nu depășesc 5% din timpul total afectat procesului iterativ.

REZULTATE OBȚINUTE CU AJUTORUL MAȘINILOR ELECTRONICE DE CALCUL CIFA

Pentru o serie de studii întocmite de către ISPE privind funcționarea sistemului energetic din R.P.R., s-au calculat, începînd din anul 1962, peste 250 de regimuri staționare pentru scheme buclate cu $10 \div 61$ noduri. Capacitatea mică a memoriei calculatorului de tip CIFA-3 (512 adrese) permite rezolvarea problemei pentru rețelele cu $25 \div 30$ noduri iar cu CIFA—101 (4 096 adrese) este posibilă calcularea unei rețele cu circa $100 \div 150$ noduri.

Munca de pregătire a datelor de intrare constă în: scrierea matricei Y a rețelei, puterile în noduri, tensiunile inițiale estimate, precum și scrierea unei liste — cod care reflectă topologia rețelei de calculat.

Rezultatele se obțin sub formă de tabelă. Pentru schema reprezentată în figura 1 sînt prezentate mai jos valorile tensiunilor, calculate după 18 iterații, circulațiile de putere pe linii (cu denumirea nodurilor) precum și pierderilor totale de putere în rețea.

Valoarea tensiunilor după 18 iteraţii ($kV.10^{-3}$):

·12100 ·00000 ·12090 ·00475 ·10653 — 01266 ·11161 — 01589 ·10009 — 01758
·11386 — 00257 ·11612 — 00305 ·11895 — 00093 ·11468 — 01021 ·10515 — 01628

Circulaţiile şi pierderile de putere în reţea ($MVA \cdot 10^{-4}$):

·01·02 ·0113537 ·0049521 ·01·06·0007236·0003915 ·01·08·0062284·0001368
·01·09 ·0037254 ·0009048 ·0220314·0063856
·02·01 — 0105142 — 0031714 ·02·03—0000297—0023070 ·0105440·0054785

·10·03·0121861·0043264 ·10·09·0067889·0015555 ·0189750·0058820

Pierderile totale de putere ($MVA.10^{-4}$):
·0034022 ·0093838

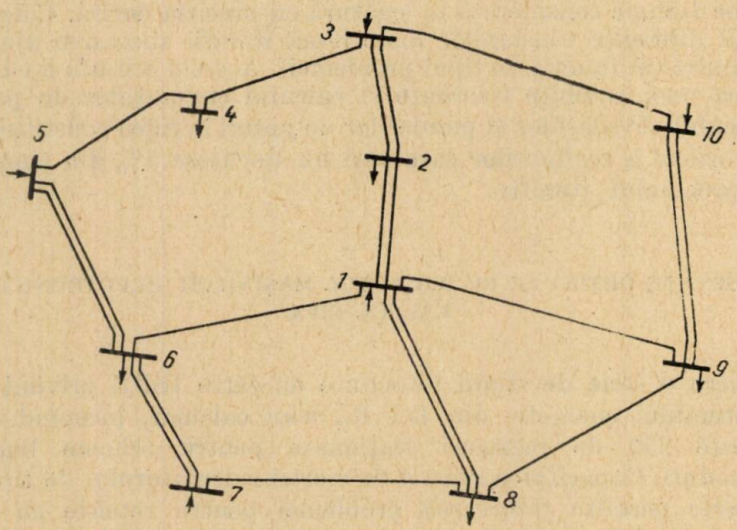


Fig. 1. — Schema electrică a reţelei cu 10 noduri.

CARACTERISTICI PRINCIPALE ALE PROGRAMELOR

Programele întocmite de autori sînt generale şi nu necesită un efort special pentru pregătirea datelor de intrare. Lista-cod se scrie mecanic prin simpla vizionare a schemei reţelei sau a matricei Y.

Spre exemplu, în cazul rețelei din figura 1, partea de listă care se referă la nodurile 2 și 3, înscrisă în memoria mașinii de la adresa a_1, este :

nodul 2 :

a_1	: 00 — U_1	
a_2	: 00 — U_2	
a_3	: 10 — U_3	00 — Y_{22}

nodul 3 :

a_4	: 00 — U_2	
a_5	: 00 — U_3	
a_6	: 00 — U_4	
a_7	: 10 — U_{10}	00 — Y_{33}

în care : $U_1, U_2, \ldots Y_{22}, Y_{33}$ sînt adresele din memorie ce conțin mărimile respective. Această listă servește la calculul termenilor diagonali ai matricei Y, la calculul tensiunilor nodurilor în timpul procesului iterativ precum și la calculul automat al circulațiilor de putere și pierderilor de putere în schema dată.

Din punctul de vedere al mărimilor ce caracterizează un nod (P, Q, U, δ) programul urmărește cele două tipuri întîlnite frecvent : noduri

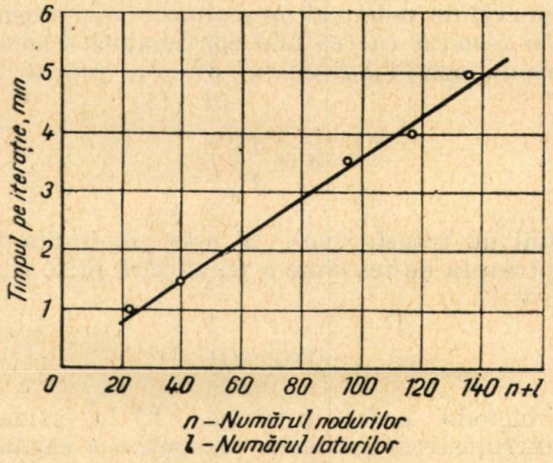


Fig. 2. — Timpul pe iterație la calculul tensiunilor nodurilor.

de sarcină (P și Q mărimi impuse) și noduri de generator (P și U mărimi impuse).

Pentru calculatorul CIFA-101 programul propriu-zis privind determinarea tensiunilor, circulațiilor de putere, pierderilor și puterilor în noduri, ocupă numai 300 adrese din memorie, iar timpii de calcul realizați pe iterație pentru diferite rețele, pot fi urmăriți în diagrama din figura 2. Întrucît CIFA-101 permite realizarea unei „programări optime", prin modificarea programelor existente, se va reduce timpul de calcul la jumătate.

CONSIDERAŢII ASUPRA CONVERGENŢEI PROCESULUI ITERATIV

În privinţa valorii optime a coeficientului de accelerare ω, literatura de specialitate recomandă $\omega = 1{,}4 + 1{,}6$. De asemenea, se menţionează că alegerea unui nod central cu legături multiple ca „nod de balansare" contribuie substanţial la reducerea numărului de iteraţii [3].

Din experienţa cîştigată de autori, în această problemă, a rezultat că la reţele cu acelaşi număr de noduri (n) viteza de convergenţă este direct proporţională cu numărul laturilor (l). Dacă în procesul iterativ se porneşte cu tensiuni egale în toate nodurile, cu un factor de accelerare convenabil, numărul de iteraţii, pentru a realiza o precizie de 0,5% la puterile injectate în schema buclată este cel puţin egal cu numărul nodurilor. Aceasta corespunde la o toleranţă de 0,002% la tensiuni. În figura 3 se poate urmări viteza de convergenţă realizată în cazul schemei cu 10 noduri (fig. 1).

INTRODUCEREA ÎN SCHEMĂ A AUTOTRANSFORMATOARELOR

Atît din punctul de vedere al programării cît şi a uşurinţei de schimbare a prizelor, a rezultat că cea mai convenabilă schemă, pentru autotransformatoarele de reglaj longitudinal, este cea reprezentată în figura 4 în care

$$a = \frac{U_1}{U_2}$$

este raportul de transformare, Y este admitanţa între nodurile 1 şi 2 calculată la treapta de tensiune a părţii fără prize a autotransformatorului.

CONCLUZII

Utilizarea metodei nodale (matricea Y) în calculul regimurilor staţionare de funcţionare a sistemelor energetice a căpătat o largă aplicare datorită următoarelor avantaje esenţiale:

— în comparaţie cu matricea inversă Z care are toate elementele diferite de zero, matricea Y are $90 \div 95\%$ din ele, nule şi deci foarte puţine date de intrare în calculator;

— topologia sistemului poate fi schimbată foarte uşor ca şi modificările prizelor la autotransformatoarele de reglaj;

— datele iniţiale sînt uşor de întocmit şi nu cer o prelucrare anterioară laborioasă.

Cu toate că maşinile electronice cifrice mici nu sînt adecvate [2] pentru întocmirea calculelor de regimuri staţionare de funcţionare a sistemului energetic, calculatoarele CIFA au permis realizarea unui progres important în formarea tehnică a personalului ingineresc precum şi

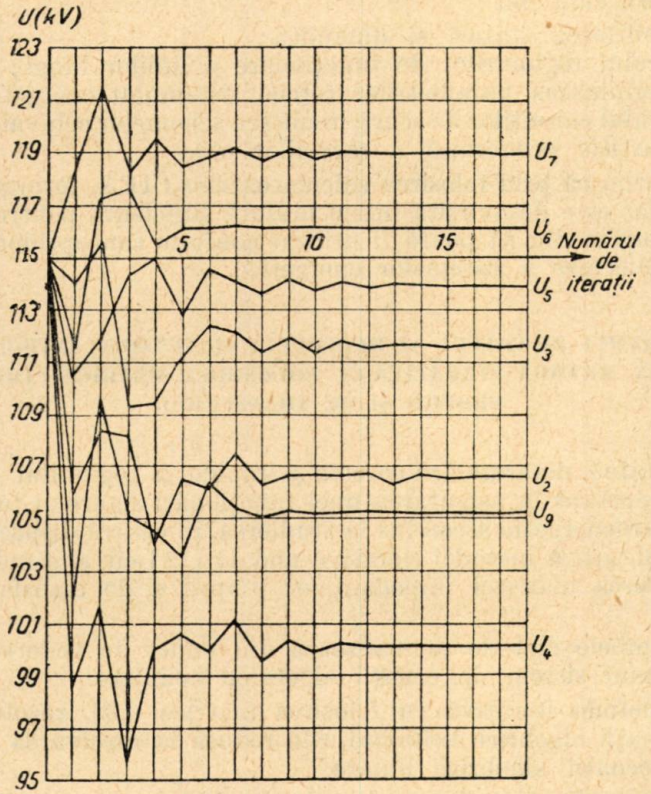


Fig. 3. — Variația părții reale a tensiunilor nodurilor în timpul procesului iterativ ($U_{inițial} = 115 + j\,0$kV în toate nodurile; factorul de accelerare $\omega = 1{,}6$; $U_1 = 121 + j\,0$kV).

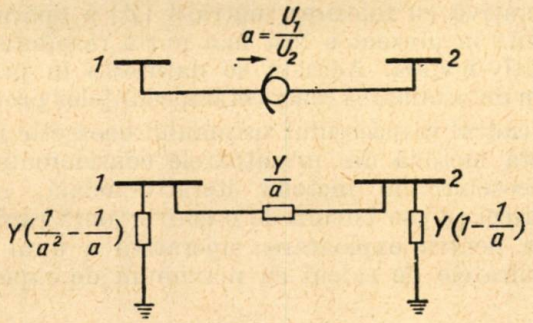


Fig. 4. — Schema echivalentă de reprezentare a unui autotransformator.

introducerea noilor metode de studiu într-o serie de alte probleme importante [7,8,10], cum sînt :

— stabilitatea statică și dinamică ;
— calculul regimurilor de funcționare a liniilor lungi ;
— determinarea parametrilor rețelei sistemului energetic ;
— calculul curenților de scurtcircuit și a schemelor echivalente (REI) ;
— repartiția economică a sarcinilor etc.

Se poate afirma că prin folosirea calculatoarelor CIFA, formarea cadrelor și programelor este desăvîrșită într-o măsură suficientă pentru ca un calculator modern mediu să poată fi utilizat conform concepțiilor actuale de studiu și proiectare a sistemelor energetice.

2. ALGORITMUL DE CALCUL AL REGIMULUI DE TENSIUNI ÎNTR-O REȚEA BUCLATĂ PRIN METODA ITERATIVĂ CU FOLOSIREA MATRICEI IMPEDANȚELOR PROPRII ȘI DE TRANSFER [2])

Necesitatea determinării corecte și rapide a regimului de tensiuni ca factor important în asigurarea unei funcționări sigure și tehnice a sistemului electroenergetic a condus la studierea, în cadrul dispecerului energetic național, atît a metodei iterative nodale [11] cît și a metodei iterative cu folosirea matricei impedanțelor proprii și de transfer (matricea $[Z]$) [12].

Prin ambele metode se realizează din punct de vedere matematic rezolvarea unui sistem de ecuații algebrice neliniare.

Prin metoda iterativă cu folosirea matricei $[Z]$, rezolvarea sistemului de ecuații algebrice neliniare este redusă la rezolvarea unui șir de sisteme de ecuații algebrice liniare.

Rezolvarea fiecărui sistem de ecuații algebrice liniare din acest șir se face într-un mod direct și nedeterminat folosind matricea impedanțelor proprii și de transfer (matricea $[Z]$). Această matrice reprezintă inversa matricei sistemului de ecuații pe care trebuie să-l rezolvăm [13].

Metoda iterativă cu folosirea matricei $[Z]$ a apărut relativ mai de mult [14] dar pînă în prezent a fost mai puțin răspîndită, în comparație cu metoda iterativ-nodală. Aceasta se datorește în principal, greutății ce se întîmpină în determinarea matricei impedanțelor proprii și de transfer.

Totuși, în cadrul dispecerului sistemului energetic național ne preocupăm de această metodă din următoarele considerente [3]) :

1. Spre deosebire de metoda iterativ-nodală, metoda iterativă cu folosirea matricei $[Z]$ se bucură de o convergență rapidă.

Necesitatea pentru exploatarea operativă a unui sistem energetic de a obține rezultatele de calcul cu maximum de rapiditate impun ca,

---

[2]) Autorii acestui capitol sînt A. Petroianu și V. Romert.

[3]) În timp ce se lucra la corectura acestui material am cunoscut articolul lui Brown. Pwr. Appar. Syst. 1963, nr. 65 din care rezultă interesul crescînd de care se bucură din nou această metodă și peste hotare.

în condițiile existenței unor calculatoare de viteză mică cum sînt cele de la noi în țară să ne îndreptăm atenția asupra acelor metode care cer un număr cît mai mic de operații.

2. În exploatarea normală schema de funcționare a rețelei (topologia sa) rămîne constantă vreme relativ îndelungată, spre deosebire de regimurile de funcționare care se schimbă des.

În aceste condiții calculul a numeroase regimuri cu ajutorul aceleiași matrice a impedanțelor proprii și de transfer (care se poate pregăti din vreme) nu mai ridică probleme deosebite.

În lucrarea de față se tratează metoda interativă cu folosirea matricei $[Z]$ sub două variante:

a) cu un singur ciclu iterativ — considerîndu-se că în toate nodurile condițiile la frontieră sînt de tip hiperbolic: $\underline{S} = \underline{U}\underline{I}^{*} = \text{const.}$

Sub acest aspect materialul se prezintă ca o continuare a lucrării lui M. Bennet [14];

b) cu dublu ciclu iterativ considerîndu-se nodurile diferențiate pe două tipuri și anume:

— noduri de tip receptor cu condițiile la frontiera de tip hiperbolic ($\underline{S} = \underline{U}\underline{I}^{*} = \text{const.}$);

— noduri de tip generator cu condițiile la frontieră de tipul: $P = \text{const.}$; $|\underline{U}| = \text{const.}$

Sub acest aspect materialul pune aceeași problemă ca în lucrarea lui W. Hale și W. Goodrich [15].

Spre deosebire însă de Hale și Goodrich care în afara unor submatrici provenite din matricele admitanță $[Y]$ și impedanțelor proprii și de transfer $[Z]$ introduc și submatrici de transfer curent/curent și tensiune/tensiune în lucrarea de față același rezultat se obține folosind numai o parte din matricile $[Y]$ și $[Z]$.

2.1 **Metoda iterativă cu folosirea matricei $[Z]$ și cu un singur ciclu.** În figura 5 se prezintă schema logică corespunzătoare metodei cu un singur ciclu, procesul de calcul desfășurîndu-se astfel:

Pe baza tensiunilor în noduri obținute din cea de-a k iterație, cu ajutorul relației

$$f_1(\underline{U}_i^{(k)}, P_i, Q_i) = \underline{I}_i^{(k+1)}, \tag{3}$$

se determină curenți nodali ce vor interveni în iterația următoare $(k+1)$.

Acești curenți formează vectorul $I^{(k+1)}$ cu care înmulțind matricea impedanțelor proprii și de transfer conform relației matriciale

$$[\underline{Y}]^{-1} \cdot \underline{I}^{(k+1)} = [\underline{Z}] \cdot \underline{I}^{(k+1)} = \Delta\underline{U}^{(k)}. \tag{4}$$

obținem vectorul diferențelor de potențial între fiecare nod și nodul de referință $(\Delta\underline{U}^{(k)})$.

Prin adunarea tensiunii nodului de referință față de pămînt, se obține tensiunea fiecărui nod în parte.

Ciclul de calcul se repetă pînă ce se observă că tensiunile obținute în două iterații succesive sînt suficient de apropiate ($\pm 5.10^{-5} \div 5.10^{-7}$kV).

Metoda de calcul cu un singur ciclu este foarte simplă și după cum a reieșit din calculele efectuate, rapid convergentă.

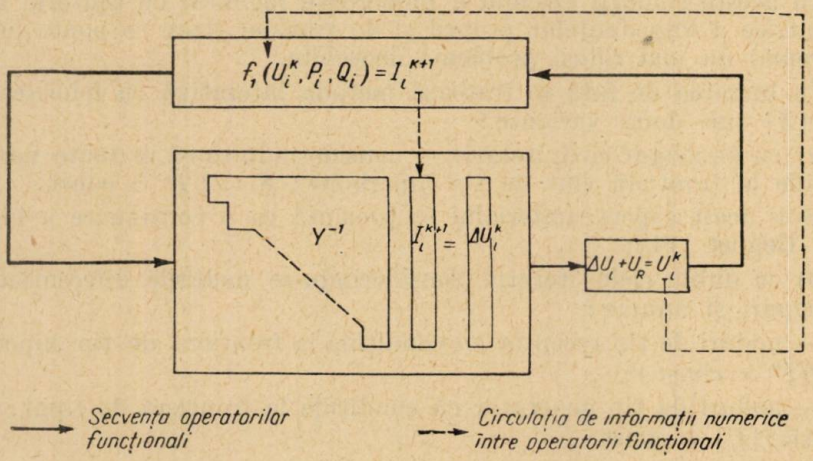


Fig. 5. — Schema logică corespunzătoare metodei iterativ-matriciale cu un singur ciclu.

2.2 **Metoda iterativă cu folosirea matricei [Z] și cu dublu ciclu.** Metoda cu un singur ciclu permite modelarea matematică cu suficientă aproximație a condițiilor fizice la frontieră pentru nodurile tip consumator (P, Q impus).

Pentru nodurile tip generator (P, $|\underline{U}|$ impus) modelul matematic realizat prin relația (3) este necorespunzător.

Metoda cu dublu ciclu, folosind ecuații de tip mixt (atît în $[Y]$ cît și în $[Z]$) permite considerarea simultană a ambelor tipuri de noduri.

Procesul de calcul, conform schemei logice (fig. 6) se desfășoară astfel:

Pentru cele i noduri (numerotate de la *1* la i) de tip consumator, în care necunoscutele sînt potențialele față de nodul de referință, acestea (ΔU_i) se obțin din relația (4) în care însă matricea $[\underline{Y}]^{-1} = [Z]$ are numai i rînduri.

Pentru cele j noduri (numerotate de la $i+1$ la n) de tip generator, în care necunoscutele sînt curenții în noduri, aceștia (I_j) se obțin din relația

$$[\underline{Y}] \cdot \Delta \underline{U} = \underline{I}_j, \tag{5}$$

în care matricea $[\underline{Y}]$ are numai j rînduri. Relația (3) modelează matematic condițiile la frontiera celor i noduri de tip consumator.

Relația (6) modelează matematic condițiile la frontiera celor j noduri de tip generator

$$f_2(|\underline{U}_j|,\ P_j,\ I_j) = \underline{U}_j. \tag{6}$$

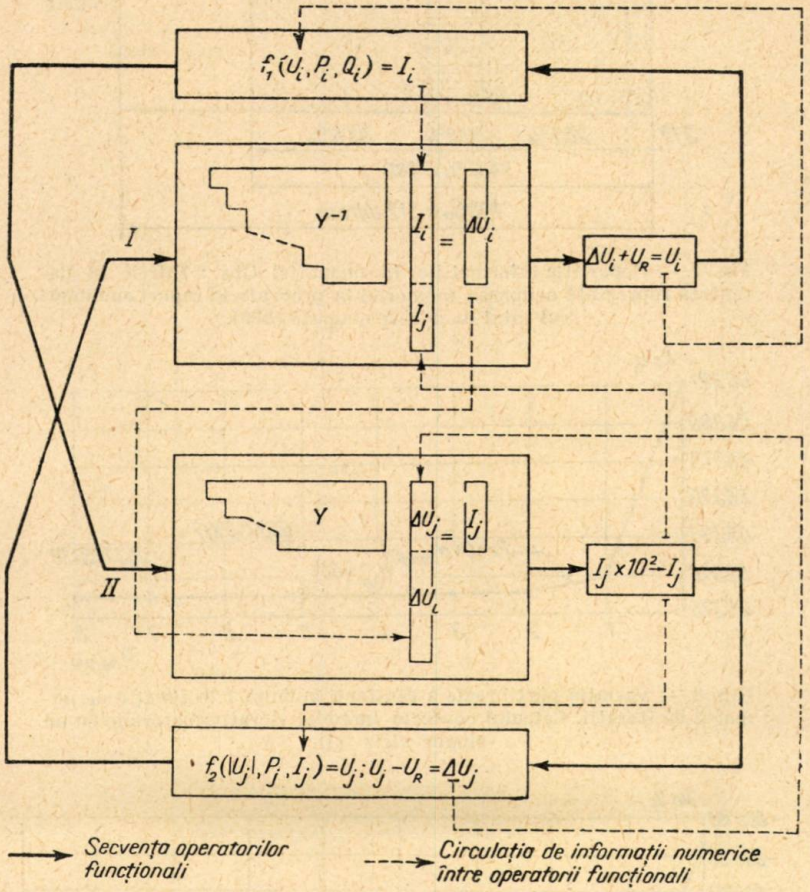


Fig. 6. — Schema logică corespunzătoare metodei iterativ-matriciale cu dublu ciclu.

Din relația (3) se completează i componente ale vectorului I. Restul de j componente se obțin prin înmulțirea matricială conform relației (5).

Se efectuează înmulțirea matricială conform relației (4) din care vor rezulta i componente ale vectorului ΔU. Se determină tensiunile în i noduri (analog schemei logice din paragraful precedent) și curenții nodali în aceste noduri (3).

Se efectuează înmulțirea matricială conform relației (5) din care vor rezulta j componente ale vectorului I.

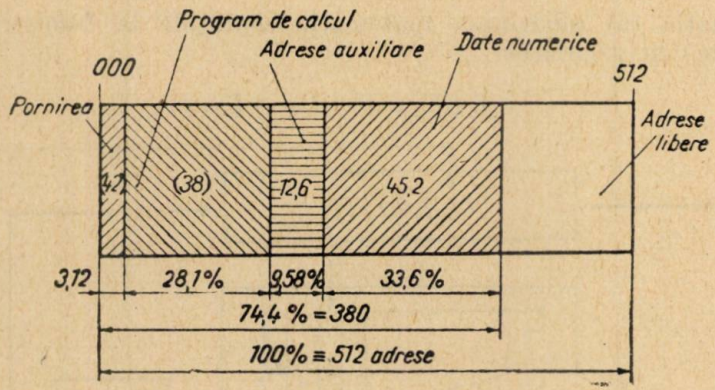


Fig. 7. — Repartiția informațiilor în memorie. Obs.: Cifrele în paranteză reprezintă ocuparea memoriei în procente în raport cu numărul total de adrese ocupate (380).

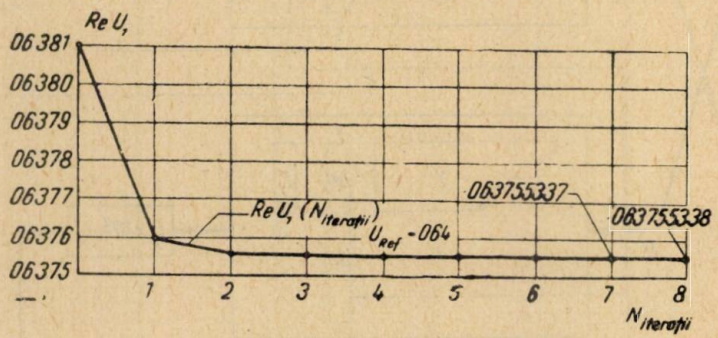


Fig. 8. — Variația părții reale a tensiunii nodului 1 în funcție de numărul de iterații. Calculul conform metodei iterativ-materiale cu un singur ciclu (I).

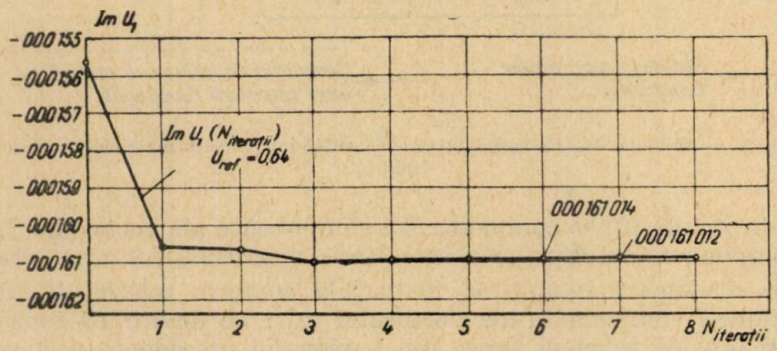


Fig. 9. — Variația părții imaginare a tensiunii nodului 1 în funcție de numărul de iterații. Calculul conform metodei iterativ-matriciale cu un singur ciclu (I) (se consideră numai nodurile de tip consumator). Tensiunea de referință apropiată de tensiunea reală a nodului de referință $U_{Ref} = 064$.

Cu ajutorul relației (6) se completează restul de j componente ale vectorului ΔU după care se continuă procesul iterativ conform relației (4).

Din cele de mai sus reiese că procesul de calcul se desfășoară pe două cicluri distincte :

— Ciclul I în care se determină i componente ale vectorului ΔU (4).

— Ciclul II în care se determină j componente ale vectorului I(5).

Restul de j componente ale vectorului ΔU se determină din condițiile de frontieră ale nodurilor de tip generator (6).

Restul de i componente ale vectorului I se determină din condițiile de frontieră ale nodurilor de tip consumator (3).

2.3 **Rezultatele obținute.** În cazul calculatorului CIFA-3 (memorie cu 512 adrese) prin metoda iterativă cu folosirea matricei $[Z]$ pot fi rezolvate rețele pînă la 14 noduri.

În cazul calculatorului CIFA-101 (memorie cu 4 096 adrese) se pot rezolva rețele de ordinul 50 noduri.

Pentru o rețea cu 10 noduri (fig. 7) este indicată repartiția informațiilor în memoria calculatorului.

În cazul rețelelor studiate calculul conform metodei cu un singur ciclu este rapid convergentă atît pentru partea reală cît și pentru partea imaginară a tensiunii (fig. 8, 9).

Pentru aceleași rețele calculul conform metodei cu dublu ciclu nu era totdeauna convergent.

Pentru asigurarea convergenței a fost necesară limitarea domeniului de variație a curenților nodurilor generatoare (fig. 10).

Precizia mare a calculelor (nouă cifre semnificative care permit considerarea tensiunii în noduri pînă la miimi dintr-un volt) a fost

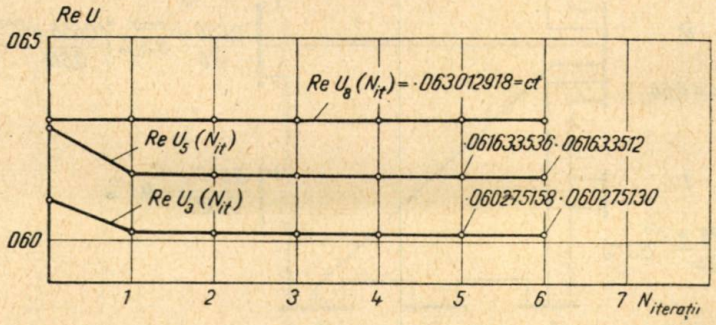


Fig. 10. — Variația părții reale a tensiunii a nodurilor „3", „5", „8" în funcție de numărul de iterații. Calculul conform metodei iterativ-matriciale cu dublu ciclu și limitări impuse. $U_{Ref} = 064$.

obținută prin alegerea ca nod de referință nu a neutrului rețelei ci a unui nod al sistemului.

Aceasta pe lîngă o reducere a ordinului sistemului de ecuații a permis operarea nu cu tensiuni (numere de ordinul sutelor de mii volți) ci cu diferențele de tensiuni dintre noduri (numere de ordinul miilor de volți) ceea ce mărește precizia calculelor [16].

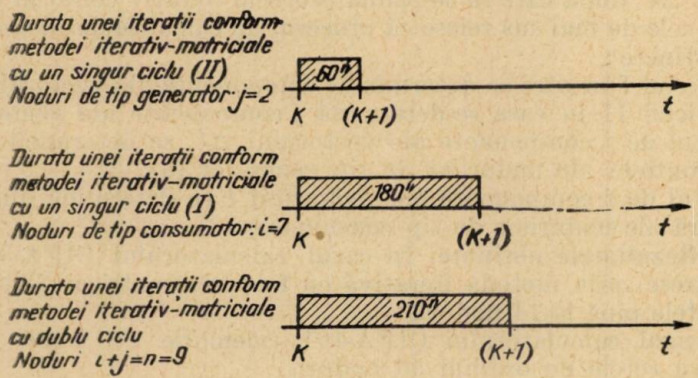


Fig. 11. — Durata comparativă a procesului de calcul.

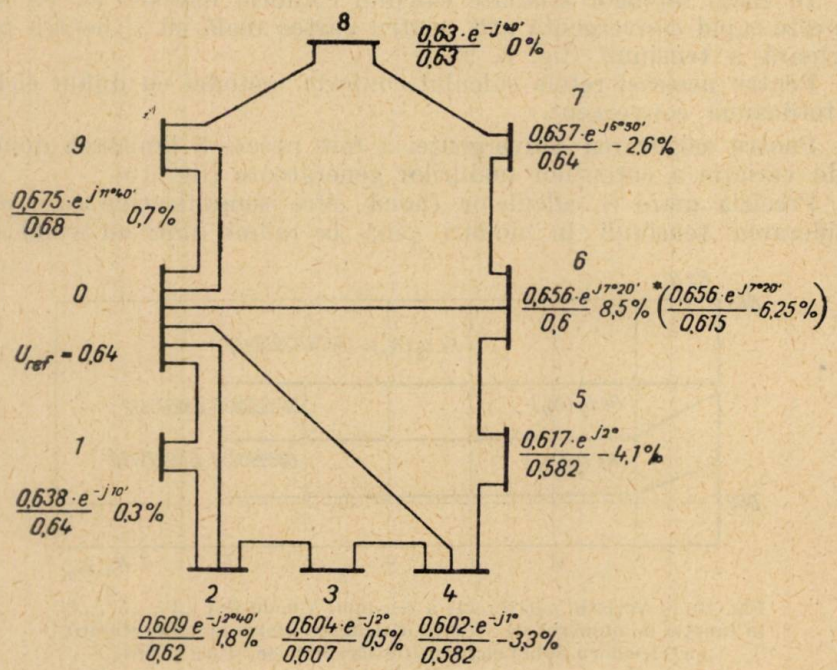


Fig. 12. — Compararea rezultatelor de calcul cu cele obținute din măsurători $\frac{U_{\text{calcul}}}{U_{\text{rețea}}}\varepsilon\%$.

* La verificarea aparatului s-a constatat o eroare sistematică de 2 kV. În paranteză sînt rezultatele, ținînd seama de corecția introdusă asupra aparatului.

După cum se observă din figurile 8, 9, 10 după 5—6 iterații convergența tensiunilor se asigură cu o precizie de ordinul 10^{-6} în timp ce în literatură se arată că pentru a se asigura precizia balanței de puteri de ordinul $\pm$ (0,05 — 0,1)% este necesar să se asigure convergența tensiunilor cu o precizie de ordinul $\pm (5.10^{-5}) - 5.10^{-7}$ [17].

În timp ce manual calculul unei rețele de 10 noduri, de către un inginer durează de ordinul 12—16 ore (pentru o singură iterație), aceeași problemă pe calculator a fost rezolvată în numai 20 minute.

Durata unei iterații este dată în figura 11. Pentru etalonarea calculului a fost făcută o verificare cu un regim real de exploatare abaterile dintre rezultatele calculului și tensiunile măsurate fiind sub 5% (fig. 12).

2.4. **Concluzii.** Programul de calcul alcătuit este general, economic în folosirea memoriei și permite calculul cu noduri atît de tip receptor cît și generator.

Experimentarea programului pentru rețele puternic buclate și regimuri satisfăcătoare din punctul de vedere al regimului de tensiuni a dovedit o convergență rapidă și verificarea satisfăcătoare a rezultatelor de calcul cu cele măsurate în rețea.

În viitor, se impun a fi studiate următoarele probleme :

— introducerea condițiilor corespunzătoare nodurilor cu autotransformatoare ;

— introducerea caracteristicilor centralelor pentru a ține seama de limitările curenților statorici și rotorici ;

— metode rapide de determinare a matricei $[Z]$ și de modificare a acesteia pentru modificări ale configurației rețelei ;

— condițiile de convergență a metodei în special pentru regimuri caracterizate prin nivele scăzute de tensiune și deficit de putere reactivă cînd regimuri real existente în rețea rezolvate pe calculator nu sînt convergente [18].

BIBLIOGRAFIE

1. J. B. WARD, H. W. HALE, *Digital Computer Solution of Power-Flow Problems.* Transactions of AIEE, III, 398 — 404 (1956).
2. A. F. GLIMN, G. W. STAGG, *Automatic Calculation of Load Flows.* Idem (octombrie), 817 — 828 (1957).
3. R. VAN MELE, *Méthode utilisée en Belgique pour l'étude des réseaux électriques au moyen d'un calculateur numérique.* Raport CIGRE-*316* (1962).
4. R. J. BROWN, W. F. TINNEY, *Digital Solutions for Large Power.* Transactions of AIEE, III (iunie), 347 — 351 (1957).
5. M. J. CARTERON, *Calcul aritmétique des réseaux mailles et de leurs pertes.* Bull. SFE, iunie, 465 — 473 (1956).
6. Н. А. КАЧАНОВА, В. В. УМЕДИАН, *Ускорение сходимости итерационного процесса решения задачи электрического расчета установившегося режима сложных энергосистем.* Вопросы применения вычислительной техники в энергетических системах, Киев, 1962, 45 — 53.
7. P. DIMO, G. MORAITE, S. HÜCKERT, *Calculul exact al curenților de scurtcircuit cu determinarea simultană a schemelor REI, a imaginilor nodale și a admitanțelor de transfer.* Energetica, *9* (1963).
8. P. DIMO, *Formula pierderilor și optimizarea schemelor și regimurilor pe un drum nou : Aplicarea analizei „nodale".* Energetica, *6* (1962).

9. M. BOGAN, B. UNGUREANU, *Utilizarea maşinilor electronice de calcul CIFA la studiul sistemelor energetice*. MMEE — Informaţii documentare, **III**, 5 — 69 (1961).
10. M. BOGAN, P. IANCOVICI, B. UNGUREANU, *Rezultate obţinute cu calculatoarele numerice CIFA la studiul stabilităţii dinamice în sistemul energetic al R.P.R.* Energetica, *7* (1963).
11. A. PETROIANU, *Câteva probleme de calcul numeric ce apar în cazul determinării regimurilor de funcţionare ale reţelelor buclate cu ajutorul maşinilor electronice cifrice*. Energetica, **10**, *9* (1962).
12. — *Determinarea circulaţiilor de putere într-o reţea buclată cu ajutorul calculului matricial*. Energetica, **8**, *8* (1960).
13. — *Compararea metodei transfigurării şi a metodei matriciale pentru calcularea reţelelor electrice buclate*. Energetica, **8**, *7* (1960).
14. M. BENNETT, *Digital computers and the load — flow problem*. Proc. I.E.E. part. B Supl. *1* (1956).
15. W. HALE, M. GOODRICH, *Digital Computation of Power Flow. Some New Aspects*. Pwr. App. Sist. *44* (1959).
16. З. Б. ГОЛЕМБО, А. Л. БРУДНО, М. М. ВЛАДИМИРОВА, *Расчет взаимных и собственных сопротивлений сложных электрических цепей при помощи цифровых машин*. Цифровая техника, Вычислительные устройства, ред. 1. С. Брук. Ак. наук СССР (1959).
17. Л. В. ЦУКЕРНИК, *О методе балансирующих узлов для расчета режимов энергосистем*. Вопросы применения вычислительной техники в энергосистемах. Ак. наук УССР, Киев, 1962.
18. *** CIGRÉ Rap. 309 (1962).

ANALIZA FENOMENULUI DE DECONECTARE A UNEI LINII ÎN GOL CU UN ÎNTRERUPTOR CU ULEI PUȚIN

DE

I. ADĂMUȚ

621.315.1.064.221.621.316.57.064.25

Supratensiunile interne ce apar la declanșarea liniilor în gol constituie pentru instalațiile electroenergetice de înaltă și foarte înaltă tensiune unul din criteriile de bază ce se iau în considerație la stabilirea nivelului de protecție [1] și a nivelului de izolație [2], [3].

În Institutul de energetică al Academiei R.P.R., s-au început din anul 1961 cercetări în acest domeniu în scopul elaborării unor scheme de măsură a supratensiunilor în sistemul electroenergetic național [4], [5], precum și a unor aspecte analitice [8]. Pe baza acestei metodologii, s-au efectuat în anul 1962 încercări pe viu în sistem pe o linie de transport de 110 kV în colaborare cu alte institute de cercetări și întreprinderi de exploatare sau constructoare de aparataj electrotehnic.

1. EXPERIMENTĂRI. REZULTATE

Experiențele s-au efectuat pe o linie de 110 kV cu circuit dublu între două stații de transformare A și B având lungimea simplă de 70 km (fig. 1), în care :

A = stația de transformare de alimentare a liniei și de efectuare a încercărilor și a măsurătorilor ;

B = stația de transformare terminus pentru lungimea simplă (70 km) și de conexiune pentru lungimea dublă a liniei (140 km) ;

I = întreruptorul cu ulei puțin IUP-110 folosit la deconectări ;

$l_1\, l_2$ = liniile cu care s-au efectuat experimentările, lungime simplă de 70 km ;

C_L = capacitatea liniilor încercate;
T_t = transformator de tensiune;
C_b = capacitatea barelor stației A;
P_s, L_s = puterea și inductanța sistemului energetic în amonte de locul experimentărilor.

S-au efectuat probe de declanșare a liniilor în gol de lungime simplă 70 km și lungime dublă 140 km cu și fără transformator de tensiune la capătul, respectiv la mijlocul liniei încercate.

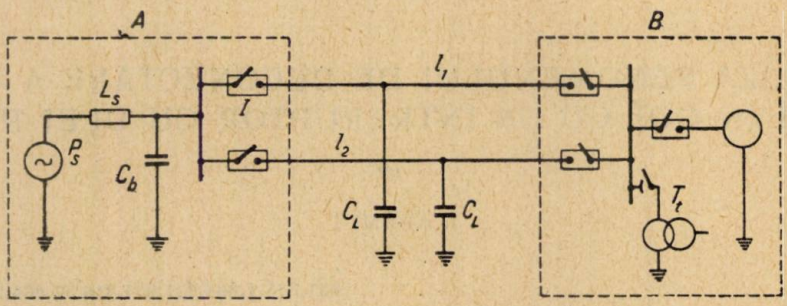


Fig. 1. — Schema de principiu a încercărilor experimentale de declanșare a liniei în gol.

Încercările și rezultatele lor experimentale sînt prezentate detaliat în lucrările [6], [7], [8].

Valorile medii și maxime ale factorilor de supratensiune rezultate din prelucrarea oscilogramelor obținute la încercări sînt în general mai mici decît valorile indicate în literatură.

Influența numărului și durata ciclurilor de reaprindere asupra valorii supratensiunilor interne, menționată în literatura tehnică [9], s-a observat și la aceste încercări. Aceste reaprinderi sînt funcție de relația existentă între viteza de creștere a rigidității dielectrice în spațiul de stingere și izolare a întreruptorului și viteza de creștere a tensiunii de restabilire între contactele lui [10], [11], [12], [13]. Relația de dependență este la rîndul ei funcție, pe de o parte de caracteristicile mecanice și electrice ale întreruptorului (mediul și modul de stingere, viteza de deplasare a contactelor mobile etc. [14], [15], [16]) și de caracteristicile sistemului în amonte și în aval de întreruptor [17], [18], [19]. În special, panta tensiunii de revenire (de restabilire) între contactele întreruptorului este funcție de caracteristicile circuitelor care alimentează linia deconectată de întreruptor [20].

Pentru întreruptoarele cu ulei puțin, o importanță deosebită asupra fenomenului tranzitoriu ce se desfășoară normal sub forma unei oscilații amortizate ce cauzează supratensiunea, o are caracteristica circuitului considerat; întreruptorul o influențează numai prin faptul că el fixează momentul reaprinderii și al stingerii curentului tranzitoriu [21].

În scopul stabilirii influenței circuitului deconectat și a momentului deconectării asupra fenomenului deconectării și deci și asupra factorului de

Tabelă

Analiza duratei diverselor faze ale deconectării, a factorilor de supratensiune și a supracurenților

Nr. crt.	Linia	Tipul mărimilor	Număr cicluri stingere reaprindere	Număr stingeri cu durata $t < T/4$	Număr stingeri cu durata $t \geqslant T/4$	Durate totale pe o oscilogramă în ms								Durata în % din cursa totală		Durate în % din cursă liberă		D sting.	Durate singulare minime în ms		Durate singulare maxime		Durate singulare medii pentru o oscilogramă în ms					Factori de supratensiune 4)			Curent de deschidere în amperi	Observații
						Faza 2—a arc	Prima stingere	Total stingeri cu $t < T/4$	Total stingeri cu $t \geqslant T/4$	Total stingeri	Total reaprinderi	Faza 3. Total stingeri și reaprinderi	Fazele 2+ +3 Arc+ stingeri +reaprinderi	Stingeri+ reaprinderi	Arc + stingeri+ reaprinderi	Stingeri+ reaprinderi	Arc + stingeri+ reaprinderi	D reaprin.	Stingeri	Reaprinderi	Stingeri	Reaprinderi	Stingeri $t < T/4$	Stingeri $t \geqslant T/4$	Total stingeri	Reaprinderi	Stingeri + reaprinderi	Pe bare	Pe linie			
						ms	ms	ms	ms	ms	ms	ms	ms	%	%	%	%		ms	ms	ms	ms	ms	ms	ms	ms	ms	k_1	k_2	k_3		
1		min	3	2	1	7	1,5	4,5	5	11	3	16	31	10,6	20,7	12,8	24,8	1,13	0,8	1	5	1	1,57	5,0	2,9	1,0	4,0	1,0	1,0	—	48	1) 16 oscilograme
2	70 km	max	8	5	3	21	4	13	28,5	38,5	18,5	50,5	70	33,6	46,6	40,3	56	4,3	3	1,5	12	7	3,25	11	6,7							2) 13 oscilograme
3	1)	med	5,25	3,25	2	14,7 3)	3,1	8,3	15,5	23,5	10,7	33,8	47,1 3)	24,9	31,1 3)	27	36,7 3)	3,23	1,6	1,06	8,86	3,69	2,53	7,28	4,46	3,7	8,0	1,63	2,53	—	314	3) 15 oscilograme
4		min	2	1	0	7	1	4	0	5	4	9,5	18,5	6,3	14	7,6	14,8	0,63	0,5	1	3	2	1,67	0	1,67	1,9	6,37	1,15	1,38	—	178	4) S-au folosit 21 oscilograme la 140 km și 24 oscilograme la 70 km
5	140																									1,3	4,3	1,0	1,0	1,0	60	
	km	max	4	4	2	16	4	11	13,5	23	11	34	46	18,6	30,7	27,2	36,8	3,16	4	3	12	4	4,0	12	7,0	3,5	11	1,63	2,25	3,06	365	
6	2)	med	3	2,54	0,46	9,8	3,54	8,23	4,42	12,66	7,7	19,7	29,5	13,1	19,8	15,8	23,6	1,85	2,7	1,85	6,38	2,92	3,35	3,9	4,29	2,43	6,73	1,27	1,36	1,53	158	

supratensiune s-a analizat un număr mare din oscilogramele experiențelor citate. Rezultatele acestei analize sînt prezentate și discutate în cele ce urmează.

2. FAZELE FENOMENULUI DE DECONECTARE ALE UNUI ÎNTRERUPTOR CU ULEI PUȚIN CU REAPRINDERI, LA DECLANȘAREA UNEI LINII ÎN GOL

După lucrarea [20], „timpul de funcționare a întreruptoarelor la deconectare se subîmparte în felul următor:

— timpul de declanșare a declanșatoarelor și al releelor de la apariția supracurentului sau de la executarea comenzii de deconectare și pînă la liberarea zăvorîrii întreruptorului;

— timpul propriu al întreruptorului, de la liberarea zăvorîrii și pînă la separarea contactelor;

— durata arcului pînă la stingerea lui.

Pentru întreruptoarele moderne, timpul de la darea comenzii de deschidere și pînă la ruperea arcului este cel mult 10 perioade".

În lucrare se analizează numai fazele a 2-a și a 3-a, din momentul dezăvorîrii întreruptorului și pînă la restabilirea rigidității dielectrice normale a spațiului disruptiv, izolant, aplicate la întreruptorul folosit la experimentări.

Cursa totală a acestui întreruptor este de 56 cm, cursa liberă în afara contactelor fixe, fiind de 46 cm. Deplasarea contactelor mobile se efectuează ca o mișcare complexă: uniform accelerată la început, uniformă și uniform întîrziată la sfîrșitul cursei. Durata totală a cursei

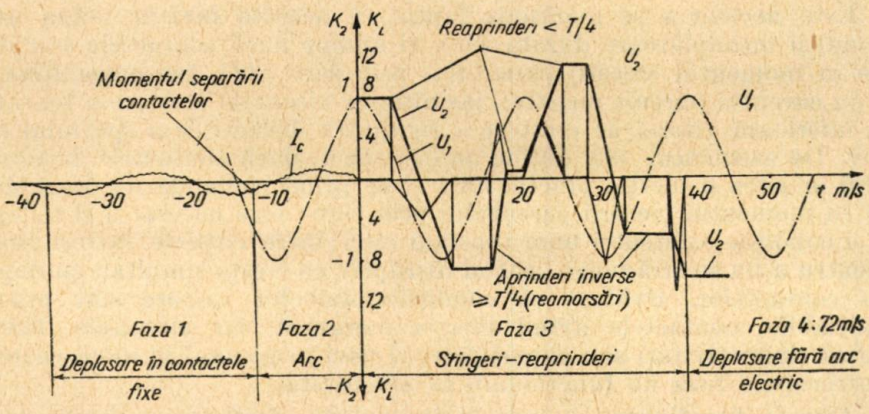


Fig. 2. — Fazele principale ale procesului de deconectare a unei linii în gol.

variază după semnalele înregistrate pe oscilograme de la 140 ms (7 perioade), la 168 ms (8,4 perioade). Pentru simplificarea interpretării am considerat că deplasarea contactelor se efectuează cu viteză constantă și durează 150 ms. Viteza de deplasare medie va fi deci de 3,75 m/s.

Fazele analizate pot fi împărțite astfel (fig. 2) și tabelă.

a) Faza primă a deconectării corespunde deplasării contactelor mobile în contact mecanic direct cu contactele fixe, fiind aceeași cu timpul propriu de lucru al întreruptorului. În această fază rezistența de contact, r, variază invers proporțional cu suprafața de contact [22] a cărei expresie este

$$a = A\left(1 - \frac{t}{\tau}\right), \tag{1}$$

unde

A = suprafața de contact în poziția închis în cm²;
τ = durata totală a fazei 1-a a procesului de deconectare în secunde;
t = timpul de deplasare a contactelor, variabil de la 0 la τ, în secunde.

În această fază începe deja procesul tranzitoriu. Pe oscilogramele analizate se observă unele variații sensibile ale curentului și mai puțin vizibile ale tensiunii; acest efect pe fazele singulare este însă datorit în parte și influenței fenomenelor ce au loc pe fazele vecine [23]. Durata minimă a acestei faze este 26,7 ms.

b) A doua fază a procesului deconectării este faza de funcționare în arc electric. Ea începe în momentul desprinderii contactelor mobile de contactele fixe. Separarea mecanică a contactelor poate avea loc în orice moment al perioadei tensiunii respectiv a curentului, avînd caracterul unei mărimi statistice ce se poate trata prin metode probabilistice. S-a constatat experimental că momentul de separație a contactelor întreruptorului are influență asupra valorii factorului de supratensiune [24], [25].

Este necesar a se menționa faptul că această fază ar putea avea în condiții întîmplătoare durata zero, și anume dacă contactele s-ar deschide în momentul trecerii curentului prin zero [22], tensiunea fiind în fază cu curentul (circuit rezistiv), iar ulterior viteza de creștere a tensiunii ar fi inferioară vitezei de creștere a rigidității dielectrice a spațiului disruptiv. De asemenea, s-ar obține același efect, dacă contactele întreruptorului ar avea o inerție practic nulă și ar primi comanda de deschidere chiar în momentul trecerii curentului prin zero; este necesar a fi îndeplinită și condiția existenței unor tensiuni mici între cuțitele întreruptorului pentru a nu se străpunge spațiul disruptiv ce crește simultan cu deplasarea contactelor. Evident că condițiile ambelor ipoteze sînt practic nerealizabile, contactele avînd inerție mecanică, iar circuitele, inerție electrică (inductivități sau capacități); și deci în general în toate cazurile de întrerupere faza de funcționare în arc există.

Durata funcționării în arc la încercările efectuate a variat de la 7 ms la 20 ms cu o valoare medie de 14,7 ms pentru linia de 70 km și de la 7 ms la 16 ms cu o valoare medie de 9,8 ms pentru linia de 140 km.

Se constată că într-un număr relativ mare de cazuri stingerea arcului electric nu se produce la prima trecere prin zero a curentului capacitiv. Acest fenomen este menționat și în literatura [26], [22]. El se produce atunci cînd curentul întrerupt are o frecvență mare [26] fenomen

observat pe majoritatea oscilogramelor analizate încă înainte de a începe prima fază a deconectării. Această frecvență înaltă s-a datorat fie influenței fenomenelor de pe fazele vecine, fie scăderii rezistentei de contact la începerea deplasării contactului mobil.

Faza a treia a procesului de deconectare constă din stingerile și reaprinderile arcului electric, ce durează de la începutul primei stingeri pînă la sfîrșitul ultimei reaprinderi, cînd contactele mobile au ajuns la o distanță critică, egală cu suma distanțelor parcurse în fazele 2 și 3 ale deconectării ce face imposibilă o nouă reaprindere [13], [25]. Această distanță critică presupune un arc alungit cu o cădere mare de tensiune. În oscilogramele analizate distanța critică, ds. are valorile pentru linia de 70 km respectiv 140 km:

$d_{s\,min}$ = 11,6 cm și 7 cm reprezentînd 24,8% și 14,8% din cursa liberă;
$d_{s\,max}$ = 26,2 cm și 17,3 cm ,, 56% și 36,8% ,,
$d_{s\,med}$ = 17,7 cm și 11,2 cm ,, 36,7% și 23,6% ,,

Durata fazei de stingeri și reaprinderi pentru linia de 70 km respectiv 140 km are valorile:

$t_{3\,min}$ = 16 ms respectiv 9,5 ms;
$t_{3\,max}$ = 50,5 ms ,, 34 ms;
$t_{3\,med}$ = 33,8 ms ,, 19,7 ms.

Se observă că durata funcționării în arc, faza arc + faza stingeri-reaprinderi are valoarea maximă de 70 ms la linia de 70 km și 46 ms la

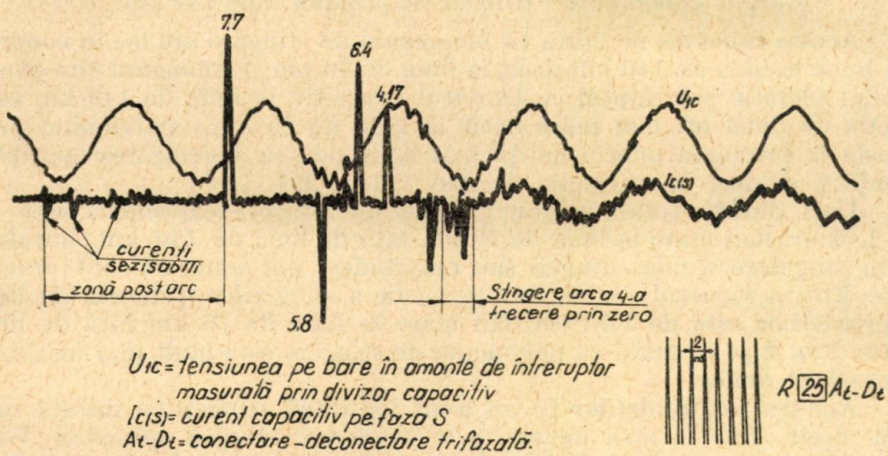


Fig. 3. — Oscilogramă cu curenți sesizabili în zona post-arc.

linia de 140 km. Astfel de valori sînt citate și în literatura [23] unde arcul persista în general cel puțin 6 semiperioade adică 60 ms.

Ultima fază a fenomenului de deconectare este deplasarea contactului mobil fără arc electric în partea finală a cursei sale. În general, în această fază curentul este nul.

După unii autori mai pot apare curenți datoriți capacității intervalului de rupere [27] și curenți post arc. Amplitudinea curenților poate fi 0,05—0,5 din valoarea curenților întrerupți avînd timpi de amortizare de 0,05—0,5 ms pentru tensiuni mai puțin ridicate [27], [28]; pentru tensiunea de 110 kV valoarea lor este nesesizabilă [27]. Unele șocuri de curent observabile pe oscilograme (fig. 3) se datoresc probabil fenomenelor tranzitorii de pe fazele vecine [23].

3. INFLUENȚA CARACTERISTICILOR LINIEI ASUPRA FENOMENULUI DE DECONECTARE

Din analiza datelor cuprinse în tabelă se observă faptul că fenomenul de deconectare la linia de 140 km este mai favorabil decît la linia de 70 km. Acest lucru rezultă din următoarele:

$$a)\ \frac{\text{durata arc linie 70 km,}}{\text{durata arc linie 140 km}} = 1{,}52;$$

$$b)\ \frac{\text{durata fază stingeri-reaprinderi linie 70 km}}{\text{durata fază stingeri-reaprinderi linie 140 km}} = 1{,}72;$$

$$c)\ \frac{\text{număr cicluri stingeri-reaprinderi linie 70 km}}{\text{număr cicluri stingeri-reaprinderi linie 140 km}} = 1{,}75;$$

$$d)\ \frac{\text{durata fazelor arc+stingeri-reaprinderi linie 70 km}}{\text{durata fazelor arc+stingeri-reaprinderi linie 140 km}} = 1{,}6.$$

Aceste rapoarte ne arată că fenomenul de stingere are loc în condiții mai bune la linia de 140 km decît la linia de 70 km. Fenomenul este explicabil și teoretic prin faptul că curentul capacitiv la linia de 140 km este practic de două ori mai mare decît la linia de 70 km, contribuind prin aceasta la formarea unor condiții mai bune pentru deionizarea spațiului disruptiv și deci la stingerea arcului [14], [29].

Deși durata totală medie a fazei de stingeri-reaprinderi este de cca 1,72 ori mai mare la linia de 70 km față de linia de 140 km, duratele medii singulare a unei stingeri sau reaprinderi sau suma lor sînt practic egale. Totuși raportul dintre durata medie a stingerilor și durata medie a reaprinderilor este de 1,75 ori mai mare la linia de 70 km față de linia de 140 km, fapt ce arată că fenomenul de stingere este mult mai activizat în cazul al doilea.

Analiza reaprinderilor ce au avut loc după stingeri cu durata mai mică decît $T/4$ (5 ms), denumite în literatura tehnică germană Wiederzündungen (reaprinderi) și a acelora ce au avut loc după stingeri cu durata mai mare sau egală cu $T/4$ denumite Ruckzündungen (aprinderi inverse sau reamorsări) (9), [30] arată că raportul numărului reaprinderilor față de reamorsări este de 1,63 la linia de 70 km și de 5,5 la linia de 140 km. Aceasta indică faptul că relația între viteza de creștere a rigidității dielectrice a spațiului disruptiv și viteza de creștere a tensiunii de restabilire (de revenire) între contactele care se deschid este mai favorabilă stabilirii unui arc activ la linia de 140 km decît la linia de 70 km.

Formarea unui arc mai puternic conduce la crearea unor presiuni mai mari necesare stingerii sale prin autosuflaj [28].

În privința factorului de supratensiune pe linie, k_2, lungimea liniei are influență în sensul că linia cu curenți capacitivi mai mici produce supratensiuni maxime mai mari: $k_{2max} = 2{,}53$ la linia de 70 km și 2,25 la linia de 140 km.

Din cele de mai sus rezultă că în cazul experiențelor efectuate linia de 140 km crează condiții funcționale pentru întreruptor mai bune decît linia de 70 km. Evident că numai aceste două trepte de lungimi sînt insuficiente și este necesar a se studia problema pe viu sau pe modele pentru o gamă mai mare, pentru a se determina curentul capacitiv și deci lungimea de linie optimă fenomenului de stingere la deconectarea curenților capacitivi.

4. INFLUENȚA MOMENTULUI SEPARĂRII CONTACTELOR ÎNTRERUPTORULUI ASUPRA FACTORULUI DE SUPRATENSIUNE

S-a menționat mai sus natura statistică a momentului separării contactelor întreruptorului. E indicat a se releva faptul că fenomenul producerii supratensiunilor interne în ansamblu are un caracter statistic [15], [18], [19], [31].

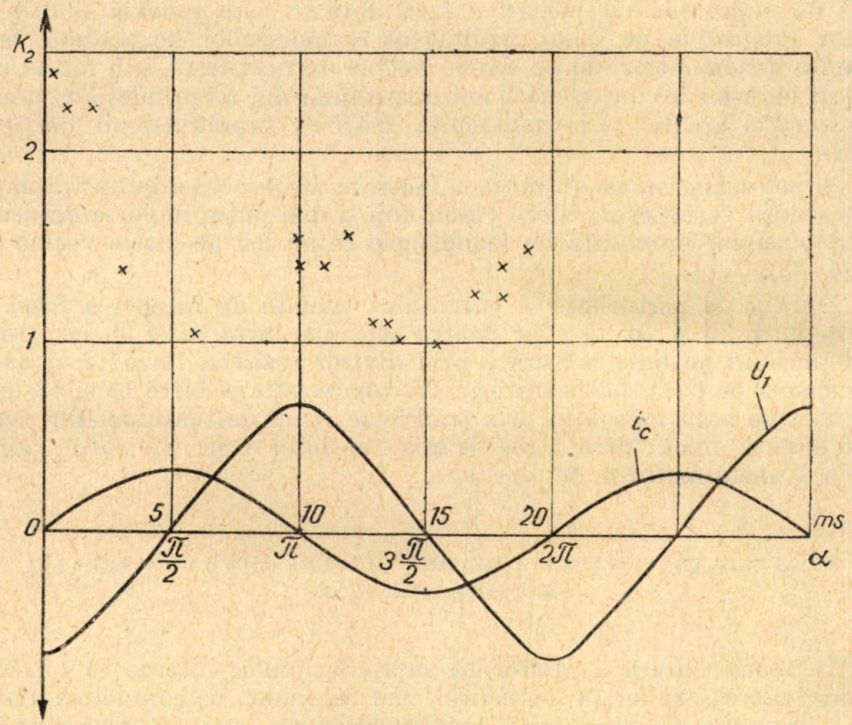


Fig. 4. — Variația factorului de supratensiune în funcție de momentul separării contactelor.

În figura 4 se arată distribuția valorilor factorilor de supratensiune în funcție de unghiul electric dintre momentul separării contactelor și momentul trecerii prin zero a curentului la începutul perioadei.

Rezultatele concordă cu cele indicate în literatură [24], [25], în sensul că valorile maxime ale factorului de supratensiune au loc pentru defazajele 0, π și 2π între momentul deschiderii contactelor și trecerea curentului prin zero, iar valorile minime pentru defazajele $\pi/2$ și $3\pi/2$. Aceasta se datorește faptului că energia dezvoltată de arc este mai mare în primul caz, durata maximă a existenței arcului fiind dublă (10 ms) sau chiar quadruplă (20 ms) și deci linia are un timp de încărcare în continuare mai îndelungat.

5. INFLUENȚA FENOMENELOR CE AU LOC PE FAZELE VECINE

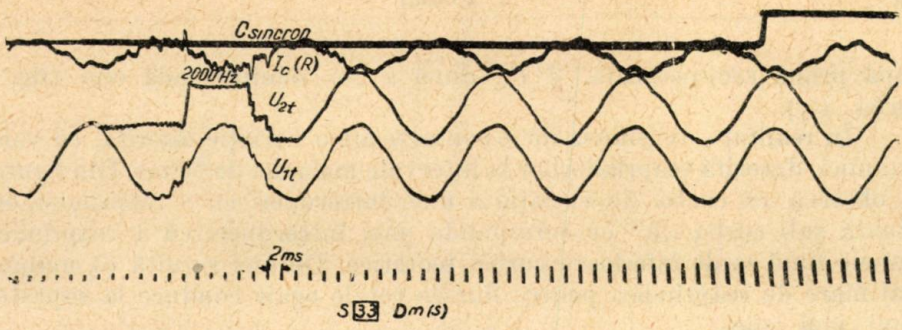
În literatura tehnică [23] se menționează că fenomenele de deconectare (stingere arc, reaprinderi, etc.) constituie o cauză secundară de supratensiuni ce apar pe una din fazele întreruptorului sau liniei (Cauza principală de supratensiuni pentru o fază dată P este reflexia multiplă a undelor progresive pe linie, rezultat al reamorsărilor pe această fază). Influența fenomenelor de pe fazele vecine se manifestă sub forma unor tensiuni induse care au ca efect mărirea numărului reaprinderilor, prelungirea duratei arcului și în consecință mărirea supratensiunii maximale relative.

Și pe oscilogramele obținute la încercări se observă o influență importantă asupra variației și valorii curentului și mai puțin importantă asupra valorii tensiunii provocată de fenomenele ce au loc pe fazele vecine (fig. *5a*, *5b*, *5c*).

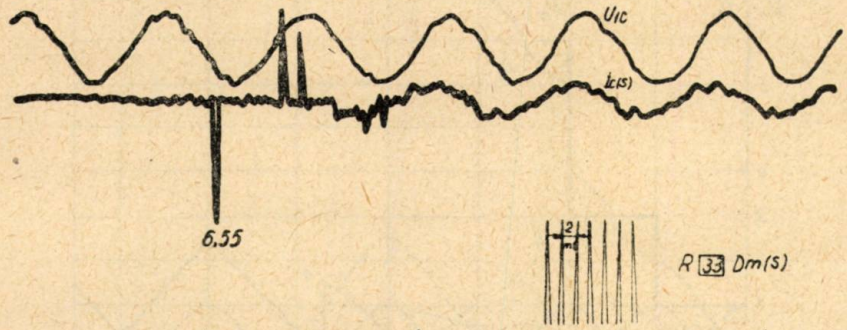
Durata de perturbare a curentului înainte de începerea fazei arc variază între 30 și 70 ms; iar pentru tensiune între 15 și 35 ms pentru curba-tensiuni pe linie măsurate prin divizor rezistiv, între 12 și 58 ms la tensiunea pe bară măsurată prin divizor rezistiv și între 13 și 53 ms la tensiunea pe bară măsurată prin transformatorul de tensiune. De remarcat diferența mică între înregistrarea tensiunii prin divizorul rezistiv și prin transformatorul de tensiune.

6. INFLUENȚA NUMĂRULUI DE REAPRINDERI ASUPRA FACTORULUI DE SUPRATENSIUNE

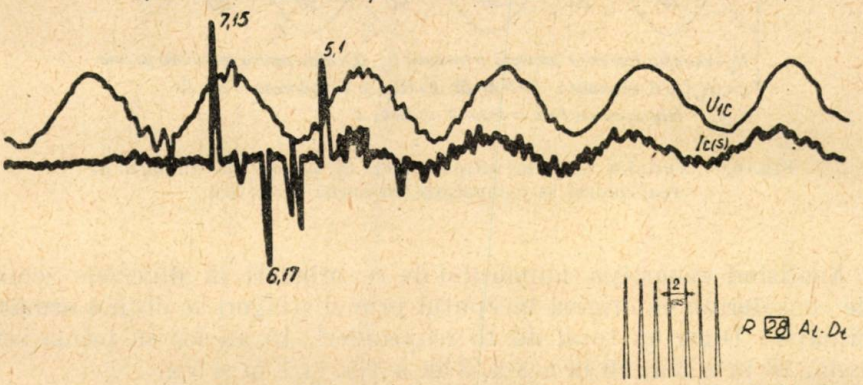
În teoria clasică a producerii supratensiunilor interne se consideră că reaprinderea are loc în momentul cînd tensiunea pe contactele dinspre bare a întreruptorului a atins amplitudinea de semn contrar astfel că tensiunea pe contacte are valoarea $2U_{max}$ [16]. În această ipoteză care e cea mai defavorabilă, tensiunea pe linie U_2, ar putea atinge valorile $3\ U_m$



a)- Influenta deconectării fazei S. asupra curentului Ic(R) de pe faza R nedeconectată.



b)- Variatia curentului capacitiv Ic(S) la deconectare monofazată pe faza S.



c)- Variatia curentului capacitiv Ic(S) de pe faza S la deconectare trifazată.

- Ic(R),(S) = curent capacitiv pe faza R, S, etc.
- U_{2t} = tensiunea în aval de întreruptor măsurată prin trafo tensiune
- U_{1t} = idem pe bare în amonte întreruptor măsurată prin trafo tensiune.
- U_{1c} = idem pe bare în amonte întreruptor măsurată prin divizor capacitiv.
- Csincron = contact sincron pentru înregistrarea momentului comenzii.
- Dm(S) = deconectare monofazată pe faza S.
- At-Dt = conectare-deconectare trifazată.

Fig. 5

după prima semiperioadă, 7 U_m după a 2-a semiperioadă etc. (fig. 6, curba U_2).

În realitate, tensiunea între contacte are o variație diferită, cu valori mai mici, datorită reaprinderilor la intervale mai mici de 10 ms. Din figura 6 se observă că curba de variație a unei întreruperi cu 8 reaprinderi este situată sub curba „b" ce corespunde unei întreruperi cu 4 reaprinderi, ambele fiind mult inferioare curbei teoretice. De aici rezultă că numărul mai mare de reaprinderi pentru durate totale egale conduce la supratensiuni mai mici.

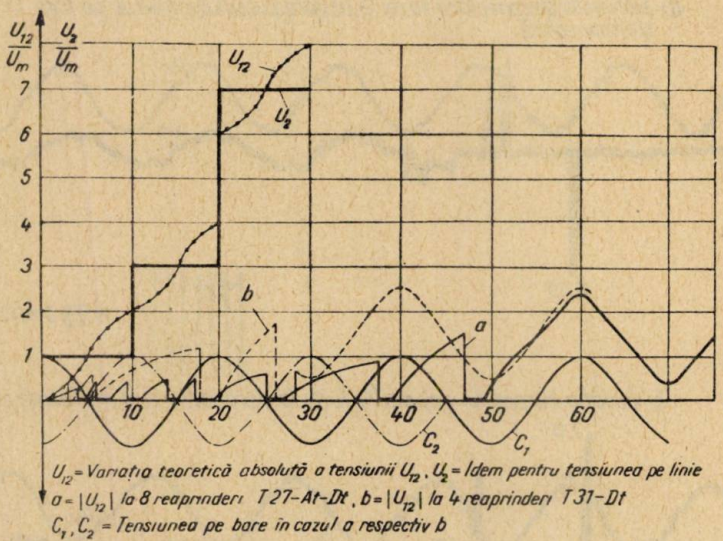


Fig. 6. — Variația tensiunii între contacte în funcție de numărul de reaprinderi în comparație cu curba teoretică.

Analizînd repartiția numărului de reaprinderi în diversele semiperioade considerînd ca origină începutul primei stingeri se obține următoarea situație: Dintr-un total de 45 reaprinderi, 15 au loc în prima semiperioadă, 16 în a 2-a, 10 în a 3-a, 3 în a 4-a, și 1 în a 5-a.

Calculînd pentru fiecare oscilogramă în fiecare semiperioadă durata medie a unui ciclu cu expresia:

$$\tau_{ciclu} = \frac{\sum_1^n t}{n}$$

putem ridica curba $k_2 = f(\tau_{ciclu})$ (fig. 7), unde k_2 este valoarea factorului de supratensiune la sfîrșitul fiecărei semiperioade.

Din figura 7 se observă că valoarea tensiunii U_2 și deci și factorul de supratensiune cresc cu durata ciclului și cu semiperioada în care are loc reaprinderea.

CONCLUZII

1. Caracteristicile liniei deconectate în gol au o influență importantă asupra modului cum are loc stingerea arcului la întreruptorul cu ulei puțin și asupra valorii supratensiunilor maxime. Ea se manifestă prin numărul de reaprinderi și durata lor. Linia de 140 km crează condiții mai bune de stingere decît linia de 70 km.

2. Pentru același interval de timp numărul de reaprinderi mărit reduce valoarea supratensiunii; în schimb conduce la o uzură mai importantă a contactelor și a uleiului izolant.

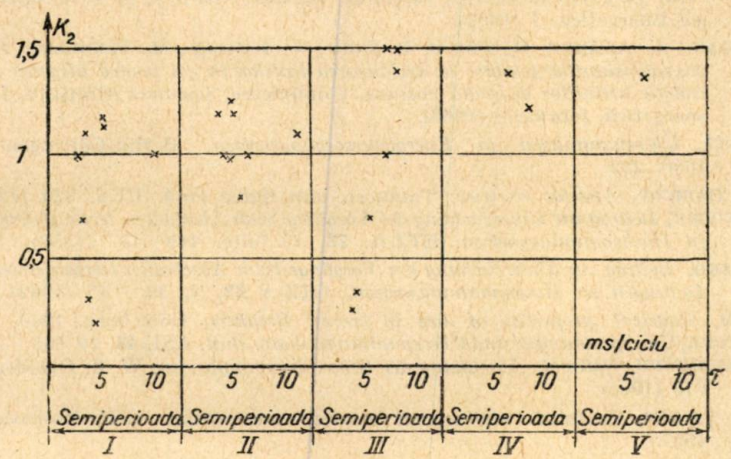


Fig. 7. — Variația factorului de supratensiune la sfîrșitul fiecărei semiperioade în funcție de durata medie a ciclurilor stingere-reaprindere.

3. Momentul separării contactelor și fenomenelor de pe fazele vecine influențează valoarea supratensiunilor.

4. Studierea influenței unei game mari de caracteristici și în speță de curenți capacitivi în scopul determinării unui optimum ar prezenta o importanță practică pentru exploatarea și proiectarea liniilor de transport, precum și pentru construcția aparatajului de conectare-deconectare. Acest studiu se poate efectua în special pe modele fizice și analogice.

Primit la redacție la 10 octombrie 1963

BIBLIOGRAFIE

1. A. AVRAMESCU, *Principiile tehnico-economice ale construcției echipamentului de foarte înaltă tensiune.* Electrotehnica, **8**, *1*, 2 — 11 (1960).
2. G. DRĂGAN, B. POPA, J. ADĂMUȚ, *Cercetări privind caracteristicile electrice ale lanțurilor de izolatoare IC4.* St. cerc. energ. 2 (1961).
3. R. GERT, J. JIRKU, V. KALONSEK, V. VYSKOCIL, *Étude statistique des surtensions, avec incidence sur la coordination d'isolation entre phases et la rigidité électrique vis-à vis des surtensions internes,* CIGRE, 1962, Rap. *415.*
4. B. POPA, *Stabilirea schemei de încercare pentru măsurarea nivelului supratensiunilor ce apar la declanșarea liniei în gol.* St. cerc. energ. seria A, **XII**, *4* (1962).
5. B. POPA, *Erorile de măsură a schemelor de înregistrare a supratensiunilor interne.* St. cerc. energ., seria A, **XII**, *2*, 324 (1962).
6. B. MATHÉ, J. CÎRSTEA și alții, *Cercetarea capacității de comutație a întreruptorului IUP-110, în condiții de laborator și de rețea.* St. cerc. energ. A. *4* (1963).
7. B. POPA, Al. IONESCU, M. TENDLER, *Încercări pentru determinarea comportării întreruptorului IUP-110 la ruperea curenților de scurt circuit și la declanșarea liniilor în gol.* Energetica, 7 (1963).
8. G. DRĂGAN, J. ADĂMUȚ, M. PETCU, B. POPA, A. IONESCU, M. TENDLER, *Determinarea supratensiunilor produse la declanșarea liniilor în gol pentru alegerea nivelului de izolație a liniilor de înaltă tensiune.* Comunicare, Sesiunea științifică, Institutul de energetică, februarie (1963).
9. H. BAATZ, *Überspannungen in Energieversorgungsnetzen.* Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1956, 232.
10. M. A. BABICOV, *Aparate electrice.* Traducere din limba rusă, EES, 324 (1953).
11. H. KINDLER, *Beitrag zur Untersuchung der Vorgänge beim Abschalten leerlaufender Leitungen in Hochspannungsnetzen.* ETZ-A, **78**, *13* iulie, 449—457 (1957).
12. H. NASKO, *Beitrag zur Untersuchung der Vorgänge beim Abschalten leerlaufender homogener Leitungen in Hochspannungsnetzen.* ETZ-A **83**, *2*, 39 — 45 (1962).
13. E. ALM, *Physical properties of arcs in circuit Breakers,* Götteborg, 1949.
14. K. BERGER, *Überspannungen und Überspannungsschutz. Bull.* ASE **48**, *10*, 465 — 474 (1957).
15. W. FRISCHMANN, *Optimale Absenkung der Schaltüberspannungen.* W. Z. Dresden, *3*, 670 — 675 (1961).
16. M. R. ȚEIROV, *Vozdusnie vîkliuciateli visokovo napreajenia.* GEI Moscova-Leningrad 1957.
17. M. C. DUBOIS, *Tenue aux surtensions internes des parafoudres pour réseaux aux hautes tensions.* BSFE, *8*, 558 — 571 (1960).
18. M. M. MONNET, *Conditions a imposer aux parafoudres pour qu'ils protegent le materiel contre les surtensions internes.* BSFE, *8*, 547 — 558 (1960).
19. R. GERT, *Prepeti pri vypineni transformatoru a vedeni naprazdno.* Elektrotechn. Obzor *47* (1958).
20. A. AVRAMESCU, *Manualul inginerului electrician IV. Aparate electrice.* Cap. III. *Aparate deconectare.* Subcap. Q *Întrerupătoare de înaltă tensiune,* 419, 420, 1956.
21. P. JOSS, E. LEIMGRUEBLER, *La coupure sans reamorcage des courants capacitifs au moyen de disjoncteurs a faible volume d'huile.* CIGRE, 1960, **3**, Rap. *114.*
22. R. RUDENBERG, *Fenomene tranzitorii în sisteme electroenergetice,* Ed. tehnică Buc., 1959 429.
23. E. L. WHITE, M. P. REECE, *Statistiques sur les surtensions de manoeuvres dans le réseau maillé d'interconnexion britannique a 132 kV.* CIGRE, 1958, Rap. *337.*
24. P. BALTENSPERGER, *The Shape and Magnitude of Overvoltages when interrupting smoll inductive and capacitive currents in H. V. Systems.* BB Rev. april, *4*, 192 — 195 (1960).
25. SLAMECKA ERNST, *Das Schalten kleiner Strome.* AEG Mitt., jul. aug., 247 — 265 (1957).
26. A. DOLGHINOV, *Perenapreajenia v elektriceskih sistemah GEI.* Moskva-Leningrad, 360 — 361, 1962.

27. H. KOPPLIN, E. SCHIMIDT, *Les courants post-arc leur mesure. Leur importance pour l'interpretation des processus de coupure dans les disjoncteurs a haute tension a faible volume d'huile.* CIGRE, 1960 III, Rap. *107.*

28. S. TESZNER, A. GUILLAUME, P. DUFOUR, V. DELEVOY, *Le courant post-arc et son interpretation en fonction des caracteristiques de l'interrupteur et du circuit.* CIGRE, 1958, **II**. Rap. *148.*

29. V. AFANASIEV, *Construcția întreruptoarelor de înaltă tensiune.* Traducere din limba rusă. EES, 1953 192 — 196.

30. E. THALER, *Das rückzündungsfreie Schalten von Kondensatorenbatterien.* Bul. ASE 53, *23*, *17* nov., p. 1139 — 1145 (1962).

31. V. V. BURGSDORF, N. N. BELIACOV, *Perevod linii electroperedaci na bolee visocoe nominalnoe napriajenie bez usilenia izolații.* Elektricestvo, **79**, 2 (1959).

METODE ELECTRICE ȘI MECANICE DE INTEGRARE A PATRATULUI UNEI MĂRIMI DATE

DE

M. E. BÎRGĂUANU și C. V. BĂLĂ

517.3.518.4

1. INTRODUCERE

Pentru rezolvarea anumitor probleme tehnice este necesară efectuarea integralei F a pătratelor unei mărimi variabile f oscilografiate sau înregistrate. De cele mai multe ori f este o funcție de timpul t; așadar:

$$F(T) = \int_0^T f^2 \, dt,$$

în care T reprezintă durata pentru care se efectuează intregrala.

Un exemplu de astfel de problemă constă în determinarea valorii efective I a unei mărimi periodice i prin efectuarea mediei pătratice a acestei mărimi pe o perioadă

$$I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2 \, dt},$$

problemă care apare curent în electrotehnică la măsurarea valorii efective a tensiunii sau a curentului.

Un alt exemplu, care a constituit obiectul realizării unui aparat, constă în determinarea intervalului τ dintr-o perioadă T în care funcției p (— o funcție aleatorie de t —) i-ar corespunde o valoare constantă P dată, astfel încît

$$P^2 \tau = \int_0^T p^2 \, dt.$$

Cazul concret studiat urmărea determinarea timpului de funcționare a unui transformator la pierderi de scurtcircuit date (nominale sau

maxime), timp care condiţionează determinarea dimensiunilor celor mai economice, în sens larg, ale transformatoarelor.

Determinarea prin înregistrare directă a pătratelor presupune existenţa unor aparate înregistratoare speciale (în cazul concret la transformatoarele din exploatare). În prezent, nu sînt prevăzute asemenea aparate în instalaţiile din sistemul energetic; în schimb se înregistrează curent puterea activă P şi reactivă Q funcţie de timp. Pe de altă parte, se dispune de o importantă cantitate de informaţie memorizată pe registrogramele mărimilor electrice, termice etc. din centralele şi staţiile electrice. Astfel, se pune problema prelucrării ulterioare a funcţiilor aleatorii P şi Q pentru a rezulta valoarea intervalului τ, definit astfel

$$\tau = \frac{1}{P_{scn}} \int_0^T R \frac{P^2 + Q^2}{U^2} \, dt,$$

în care R este rezistenţa echivalentă a înfăşurărilor transformatorului, U-tensiunea la borne, presupusă constantă şi P_{scn} pierderile de scurtcircuit nominale.

Pentru prelucrarea acestor registrograme se pot folosi aparate speciale, cuprinzînd în esenţă două dispozitive, dintre care unul de transformare a semnalului grafic în semnal de altă natură şi unul care efectuează patratul acestui semnal din urmă şi îl integrează.

2. SISTEMUL DE TRADUCERE

Sistemul de traducere al semnalului grafic poate fi de mai multe feluri: electric, electromecanic, mecanic, mecanoelectric.

În afară de aceste sisteme pot exista, firește, şi altele, cele folosind de exemplu izotopi radioactivi: direct prin marcarea radioactivă a registrogramei (cerneală cu izotopi radioactivi) sau prin „transparenţă" cu surse radioactive locale (la locul prelucrării).

După relaţia dintre mărimea de ieşire şi mărimea de intrare, se deosebesc:

— traductoare liniare la care dependenţa dintre mărimea de ieşire şi mărimea de intrare este de proporţionalitate;

— traductoare funcţionale, la care dependenţa dintre mărimea de intrare şi mărimea de ieşire este o funcţie dată;

— traductoare continue în care mărimea de ieşire urmăreşte continuu mărimea de intrare;

— traductoare discontinue, în care mărimea de ieşire urmăreşte prin valori discrete mărimea continuă de intrare.

2.1. **Traductoare liniare** 2.1.1. Traducerea electrică a semnalului grafic în semnal electric poate avea loc la rîndul său în mai multe feluri, funcţie de morfologia registrogramei; registrogramele conţin informaţia fie sub forma unei curbe liniforme (fig. 1a) fie sub forma unor curbe modulate (fig. 1-*b* şi *c*).

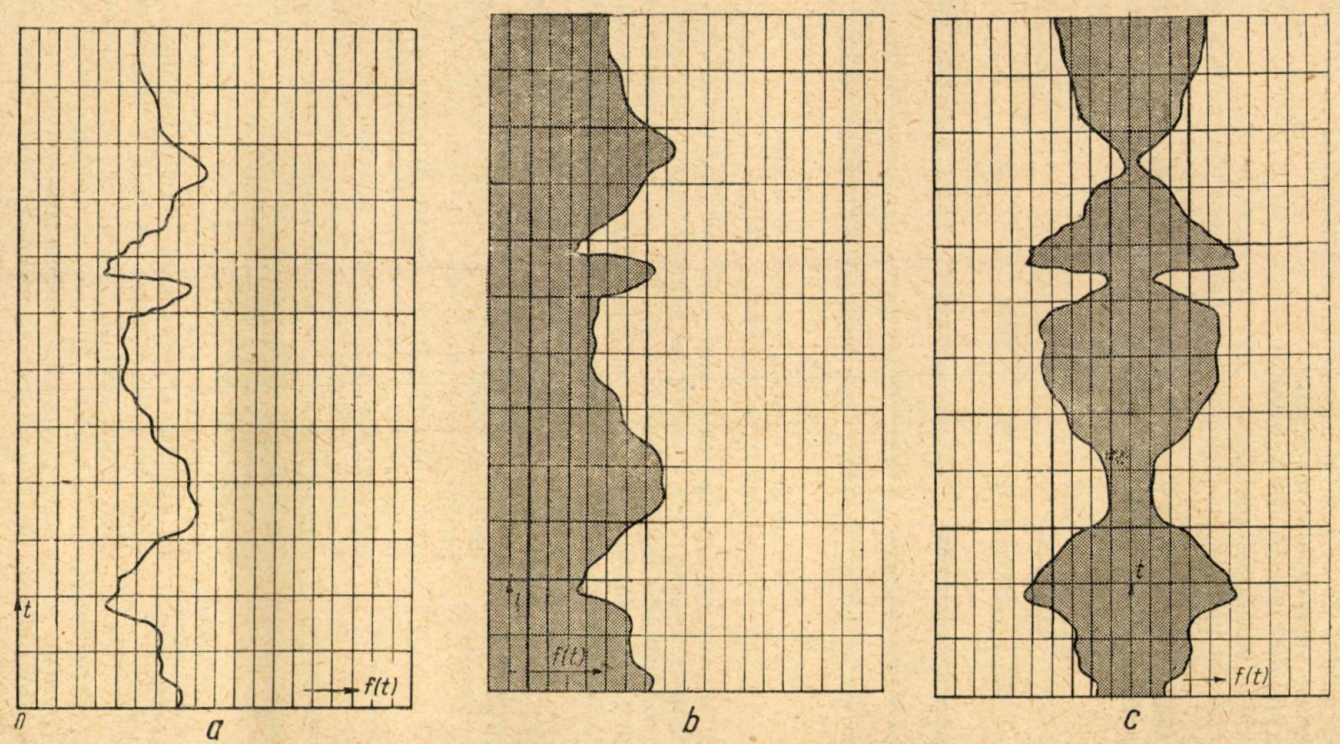


Fig. 1. — Grafice diferite ale funcțiilor (registrograme)

a – curbă liniformă; *b* – curbă modulată și redresată; *c* – curbă modulată și nedresată.

După modul de scriere al aparatului înregistrator se pot distinge :
— scriere cu cerneală obișnuită ;
— expunerea hîrtiei fotosensibile ;
— exfolierea hîrtiei metalizate prin arc electric etc.

Funcție de această morfologie, traductoarele vor funcționa diferit. Astfel :

a) Celula fotoelectrică poate fi folosită cu succes în special în cazul registrogramei modulate. Prin reflecție sau transparență, curba modulată

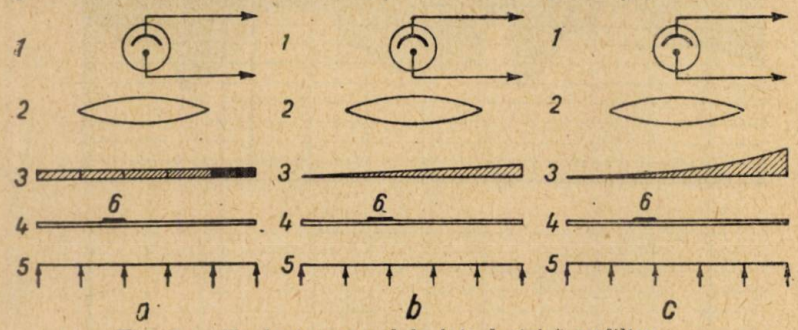


Fig. 2. — Traductor cu celula fotoelectrică cu filtru :
a — liniar discret ; *b* — liniar continuu ; *c* — funcțional.

va permite accesul luminii la celulă mai mult sau mai puțin după amplitudinea curbei la abscisa dată. În acest fel, transformarea semnalului grafic în semnal electric este directă. Dar și în cazul registrogramei avînd informația redată prin curbe liniforme, se poate folosi celula fotoelectrică. Însă, urmărirea nu mai este în general continuă (semnalele grafice se transformă în semnale electrice discrete). Și aici se pot imagina cîteva moduri de traducere. De exemplu, dispunînd în fața registrogramei o linie de celule fotoelectrice al căror număr depinde de gradul de precizie (finețe) cu care se dorește urmărirea registrogramei, fiecare dînd un semnal proporțional cu poziția ei. Folosirea unui disc Nipkov reprezintă o altă soluție ; în acest caz cu rotația discului trebuie sincronizată variația intensității semnalului celulei fotoelectrice (care poate lucra negativ). O altă soluție de folosire a celulei fotoelectrice în cazul curbelor liniare, constă în trecerea luminii 5, de la diagramă 4, la celula fotoelectrică 1, printr-un rastru (filtru) 3, de transparență variabilă pe direcția transversală a registrogramei (fig. 2) astfel încît iluminarea globală a celulei fotoelectrice unice variază funcție de rîndul sau ordonata din rastru (filtru) întunecat de curba 6, (procedeul nu este sensibil decît în scheme de punte). Alt procedeu constă în deplasarea celulei sau a sursei pe direcția ordonatelor, cu sincronizarea mărimii semnalului (fig. 3). Ultimele două procedee pot fi cu traducere discretă sau continuă.

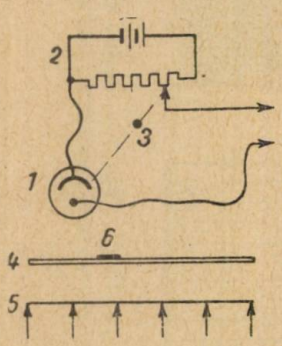


Fig. 3. — Traductor cu celulă fotoelectrică mobilă sincronizată cu cursorul potențiometrului.

b) Traductoarele capacitive pot fi folosite de asemenea cu succes în cazul curbelor reprezentate modulat. Poate fi folosit orice mod de scriere la fel ca și la celulele fotoelectrice. Hîrtia registrogramei se deplasează între armăturile unui condensator. Porțiunea scrisă a hîrtiei are o altă permitivitate dielectrică ca cea nescrisă, așa încît capacitatea acestui condensator variază liniar cu suprafața închisă de înfășurătorile curbei modulate și deci, și semnalul electric (produs de exemplu de un oscilator electronic și în al cărui circuit de oscilație este înseriat condensatorul). În cazul curbelor liniforme se poate folosi procedeul seriei de condensatoare cu eficiență proporțională cu distanța pînă la locul ocupat pe tran-

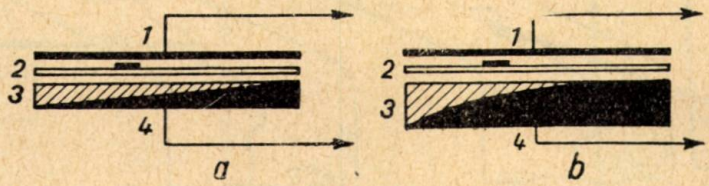


Fig. 4. — Traductor capacitiv cu dielectric variabil:
a — liniar; *b* — funcțional.

sversala registrogramei. Mai puțin sensibil este procedeul similar cu rastrul care permite folosirea unui condensator unic (fig. 4). Rastrul (filtrul) este înlocuit aici de un dielectric suplimentar de grosime variabilă. Nu pare a fi posibilă, în condiții tehnice bune, folosirea traductorului capacitiv mobil.

c) Iconograful cu o singură linie dă o soluție modernă problemei traductorului grafic-electric. În cazul curbelor modulate sarcina electrică culeasă încarcă, de exemplu, un condensator a cărui tensiune constituie semnalul electric, proporțional cu suprafața scrisă de curba modulatoare (lățimea spotului de explorare trebuie evident să fie mai lat decît 1/2 din perioada curbei modulatoare, lucru valabil și în cazul celorlalte traductoare). În cazul curbelor liniforme este posibil a se folosi iconograful monolinie dacă se realizează în momentul atingerii spotului explorator a curbei, o blocare a semnalului electric.

d) În cazul hîrtiei metalizate se poate încerca o traducere electrostatică sau electrocinetică după unul din procedeele de explorare comune traducerii electrice.

2.1.2. Traductoare electromecanice. Două celule fotoelectrice care încadrează curba de prelucrat și avînd poziția cîmpului determinată de poziția rotorului unui servomotor comandat de ele (fie are în sens opus sensului de rotație), constituie un traductor electromecanic de urmărire a curbei. Poziția rotorului servomotorului determină, prin acționarea unui potențiometru, semnale electrice proporționale cu această poziție care, la rîndul ei, corespunde ordonatei curbei explorate. În cazul curbelor modulate redresate (dar și în cazul celor neredresate cu anumite precauții) este suficientă pentru comanda servomotorului o singură celulă fotoelectrică, care dă comenzi inverse (prin compensare sau în montaj de punte) servo-

motorului. Sistemul de traducere este activ, închis, cu probleme de stabilitate specifice.

2.1.3. Traductoarele mecanice pure se pot folosi de obicei în metode subiective. Un operator urmăreşte cu un vîrf curba de prelucrat care se transmite prin pîrghii, roţi, culise sub formă de semnal mecanic care este apoi prelucrat tot pe cale mecanică.

2.1.4. Traductoarele mecanoelectrice, de asemenea subiective, se caracterizează prin extrema lor simplitate. Deplasarea unui vîrf mînuit

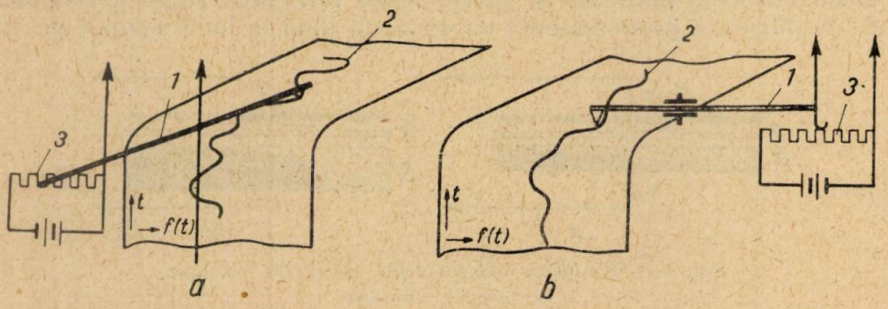


Fig. 5. — Traductor mecanoelectric : *a* — cu pîrghie ; *b* — cu tijă glisantă
1. pîrghie (tijă) ; *2*. registrograma (informaţia conţinută sub forma unei curbe) ; *3*. potenţiometru.

de operator care urmăreşte curba analizată, conduce la deplasarea unui cursor al unui potenţiometru sau autotransformator ; schema de principiu a unui astfel de dispozitiv este prezentată în figura 5*a*. În locul pîrghiei oscilante poate fi utilizată o tijă glisantă (fig. 5 *b*) sau un dispozitiv de transformare a mişcării de translaţie în mişcare de rotaţie aşa cum a fost folosit de autori în aparatul realizat.

2. 2. **Traductoare neliniare.** În cazul în care se utilizează traductoare neliniare — şi anume în cazul problemei de faţă interesează traductoarele patratice — se simplifică construcţia aparatului prin eliminarea dispozitivului special de înmulţire, respectiv ridicare la pătrat.

Funcţionarea traductoarelor nelineare are loc pe baza aceloraşi principii întîlnite la traductoarele liniare.

De exemplu, traductorului electric potenţiometru, autotransformator reglabil etc., i se poate asigura prin construcţie o dependenţă neliniară între poziţia cursorului şi valoarea tensiunii electrice de ieşire. O asemenea soluţie se realizează prin dispunerea neuniformă a spirelor de rezistenţă ale potenţiometrului, sau prin variaţia lungimii acestora, prin utilizarea unui miez mobil de o anumită formă geometrică la transformatorul reglabil, prin utilizarea de filtre speciale neliniare după o anumită direcţie în cazul celulelor fotoelectrice etc.

2.3. Sistemul de prelucrare (efectuare a pătratelor şi integrare) poate fi mecanic sau electric funcţie de semnalul primit. Sînt posibile mai multe sisteme din care menţionăm :

2.3.1. Sisteme mecanice. În figura 6 este reprezentată o schemă mecanică relativ simplă care permite atît efectuarea patratului semnalului mecanic primit cît şi integrarea, prin măsurarea cursei efectuate de axul

de ieşire (numărător de rotaţii). Sistemul de urmărire este compus dintr-o roată *1* care se învîrte cu viteza unghiulară constantă Ω_1. Pe faţa ei calcă o altă roată *2* de raza r_2 care alunecă pe ax la distanţa r_1 sub acţiunea pîr-

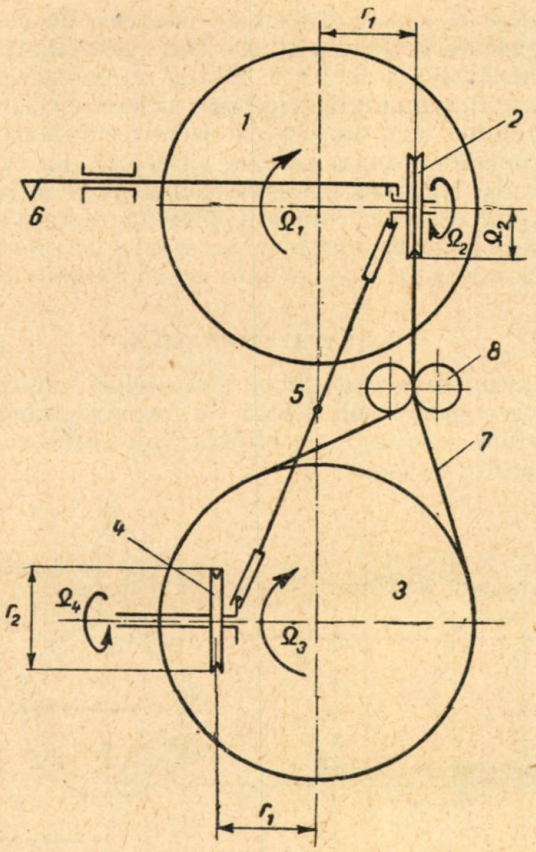


Fig. 6. — Traductor integrator mecanic
1...4 roţi ; *5.* pîrghie cu culise ; *6.* tije şi vîrf de urmărire ; *7.* curea de transmisie.

ghiei mînuite de operator şi care este antrenată prin frecare de roata *1*. Viteza unghiulară a acesteia este $\Omega_2 = \frac{\Omega_1 r_1}{r_2}$. O roată *3* identică cu *1* este antrenată de roata *2* la viteza $\Omega_3 = \Omega_2 \frac{r_2}{r_3}$, pe care calcă roata *4* de raza r_2 la distanţa r_1 la care este dusă de pîrghia *5* solidar cu roata *2* şi a cărei viteză este

$$\Omega_4 = \frac{\Omega_3 r_1}{r_2} = \frac{\Omega_1}{r_2 r_3} r_1^2,$$

în care r_1 este semnalul mecanic.

Un alt sistem mecanic este compus dintr-o culisă de forma parabolică, care realizează o deplasare a unei roţi antrenate la viteza constantă pe suprafaţa unei roţi integratoare la o distanţă proporţională cu patratul semnalului.

2.3.2. Sisteme electrice. Sistemele electrice de prelucrare sînt mai simple şi mai sigure decît cele mecanice. Din aceste motive, este recomandabilă folosirea exclusivă a acestora. Dintre numeroasele mijloace pentru realizarea patratului semnalului electric : tuburi electronice, generatoare Hall etc., de preferat sînt motoraşele electrice bifazate, alimentate cu tensiuni proporţionale cu semnalul care va determina cuplul proporţional cu patratul acestuia. Mărimea de ieşire (numărul de rotaţii ale motorului) reprezintă, la cuplul rezistent constant, direct integrala căutată. Aparatul realizat de autori se bazează tocmai pe acest mod de efectuare a integralei unui produs — în cazul de faţă al unor mărimi egale sau proporţionale.

3. APARATUL REALIZAT

Pentru determinarea integralei patratelor valorilor unei funcţii aleatorii prezentate grafic sub formă de registrogramă s-a realizat un aparat care prezintă avantajul simplităţii, robusteţei şi uşurinţei de a fi construit din aparate uzuale.

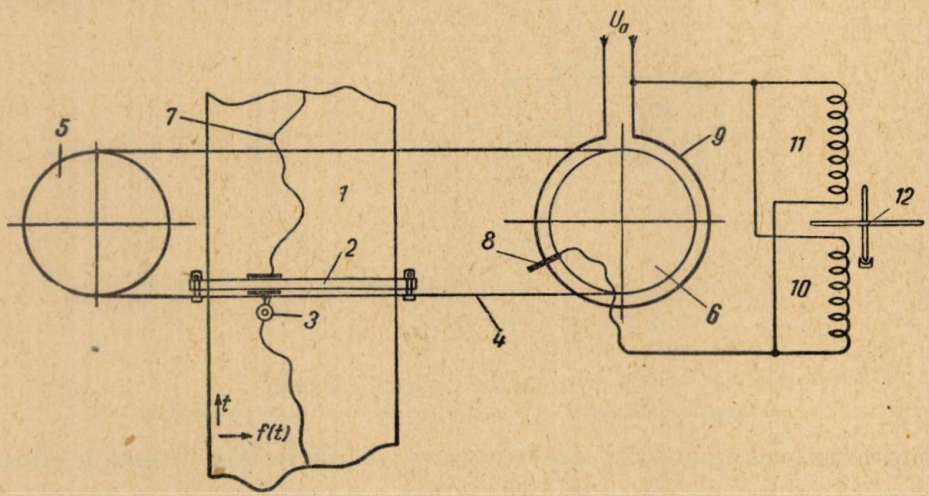


Fig. 7. — Traductor integrator mecanoelectric

1. registrogramă cu curba 7; *2*. tijă; *3*. cursor cu peniţă registrografică; *4*. coardă rigidă cu cursorul *3* şi roata de manipulare *6*; *5*. rolă de ghidare; *8*. cursorul potenţiometrului *9*; *10* şi *11* bobinele contorului cu discul *12*.

3.1. Ca mod de traducere a semnalelor grafice s-a utilizat un dispozitiv mecanoelectric subiectiv, cu urmărirea de către un operator a curbei dar cu posibilitatea controlului urmăririi. În esenţă, hîrtia registrogramei este antrenată de un sistem obişnuit de aparat înregistrator cu o viteză constantă.

Transversal pe direcţia de înaintare a hîrtiei *1*, culisează o tijă *2* (fig. 7) un cursor pe care e montată o peniţă (de aparat înregistrator) *3*,

legată solidar de coarda *4* petrecută după o roată de ghidare *5* și fixată la periferia roții de manipulare *6*, care este mînuită de operator astfel ca penița să urmărească curba de pe registrograma *7*. Roata *6* acționează cursorul *8* al autotransformatorului reglabil (regulator de inducție sau potențiometru) *9* alimentat cu tensiune alternativă. La ieșirea autotransformatorului se obține tensiunea proporțională cu deplasarea cursorului *8*, deci și a peniței *3*.

3.2. Pentru efectuarea integralei patratului s-a introdus un contor monofazat de inducție, modificat în sensul că bobina de curent a fost înlocuită cu bobină identică cu cea de tensiune și ambele au fost alimentate în paralel cu tensiunea U proporțională cu semnalul grafic (ordonata funcției f). Conform teoriei contorului de inducție numărul de rotații ale discului 12 este proporțional cu produsul scalar al curentului i și tensiunii u aplicate.

$$n = K \int_0^T u\, i \, \mathrm{d}t.$$

Deoarece în cazul de față

$$i = K_1 u = K_2 f \quad \text{rezultă}$$

$$n = K_3 \int_0^T f^2 \, \mathrm{d}t.$$

Prin urmare, contorul înregistrează valoarea integralei de efectuat pe intervalul T.

3.3. **Condițiile optime de utilizarea aparatului.** Fiind un aparat bazat pe o citire subiectivă (curba fiind urmărită de către un operator) o problemă constă în determinarea vitezei optime a hîrtiei pentru care urmărirea curbei are loc cu erori admisibile, nu solicită excesiv operatorul, iar desfășurarea operației are loc în timp cît mai scurt. Această viteză depinde de alura curbei. La variații de amplitudine mare și frecvente, viteza optimă este desigur mai mică. În cazul curbelor pentru care a fost construit aparatul viteza optimă de avans a hîrtiei este cuprinsă între limitele $0{,}1 \div 0{,}2$ m/min. Controlul urmăririi de către operator pentru a stabili eroarea subiectivă de „citire" se face prin înscrierea cu cerneală de culoare diferită a curbei efectiv descrisă de cursorul „cititor".

3.4. **Analiza erorilor.** Cu excepția erorii subiective determinarea celorlalte erori se face la fel ca în cazul oricărui aparat de măsură. S-a constatat că principalele erori provin din urmărirea neexactă a curbei (de obicei astfel de erori nu depășesc unilateral 2%, ele însă se compensează în mare parte, din jocuri mecanice între peniță și cursorul autotransformatorului (aceste erori sînt foarte mici, sub 0,5%) și pot fi încă reduse. Erori mai pot proveni din discontinuitatea înfășurării autotransformatorului (de cca. 0,2...0,3%) în sfîrșit mai sînt erorile provenite din faptul că precizia contorului de clasă 1 variază între 2,5 și +1% la o variație a sarcinii de la 5 ····100 % din cea nominală, așadar la o variație în jurul lui U_s de 50% eroarea corespunde unei sarcini de circa 25%, adică eroarea

este de cel mult 1,5%. Eroarea totală (dacă nu ţinem seama de cea subiectivă care se compensează aproape integral) este

$$\varepsilon = [2(0{,}5 + 0{,}3) + 1{,}5]\,[\%] = 3{,}1\,[\%].$$

În cazul în care contorul lucrează în domeniul 0 . . . 200% din sarcina nominală la care este reglat, atunci eroarea scade la

$$\varepsilon = 2{,}6\%.$$

4. CONCLUZII

Utilizarea unui aparat de tipul celui prezentat mai sus este deosebit de eficientă în comparaţie cu metoda, de prelucrarea grafică — analitică manuală. Astfel, considerînd o registrograma de lungime 80 m (înregistrată în interval de 1 an), numai timpul necesar determinării ordonatelor curbei la interval de 2 mm necesită la aplicarea metodei manuale, 56 ore, în timp ce prelucrarea integrală a registrogramei cu aparatul prezentat mai sus a durat 1,6 ore.

În comparaţie cu mulţimea de soluţii indicate mai sus, aparatul aplicat prezintă următoarele avantaje:

— este simplu, robust;

— se poate confecţiona din aparate de fabricaţie curentă cu transformări minime;

— este mai precis decît aparatele cu urmărire discretă şi permite controlul urmăririi exacte a curbei prelucrate; în sfîrşit, problema discontinuităţilor, întreruperilor, destul de frecvente a curbelor din registrograme, poate fi rezolvată direct de operator.

Primit la redacţie la 1 noiembrie 1963

EFICIENȚA TURBIONĂRII AMESTECULUI COMBUSTIBIL ÎN MĂRIREA VITEZEI DE ARDERE A COMBUSTIBILILOR GAZOȘI

DE

N. ANTONESCU și C. ARIEȘANU

662.612 :662.69

Turbionarea amestecului combustibil este una din metodele uzuale de intensificare a arderii combustibililor gazoși. Astfel, o serie de arzătoare de construcție modernă utilizează acest procedeu pentru obținerea unor încărcări termice mari, atît în focare de tip cameră de ardere, cît și în focare tunel.

Studiind arderea într-un curent turbionar, s-a arătat într-o lucrare anterioară [1], că, din punctul de vedere al exprimării analitice a fenomenelor, sistemul de ecuații obținut diferă de cel cunoscut pentru arderea în curent liniar prin două ecuații suplimentare. Una din ele este o ecuație de energie, iar a doua este ecuația conservării momentului cantității de mișcare între două secțiuni vecine.

Rezolvarea problemei arderii în curent turbionar necesită și precizarea relației după care se calculează viteza de ardere U_T. Utilizînd drept caracteristică a curentului turbionar valoarea unghiului θ între direcția vitezei axiale și direcția vitezei tangențiale, într-un punct din apropierea peretelui tunelului, s-a dedus experimental relația :

$$U_T = 2{,}43\, U_0\, \overline{W}_{a_0}^{(-0{,}42\,\mathrm{ctg}\,\theta + 0{,}836)}, \qquad (1)$$

unde U_0 este viteza normală de ardere în m/s,

W_{a_0} viteza axială inițială medie a amestecului combustibil în m/s.

Relația (1), care are limite largi de aplicare practică, poate fi încă îmbunătățită prin schimbarea variabilelor în funcție de care se exprimă U_T.

În cazul arderii în curent liniar o îmbunătățire a formulei ce se obține experimental

$$U_T = f(\overline{W}_{a_0}) \qquad (2)$$

consistă în exprimarea vitezei de ardere ca o funcţie de criteriul $\mathcal{R}_e$. Astfel, de exemplu, relaţia stabilită de S. A. Goldenberg [2], pentru $\mathcal{R}_e > 100 \cdot 10^3$

$$\frac{U_T}{U_0} = a \cdot \mathcal{R}_e^{0,84}, \tag{3}$$

unde a este o constantă.

O altă posibilitate preconizată, [3], de îmbunătăţire a formulei (2) consistă în exprimarea vitezei de ardere sub forma unui invariant $\mathcal{U}$ care la rîndul lui depinde de valoarea criteriului $\mathcal{R}_e$.

$$\mathcal{U} = \frac{\Delta p}{\rho_a \cdot U_0 \bar{W}_{a_0} U_T^* \rho^*}, \tag{4}$$

şi

$$\mathcal{U} = 0{,}813 \ \mathcal{R}_e^{0,533}, \tag{5}$$

unde

Δp este căderea de presiune în zona de ardere,
ρ_a — densitatea amestecului combustibil,
U_T^* — viteza relativă de ardere,

$$U_T^* = U_T / U_0$$

ρ^* — densitatea relativă a gazelor de ardere în raport cu amestecul combustibil $\rho^* = \rho_g / \rho_a$.

În mod similar, pentru curentul turbionar, îmbunătăţirea formulei (1) ar consista în exprimarea vitezei de ardere funcţie de momentul cantităţii de mişcare M, moment care caracterizează mişcarea turbionară în ecuaţiile de ardere, deci

$$U_T = f(M, U_0). \tag{6}$$

O altă posibilitate, ar fi determinarea vitezei de ardere funcţie de criteriul Ω de modelare, propus de D. N. Liahovski, pentru similitudinea aerodinamică a curenţilor turbionari

$$\Omega = \frac{M}{I\frac{d}{4}}. \tag{7}$$

Criteriul Ω ţine seama de momentul cantităţii de mişcare a fluidului M de impulsul I şi de diametrul jetului d. În acest caz relaţia ar rezulta de forma

$$\frac{U_T}{U_0} = f(\Omega). \tag{8}$$

Pentru determinarea unor relaţii de forma celor arătate în formulele (6) şi (8) s-au făcut experimentări asupra unui focar tunel în care s-a realizat o mişcare turbionară a amestecului combustibil (gaz metan şi aer

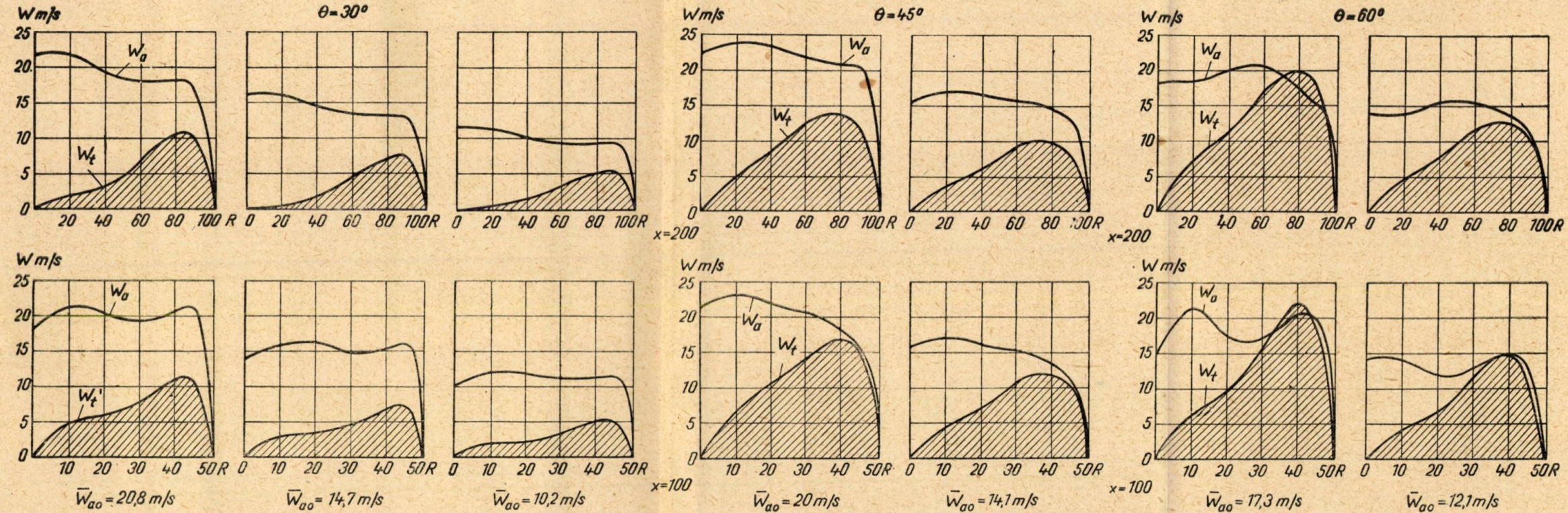


Fig. 1. — Cîmpul de viteze în curgerea turbionară funcţie de unghiul caracteristic şi viteza iniţială axială-medie.

în proporție stoichiometrică) cu ajutorul unor corpuri spirale cu unghiul elicei de 30, 45 și 60°.

Experimentările la rece au fost făcute pentru a determina la diferite regimuri (caracterizate printr-o anumită viteză medie axială și un anumit unghi de turbionare a curentului), valoarea momentului cantității de mișcare M și a impulsului I.

Măsurarea vitezelor și direcțiilor respective s-a făcut cu o sondă direcțională de viteză, în secțiunile perpendiculare pe axa tunelului plasate la distanțele de 100, 200 și 300 mm de secțiunea de ieșire din turbionator.

Cîmpul de viteze măsurat în secțiunea $x = 300$ coincide ca alură și valori locale cu cîmpul măsurat în secțiunea $x = 200$. În secțiunea $x = 100$ cîmpul de viteze este puțin diferit de cel din secțiunile mai îndepărtate, ca urmare a faptului că în prima porțiune a tubului avem o curgere tranzitorie între curgerea prin paletele turbionatorului și curgerea liberă în tub.

În figura 1 se prezintă diagrama vitezelor axiale W_a și tangențiale W_t pentru diferite unghiuri de turbionare și viteze medii axiale. Diagramele pentru secțiunea $x = 200$ sînt valabile și pentru secțiuni mai îndepărtate; diagramele pentru secțiunea $x = 100$ reprezintă, după cum s-a arătat, regimul tranzitoriu.

Analizînd alura variației mărimii vitezelor pe secțiune se constată că viteza axială prezintă în general un maxim pe un cerc cu raza de aproximativ 0,2 R și la viteze mari un al doilea maxim pe un cerc cu raza 0,8—0,9 R, unde s-a notat cu R raza tubului.

Vitezele tangențiale au o creștere lentă în zona 0—0,5 R, după care însă prezintă un maxim accentuat în zona 0,8—0,9 R. Această distribuție pe secțiune a vitezelor tangențiale este deosebit de avantajoasă pentru ardere, deoarece în zona periferică a tubului vom avea viteze locale de ardere mari, ceea ce mărește stabilitatea arderii în cazul aprinderii periferice. Se știe că viteza de ardere locală este cu atît mai mare cu cît viteza tangențială în acel punct este mai mare.

Momentul cantității de mișcare funcție de unghiul de turbionare θ, de viteza medie axială și de poziția secțiunii tubului în care se face măsurarea se calculează din valorile vitezelor din diagrama figura 1 după relația

$$M = 2\pi\rho \int_0^R R^2 W_a W_t \, dR, \tag{9}$$

rezolvată prin diferențe finite.

Rezultatele obținute sînt prezentate în figura 2.

Se remarcă în general o creștere accentuată a valorii momentului cantității de mișcare cu creșterea unghiului de turbionare θ și cu creșterea vitezei medii axiale $\overline{W}_{a_0}$. Pentru secțiunea $x = 200$ și secțiunile mai îndepărtate care au aceeași distribuție a vitezelor în cîmp, momentul cantității de mișcare este mai mic decît în secțiunea $x = 100$ ca urmare a faptului că în zona de tranziție de la curentul dirijat de palete la curentul liber din tub se produc pierderi care conduc la micșorarea momentului cantității de mișcare cu $10 \div 20\%$.

În continuare, s-a calculat și valoarea criteriului propus de Liahovski

$$\Omega = \frac{M}{l \cdot \frac{d}{4}} = \frac{2\pi\rho \int_0^R R^2 W_a W_t \, dR}{R\pi\rho \int_0^R R W_a^2 \, dR}. \tag{10}$$

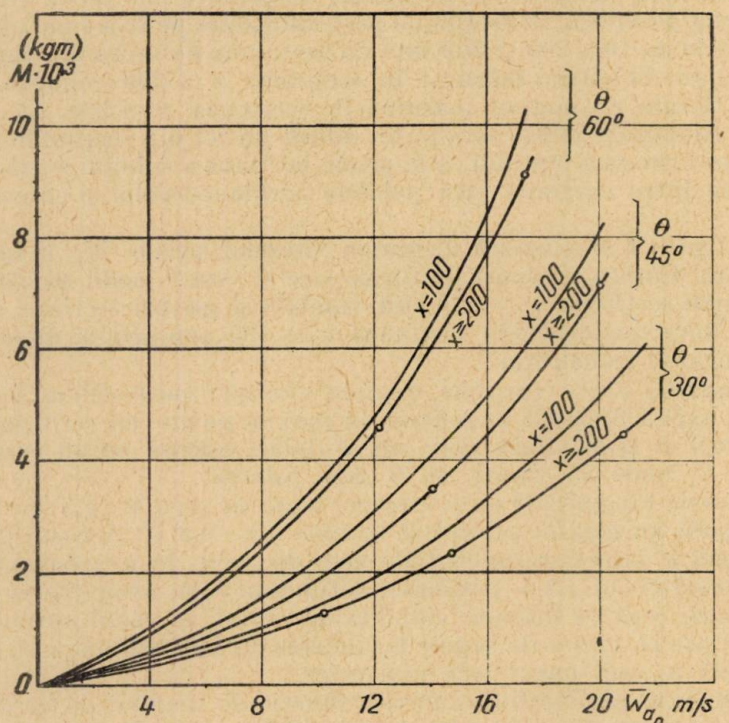


Fig. 2. — Momentul cantității de mișcare funcție de viteza axială medie inițială a curentului și de unghiul caracteristic de turbionare.

Rezultatele obținute pentru valorile lui Ω în secțiunile $s = 200$ sînt prezentate în figura 3.

Se observă din analiza diagramei că valoarea criteriului Ω depinde numai de unghiul de turbionare θ, fără să depindă de viteza axială medie a curentului. De altfel, la această concluzie se poate ajunge și din analiza formulei (10) pentru cazul particular în care W_a și W_t au valori constante pe secțiune. În acest caz Ω ia valoarea

$$\Omega = \frac{4}{3} \frac{\bar{W}_t}{\bar{W}_a} = \frac{4}{3} \operatorname{tg}\theta, \tag{11}$$

deci funcție numai de unghiul de turbionare. În cazurile practice, cînd repartiția mărimii vitezelor pe secțiune nu este uniformă valoarea lui Ω

diferă de cea dată în formula (11) cu un coeficient de neuniformitate caracteristic pentru fiecare distribuție de viteze în parte.

Din experimentările la rece pot fi trase următoarele concluzii:

— Momentul cantității de mișcare M poate fi utilizat în exprimarea vitezei de ardere, deoarece fiind o funcție continuă de unghiul de turbionare θ și de viteza medie axială $\overline{W}_{a_0}$, conține implicit cei doi factori care conform formulei (1) influențează viteza de ardere.

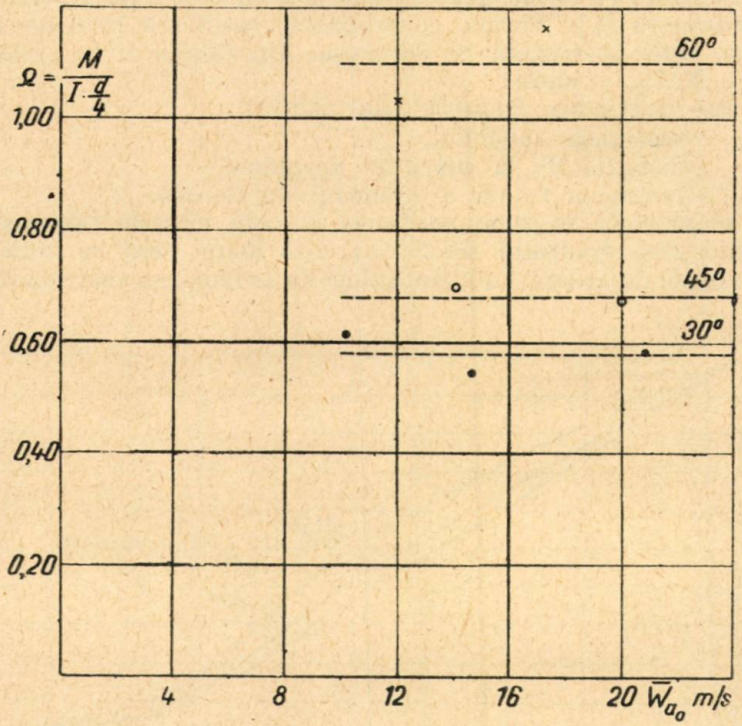


Fig. 3. — Variația criteriului Ω cu parametrii curentului turbionar.

— Criteriul Ω nu poate fi utilizat singur în exprimarea vitezei de ardere deoarece nu este funcție de viteza W_{a_0}. În consecință ar putea fi folosit numai într-o formulă de tipul

$$\frac{U_T}{U_0} = f(\Omega,\ \overline{W}_{a_0}), \tag{12}$$

formulă care nu ar mai avea generalitatea unei formule criteriale și nici nu ar fi de preferat din punctul de vedere al simplității unei formule de tipul

$$\frac{U_T}{U_0} = f(M) \tag{13}$$

Experimentările la cald pentru determinarea vitezei de ardere au fost făcute pentru o serie de regimuri caracterizate prin unghiul de turbionare θ variat între 30 și 60° și viteza medie axială $\overline{W}_{a_0}$ variată între 4 și 12 m/s. Corespunzător, momentul cantității de mișcare a variat între $0{,}3 \cdot 10^{-3}$ și $3{,}5 \cdot 10^{-3}$ kgm.

Verificarea exactității măsurătorilor făcute pentru determinarea poziției frontului de flacără în focar s-a făcut comparînd forma frontului de flacără obținut cu forma generalizată determinată dintr-o serie de experiențe anterioare [1]. Forma generalizată, verificată bine de actualele experiențe, este prezentată în diagrama din figura 4, în coordonatele F/F_{max} și X/X_{max}, unde:

F este secțiunea frontului de flacără,

F_{max} — secțiunea tunelului,

x — distanța de la sursa de aprindere,

x_{max} — lungimea totală a frontului de flacără.

Se observă că în zona periferică în care vitezele tangențiale sînt mari, conicitatea frontului de flacără este mare, ceea ce indică valori mari ale vitezei de ardere. În ultima zonă de ardere, cea centrală din focar,

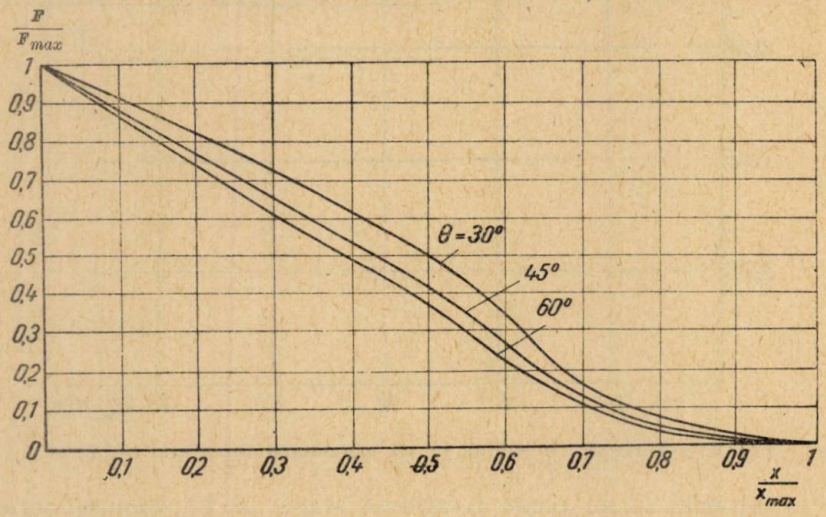


Fig. 4. — Forma frontului de flacără la arderea în curent turbionar.

vitezele tangențiale scăzînd brusc scade corespunzător și viteza locală de ardere. De aceea, în zona $F/F_{max} = 0-0{,}2$ conicitatea frontului de flacără este mică apropiindu-se ca valoare de cea găsită pentru cazul arderii în curent liniar.

Pentru determinarea vitezei medii de ardere din formula

$$U_T = \frac{S}{A} \overline{W}_{a_0}, \tag{14}$$

în care S este suprafața secțiunii focarului tunel (cm²) și

A — suprafața frontului de flacără (cm²),

a fost necesară determinarea suprafeței totale a frontului de flacără din profilul măsurat experimental. În tabela 1 sînt date, funcție de viteza inițială a amestecului combustibil W_{a_0} în m/s și unghiul de turbionare θ, suprafețele totale ale frontului de flacără în cm^2.

Tabela 1

θ \ W_{a_0}	4,05	5,63	6,61	8,1	10,13	12,15
30°	207,6	275,1	285,1	297,4	—	—
45°	—	190,0	193,4	198,4	287,0	242,1
60°	129,9	160	168	—	178,4	—

Viteza de ardere U_T în m/s calculată după formula (14) funcție de viteza medie axială $\bar{W}_{a_0}$ în m/s și unghiul de turbionare θ este dată în tabela 2.

Tabela 2

θ \ W_{a_0}	4,05	5,63	6,61	8,1	10,13	12,15
30°	1,408	1,475	1,67	1,97	—	—
45°	—	2,12	2,46	2,94	3,36	3,62
60°	2,41	2,54	2,83	—	4,08	—

Pentru determinarea funcției $U_T = f(M)$ au fost combinate funcțiile $M = F(\theta, W_{a_0})$ din figura 2 și $U_T = f(\theta, \bar{W}_{a_0})$ din tabela 2.
Rezultatul este prezentat în diagrama din figura 5.

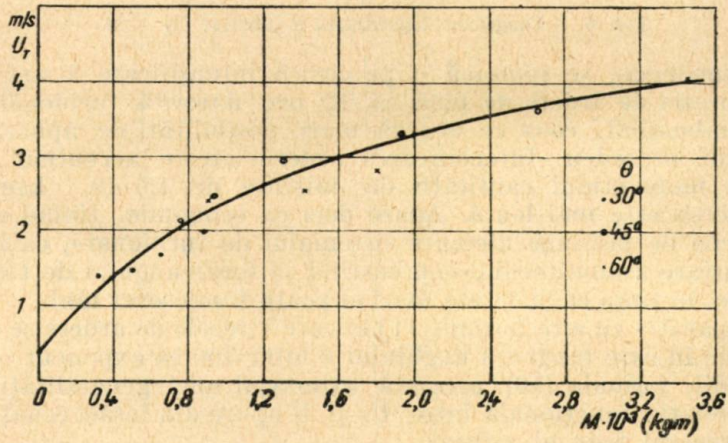


Fig. 5. — Variația vitezei turbulente de ardere cu momentul cantității de mișcare.

Se remarcă din diagramă un fapt important și anume că din combinarea funcțiilor amintite se elimină atît θ cît și $\bar{W}_{a_0}$, astfel că U_T apare

numai ca o funcţie de M. Într-adevăr erorile maxime ale punctelor experimentale faţă de curba medie sînt mai mici de 8,5 % (deci sub precizia experimentală) şi nu prezintă un caracter sistematic.

Transpunînd diagrame $U_T = f(M)$ în coordonatele logaritmice se obţine prin interpolare o dreaptă (fig. 6), ceea ce indică o dependenţă exponenţială între viteza de ardere şi momentul cantităţii de mişcare.

Relaţia astfel obţinută este de forma

$$U_T = 58 \cdot M^{0,467}, \tag{15}$$

sau punînd în evidenţă influenţa vitezei normale de ardere U_0,

$$U_T = 161\ U_0 \cdot M^{0,467} \tag{16}$$

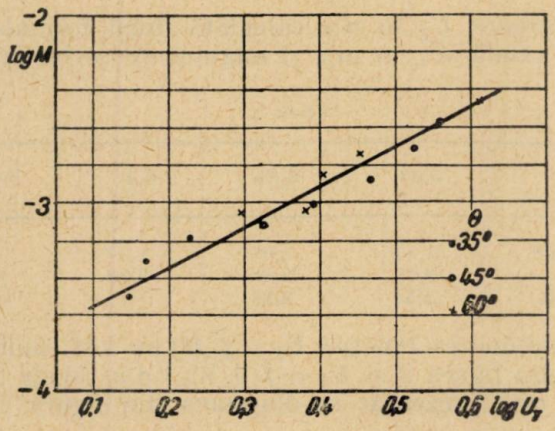


Fig. 6. — Diagrama logaritmică a funcţiei $U_T - M$.

În concluzie, se remarcă o puternică intensificare a arderii prin mărirea vitezei de ardere de pînă la 12 ori, datorită turbionării amestecului combustibil, ceea ce acordă mari posibilităţi de aplicare practică acestui procedeu. Intensificarea arderii creşte accentuat pînă la valori ale momentului cantităţii de mişcare de $1{,}5 \cdot 10^{-3}$ kgm, după care creşterea este mai lentă. Apare deci ca economic, ţinînd seama şi de pierderile de presiune aferente sistemului de turbionare, ca la viteze mici de intrare a amestecului combustibil în focar unghiul de turbionare să fie mare, în timp ce la viteze mari el poate fi micşorat mult.

Comparativ cu alte formule [1] în care vitezele de ardere se exprimă ca o funcţie în care tangenta unghiului θ intervine ca exponent al vitezei axiale medii, formula (16) prezintă avantajul unei generalităţi mărite deoarece relaţia funcţională între U_T şi M apare din însăşi ecuaţiile care descriu procesul fizic al arderii.

Este de aşteptat ca relaţia (16) să fie valabilă pentru orice ardere în curent turbionar, indiferent de particularităţile cîmpurilor de viteză ce apar ca urmare a modului diferit în care se poate produce rotirea curentului (cu palete, carcase spirale, introducere tangenţială etc.). Această

concluzie este probabilă deoarece U_T rezultă ca aceeași funcție de momentul cantității de mișcare cu toate că, după cum apare în figura 1, caracteristica cîmpului de viteze este sensibil diferită de la un unghi de turbionare la altul.

Primit la redacție la 15 octombrie 1963

BIBLIOGRAFIE

1. N. ANTONESCU, St. cerc. energ., **XIII**, Seria B, *1*, 55 — 76 (1963).
2. С. А. ГОЛЬДЕНБЕРГ, Изв. Акад. наук СССР, Отд. техн. наук, *4* (1950).
3. N. ANTONESCU, St. cerc. energ., **XIII**, Seria B, *2*, 217 — 225 (1963).
4. Д. Н. ЛИАХОВСКИЙ, *Теория и практика сжигания газа*. Гостоптехиздат, Ленинград, 1958, 28—77.

INFLUENȚA TURBULENȚEI ÎN CURENT ORGANIZAT ASUPRA ARDERII ÎN MOTOARELE CU APRINDERE PRIN SCÎNTEIE

DE

ADRIAN RADU-CERNEA

621.43—4

Pentru studiul influenței turbulenței asupra procesului de ardere, în general, și în special asupra vitezei de propagare a flăcării, este util ca, în condițiile aceleiași viteze de rotație a arborelui cotit, să se urmărească influența modificărilor gazo-dinamice care pot interveni datorită unor soluții constructive diferite ale sistemului de admisie. În acest scop, supapa de admisie a motorului poate fi echipată de exemplu cu o vizieră (fig. 1). Aceasta realizează o admisie tangențială a încărcăturii în cilindru, modificînd astfel condițiile obișnuite de turbulență și înglobîndu-le într-un curent organizat.

De la început trebuie menționat că motoarele monocilindrice pentru determinarea cifrei octanice (C.F.R., I.T. 9) sînt echipate în prezent cu asemenea supape de admisie.

Studiul influenței turbulenței în curent organizat, prin intermediul unei supape cu vizieră, a fost abordat în unele lucrări [1], [2], [3].

În unele încercări experimentale [1] se remarcă o influență a orientării vizierei, în timp ce în alte experiențe [3] nu se constată modificări esențiale ale procesului de ardere, ca urmare a unei orientări diferite a vizierei. În lucrarea [2] se redau fotografiile pozițiilor succesive ale frontului de flacără în cazul turbulenței în curent organizat (supapă de admisie cu vizieră) (fig. 2) în comparație cu o supapă de admisie normală.

Se remarcă configurația diferită a frontului de flacără în cele două cazuri.

Suprafața frontului de flacără, ca și viteza de propagare, cresc substanțial în cazul folosirii supapei cu vizieră. Admisia tangențială a

încărcăturii în cilindru imprimă şi o modificare a direcţiei de propagare a frontului de flacără, răsucindu-l oarecum în direcţia curentului gazos.

În lucrarea [3] se face un studiu amplu asupra influenţei turbulenţei în curent organizat asupra dispersiei ciclice, scoţîndu-se în evidenţă micşo-

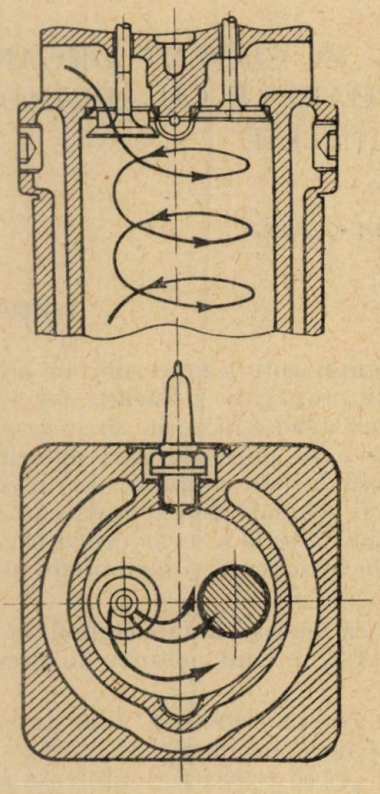


Fig. 1. — Fluxul gazos creat de supapa cu vizieră în cilindrul motorului.

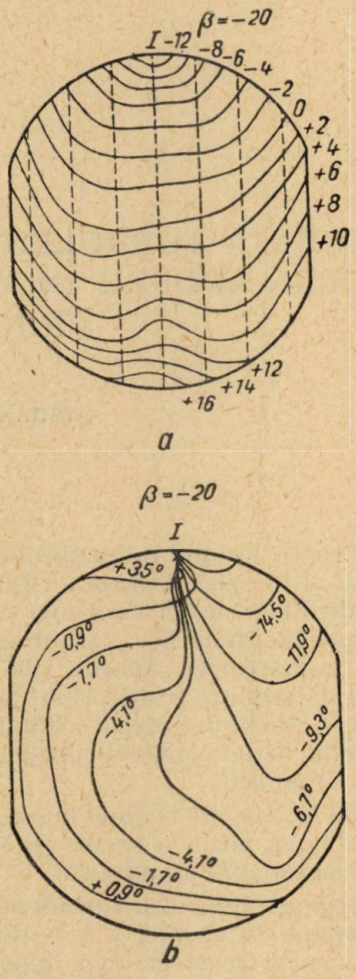


Fig. 2. — Poziţiile succesive ale frontului de flacără:
a — supapă normală; *b* — supapă cu vizieră.

rarea substanţială a dispersiei ciclice în cazul folosirii unei supape de admisie cu vizieră. Se consideră că tocmai din această cauză motoarele pentru determinarea cifrei octanice au fost echipate cu asemenea supape.

În completarea acestor date, experienţele noastre au fost orientate în sensul stabilirii în ce măsură se modifică influenţa unor factori asupra

procesului de ardere în condițiile turbulenței în curent organizat creată de o supapă cu vizieră.

În prealabil trebuie menționat că și în experințele noastre se constată o reducere substanțială a duratei procesului de ardere, precum și o micșorare sensibilă a dispersiei ciclice.

În cercetarea noastră experimentală, efectuată pe un motor I.T.9-2, se pune în evidență influența avansului la declanșarea scînteii electrice a turației, a coeficientului excesului de aer și a raportului de compresie, prin intermediul diagramelor indicate medii, ridicate cu un oscilograf catodic tip RFT-Zwönitz.

Prin intermediul diagramei indicate presiune-unghi de rotație a arborelui cotit ($p-\theta$) se poate determina durata fazei inițiale θ_1 și a fazei principale θ_2 a arderii. Un criteriu practic și util [4] al diviziunii pe faze este considerarea fazei inițiale drept durata între momentul declanșării scînteii și momentul divergenței curbei de ardere de curba de compresie (fără declanșarea scînteii) și a fazei principale — între acest ultim punct și punctul de presiune maximă (fig.3).

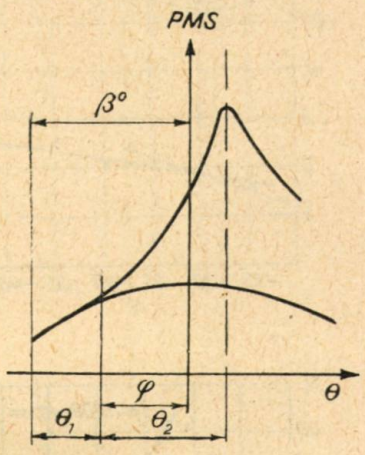


Fig. 3. — Diagrama indicată a motorului, cuprinzînd împărțirea pe faze a procesului de ardere (θ_1 și θ_2).

În caracterizarea procesului de ardere din motor, un parametru important este fără îndoială viteza de propagare a flăcării.

Pornind de la diagrama indicată a motorului, se poate determina o viteză aparentă de propagare a flăcării (W_{fa}) în raport cu pereții camerei de ardere, considerînd că în faza principală de durată θ_2 frontul de flacără se propagă pe o distanță de 85% din parcursul total [5]. În acest caz, avînd o cameră de ardere cilindrică, se poate scrie că :

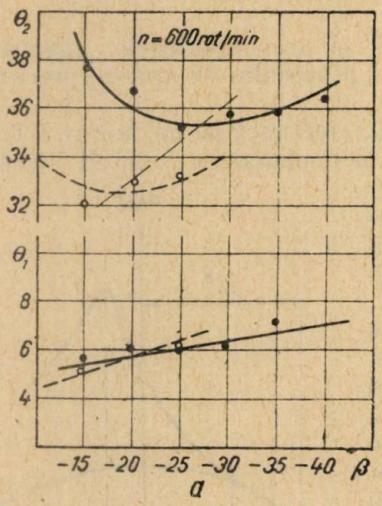
$$W_{fa} = 6n\frac{0{,}85\ D}{\theta_2} = 5{,}1\ D\frac{n}{\theta_2}.$$

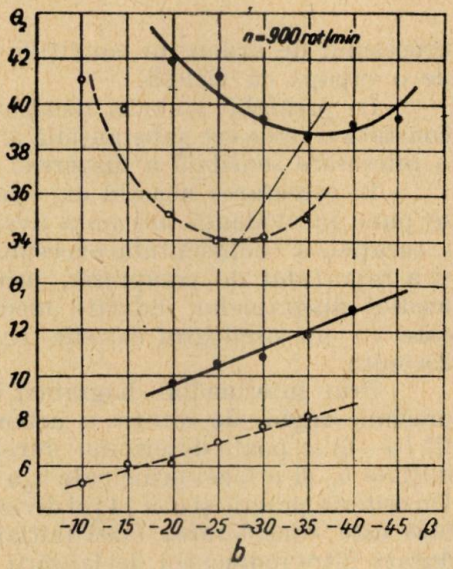
Verificarea rezultatelor obținute cu această relație simplă — printr-un calcul al procesului de ardere care urmărește evoluția reală a fluidului gazos [6] în cilindrul motorului — arată o bună concordanță a valorilor numerice a vitezei aparente de propagare a flăcării.

1. INFLUENȚA AVANSULUI LA DECLANȘAREA SCÎNTEII

Micșorarea duratei fazelor procesului de ardere θ_1 și θ_2 în cazul folosirii supapei cu vizieră, reprezintă o primă indicație asupra oportunității modificării valorii avansului optim.

Pentru a compara influența modificării avansului asupra duratei fazelor arderii θ_1 și θ_2 în cele două cazuri (supapă cu vizieră — SCV și





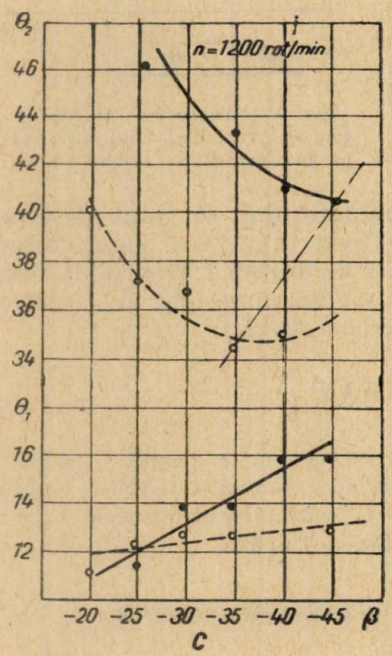


Fig. 4. — Influența avansului la declanșarea scînteii β asupra duratelor θ_1 și θ_2 :

——— supapă normală

– – – – supapă cu vizieră

$a - n = 600$ rot/min ; $b - n = 900$ rot/min ; $c - n = 1200$ rot /min.

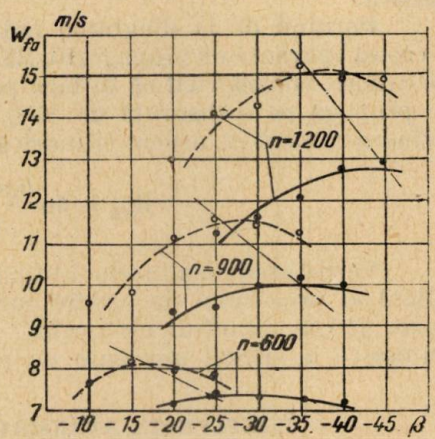


Fig. 5. — Influența avansului β asupra vitezei aparente de propagare a flăcării w_{fa}.

——— supapă normală

– – – – supapă cu vizieră

$\varepsilon = 5$; $\alpha = 1$; $n = 600 - 900 - 1\,200$ rot/min.

supapă fără vizieră — SFV) s-a ales compoziția stoechiometrică a amestecului izooctan-aer ($\alpha = 1$), raportul de compresie $\varepsilon = 5$, și turațiile $n = 600 - 900 - 1\,200$ rot/min (fig. 4 a, b, c).

Evident că aceleași condiții au fost alese pentru a urmări influența avansului asupra vitezei aparente de propagare a flăcării (fig. 5).

Se remarcă că în condițiile turbulenței în curent organizat (SCV), o dată cu creșterea avansului la declanșarea scînteii electrice durata fazei inițiale θ_1 crește, iar durata fazei principale θ_2 prezintă un minim.

Durata fazei principale θ_2 este mai redusă, în toată gama de avansuri explorată, în cazul folosirii supapei cu vizieră decît în cazul supapei obișnuite. În mod corespunzător, viteza aparentă de propagare a flăcării este mai mare în condițiile turbulenței în curent organizat (SCV) decît în condițiile unei turbulențe obișnuite (SFV).

Diagramele prezentate în figurile 4 și 5 scot în evidență și alte aspecte esențiale.

Turbulența în curent organizat modifică valoarea avansului optim reducîndu-l cu circa 10°. Deplasarea avansului optim spre valori mai apropiate de punctul mort superior se operează în toată gama de turații experimentate.

Micșorarea avansului optim decurge în mod firesc, ca urmare a creșterii vitezei de propagare a flăcării și a micșorării duratei totale a arderii (datorită turbulenței în curent organizat).

Poate fi menționat și alt aspect caracteristic, și anume, că pe măsura creșterii turației se produce și o creștere mai accentuată a vitezei aparente de propagare a flăcării (respectiv scăderea mai accentuată a duratei θ_2) datorită turbulenței în curent organizat. Într-adevăr, crește decalajul între curbele exprimînd viteza aparentă de propagare a flăcării, obținute în condițiile utilizării supapei cu vizieră și în condițiile unei supape obișnuite pe măsura trecerii de la turația de $n = 600$ la $n = 900$ rot/min și apoi la $n = 1\,200$ rot/min.

Se pare deci că creșterea turației amplifică efectul turbulenței în curent organizat asupra vitezei aparente de propagare a flăcării.

Se va relua studiul acestui aspect în cele ce urmează.

2. INFLUENȚA TURAȚIEI

Pentru a pune în evidență influența turbulenței în curent organizat, în condițiile variației turației, s-au comparat diagramele indicate medii obținute în cele două alternative — supapă obișnuită și supapă cu vizieră — în următoarele condiții de lucru :

În prima instanță s-a lucrat cu un avans constant la declanșarea scînteii ($\beta = -25°$) cu raportul de compresie $\varepsilon = 6$, cu un coeficient al excesului de aer $\alpha = 0{,}84 - 0{,}88$, în gama de turații $n = 600 - 900 - 1\,200$ rot/min.

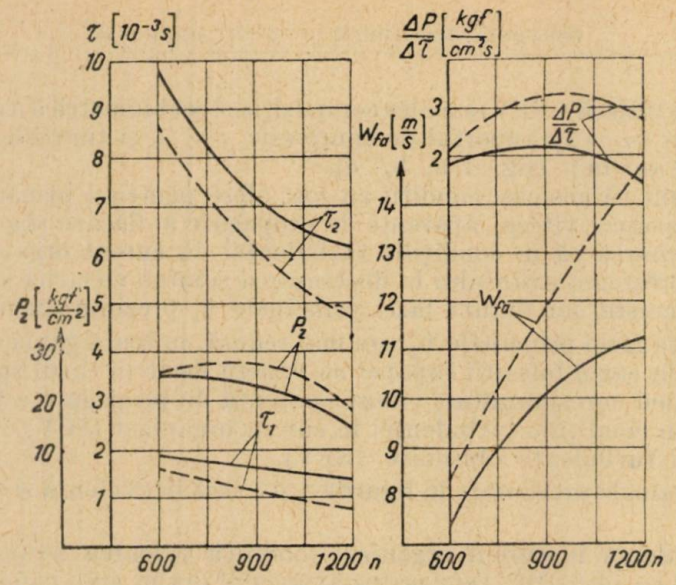


Fig. 6. — Influența turației asupra unor parametri ai procesului de ardere ($\varepsilon = 6$; $\beta = -25°$).

——— supapă normală

– – – – supapă cu vizieră

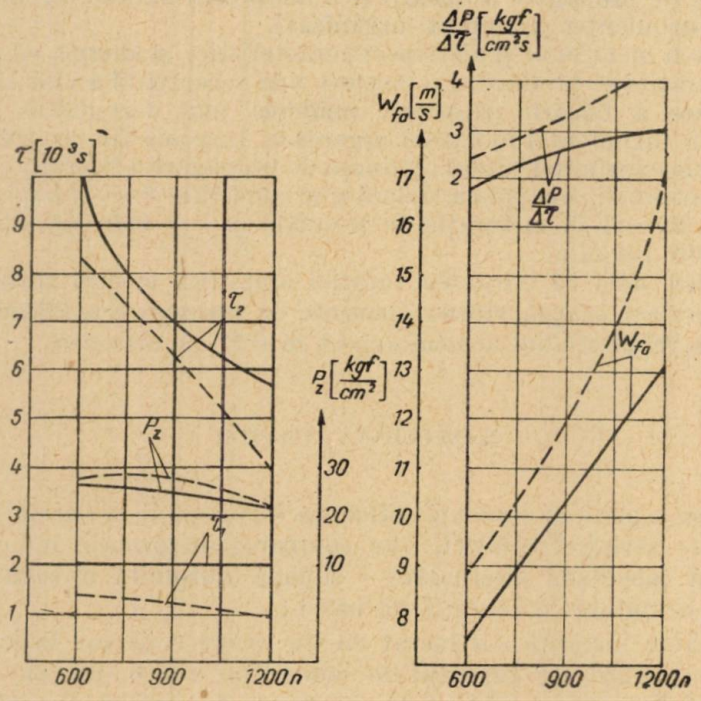


Fig. 7. — Influența turației asupra unor parametri ai procesului de ardere ($\varepsilon = 6$; $\beta = \beta_{opt}$).

——— supapă normală

– – – – supapă cu vizieră

O a doua serie de experiențe s-au făcut în condițiile avansului optim la declanșarea scînteii. Ca atare, s-a lucrat la $\varepsilon = 6$ cu avansurile trecute în tabelă.

Tabelă

	Supapă cu vizieră			Supapă normală		
n	600	900	1 200	600	900	1 200
β	−20°	−25°	−35°	−25°	−35°	−45°

S-au selecționat experiențele corespunzătoare compoziției optime a amestecului combustibil-aer ($\alpha = \alpha_{opt}$), respectiv acele experiențe în care se obținea o viteză aparentă maximă de propagare a flăcării.

Condițiile de lucru și datele rezultate din diagramele indicate au fost reprezentate în figurile 6 și 7.

Atît în condițiile de lucru cu avans constant la declanșarea scînteii (fig. 6) cît și atunci cînd se lucrează cu avans optim (fig. 7) se remarcă că turbulența în curent organizat (supapă cu vizieră) are următoarele influențe :

— micșorează durata fazelor arderii θ_1 și θ_2;

— mărește substanțial (15—30%) viteza aparentă a flăcării W_{fa};

— mărește presiunea maximă P_z și gradul de creștere a presiunii $\frac{\Delta p}{\Delta \tau}$.

Trebuie observat de asemenea că, în privința duratei fazelor arderii și a vitezei aparente de propagare a flăcării, efectul turbulenței în curent organizat este amplificată o dată cu creșterea turației.

3. INFLUENȚA COMPOZIȚIEI AMESTECULUI CARBURANT

Cercetînd influența avansului la declanșarea scînteii și influența turației, în condițiile folosirii supapei cu vizieră și a supapei obișnuite, s-a menținut fie constantă compoziția amestecului, fie s-a acceptat o variație relativ mică în jurul valorii α_{opt} ($\alpha = 0{,}85 - 0{,}90$).

Pentru a detecta în ce măsură turbulența în curent organizat modifică influența cunoscută a compoziției amestecului carburant asupra parametrilor principali ai procesului de ardere, s-au ridicat diagrame medii indicate într-o gamă largă de valori ale coeficientului excesului de aer și anume între $\alpha = 0{,}7$ și $\alpha = 1{,}5$.

Deși experiențele au fost conduse într-o gamă largă de valori ale avansului la declanșarea scînteii, ale raportului de compresie și pentru turațiile $n = 600 - 900 - 1\,200$ rot/min, se vor reproduce numai datele rezultate din diagramele indicate medii corespunzătoare la :

— raportul de compresie $\varepsilon = 6$,

— avansurile $\beta = -25°$ și $\beta = -35°$)

— turație $n = 900$ rot/min,

deoarece acestea sînt tipice pentru ansamblul datelor experimentale (fig. 8,9).

Pentru turația aleasă, $n = 900$ rot/min, avansul optim la declanșarea scînteii este :

— la motorul avînd supapă obișnuită $\beta_{opt} = -35°$ RAC,

— la motorul avînd supapă cu vizieră $\beta_{opt} = -25°$ RAC.

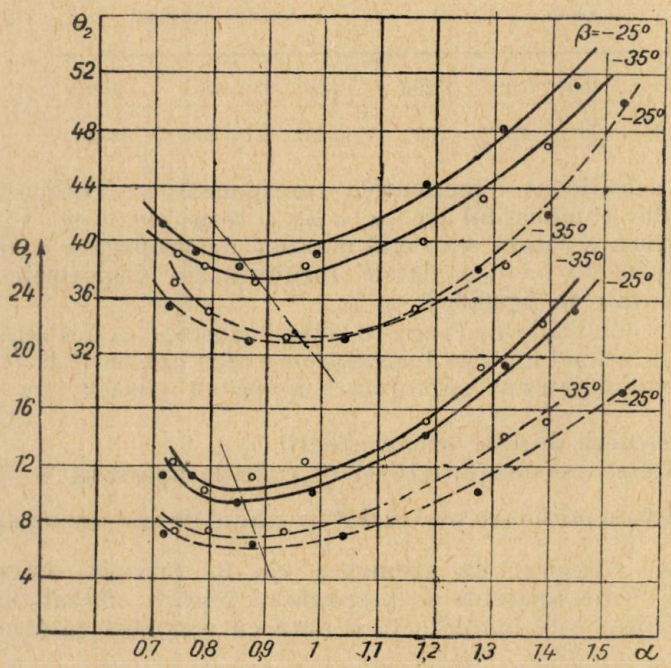


Fig. 8. — Influența compoziției amestecului asupra duratei fazelor θ_1 și θ_2 ($\varepsilon = 6$; $n = 900$ rot/min).

——— supapă normală, $\beta = -35°$;

– – – – supapă cu vizieră, $\beta = -25°$.

În consecință, lucrînd cu cele două avansuri menționate, se pot compara evoluțiile parametrilor procesului de ardere atît la $\beta = \text{const.}$ cît și la $\beta = \beta_{opt}$. Se remarcă însă că, și într-un caz și în celălalt, folosirea supapei cu vizieră determină, în toată gama valorilor coeficientului excesului de aer, următoarele :

— micșorarea duratei fazelor arderii θ_1 și θ_2,

— creșterea vitezei aparente de propagare a flăcării W_{fa},

— mărirea presiunii maxime P_z și a gradului de creștere a presiunii $\frac{\Delta p}{\Delta \theta}$.

Un aspect caracteristic pentru turbulența în curent organizat (supapă cu vizieră) este deplasarea minimului duratei fazelor arderii, respectiv a maximului vitezei aparente de propagare a flăcării, a presiunii maxime și a gradului maxim de creștere a presiunii spre valorile mai ridicate ale

coeficientului excesului de aer. Într-adevăr, în cazul folosirii supapei obișnuite, minimul duratelor θ, și θ_2, ca și maximul W_{fa}, P_z și $\frac{\Delta p}{\Delta \theta}$ se

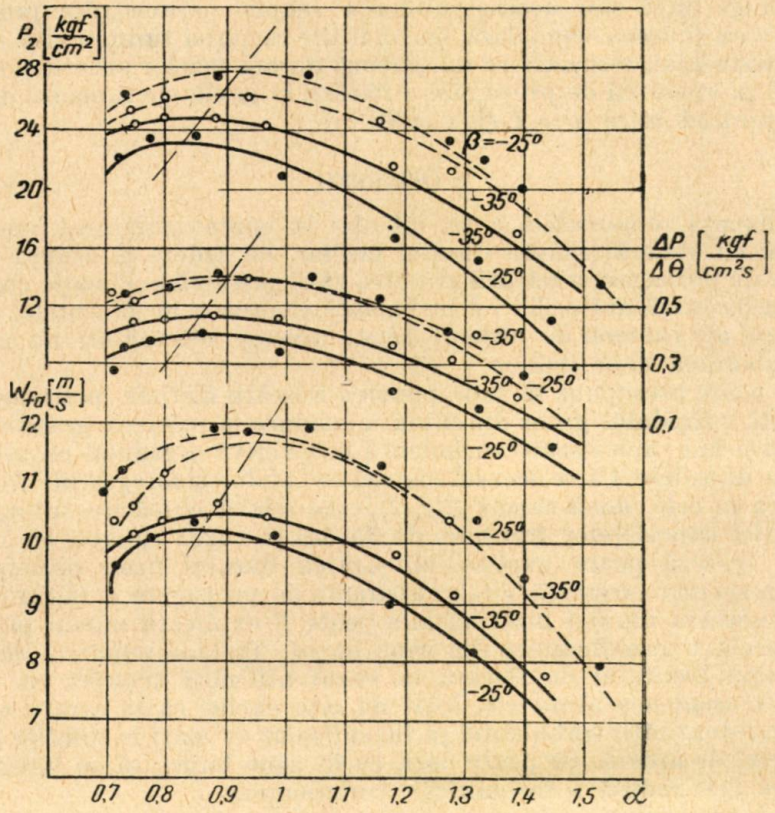


Fig. 9. — Influența compoziției amestecului asupra unor parametri ai procesului de ardere. $\varepsilon=6$; $n=900$ rot/min;
——— supapă normală, $\beta = -35°$;
– – – – supapă cu vizieră, $\beta = -25°$;

plasează în zona $\alpha = 0{,}85 - 0{,}90$, în timp ce în cazul folosirii supapei cu vizieră acestea se deplasează în zona $\alpha = 0{,}90 - 1{,}00$.

Aceasta poate constitui o indicație asupra faptului că eficiența maximă a procesului de ardere se obține în cazul turbulenței în curent organizat, pentru un amestec combustibil-aer mai sărac.

4. INFLUENȚA RAPORTULUI DE COMPRESIE

Pentru a putea compara influența raportului de compresie în condițiile folosirii supapei cu vizieră față de condițiile obișnuite, au fost menținuți constanți toți ceilalți factori, respectiv : temperatura și presiunea

de admisie, compoziția amestecului carburant, turația și avansul la declanșarea scînteii.

Pornind de asemenea de la diagramele indicate, s-a constatat că și în condițiile variației raportului de compresie, turbulența în curent organizat atrage după sine aceeași influență asupra parametrilor procesului de ardere ca și aceea semnalată, în condițiile variației turației și a compoziției amestecului, respectiv se micșorează durata fazelor arderii și se mărește viteza aparentă de propagare a flăcării în gama de rapoarte de compresie cuprinsă între $\varepsilon = 4$ și $\varepsilon = 8$.

5. CONCLUZII

Influența remarcabilă a turbulenței în curent organizat (creată de o supapă cu vizieră) asupra duratei fazelor de ardere și asupra vitezei aparente de propagare a flăcării ar putea să-și găsească explicația completă numai în baza măsurătorilor de turbulență efectuate în diferitele puncte interesante ale camerei de ardere. Lipsa acestor măsurători nu permite decît elaborarea unor ipoteze.

Se poate presupune să suprapunerea mișcării dirijate peste mișcarea turbulentă a fluidului gazos din cilindru conduce la mărirea grandienților de viteză și la o amestecare turbulentă mai activă a gazului proaspăt cu produsele de ardere. Către această ipoteză ne conduc și fotografiile frontului de flacără în cele două cazuri (fig. 2), care relevă o mărire substanțială a proiecției suprafețelor frontului de flacără în cazul supapei cu vizieră. Această ipoteză poate explica micșorarea duratei fazei principale a arderii, respectiv creșterea vitezei aparente de propagare a flăcării.

Micșorarea duratei fazei inițiale poate fi explicată numai prin condițiile specifice gazodinamice din zona bujiei. Trebuie remarcat că însăși configurația frontului de flacără în cazul utilizării supapei cu vizieră prezintă o asemenea asimetrie, încît nu este exclus ca în aceste condiții variațiile intensității turbulenței să fie suficient de mari în diferite puncte ale camerei de ardere. Se poate deci, ca în zona bujiei, să se înregistreze o valoare mai redusă a intensității turbulenței.

În fond, utilizarea supapei cu vizieră nu a fost determinată decît de necesitatea de a ilustra influența modificărilor gazodinamice, care se pot produce în cilindrul motorului, alegînd diferite soluții constructive privind sistemul de admisie sau configurația camerei de ardere.

BIBLIOGRAFIE

1. D. E. Carris, B. I. Mitchell, A. D. Duffie, F. A. Mc. Wyczalek, *Mechanical octanes for higher efficiency*. S.A.E. **64**, New-York, 1956.
2. А. С. Соколик, А. Н. Войнов, Ю. Б. Свиридов, *Влияние химических и турбулентных факторов на процесс сгорания в двигателях*. Изд-во АН СССР, Москва, 1951.
3. B. Salé, *Contribution à l'étude de la combustion normale dans les moteurs à allumage comnade*. Revue de l'Institut français du petrol, *6*, *7*, *8* (1958).
4. C. Aramă, *Arderea normală în motorul cu aprindere prin scînteie*. Metalurgia și construcția de mașini, *8* (1961).
5. C. F. Taylor, E. S. Taylor, *The internal combustion engine Scranton*. Pensylvania, 1958.

CERCETĂRI ASUPRA RADIAȚIEI FLĂCĂRILOR OBȚINUTE ÎN CAZUL ARDERII ÎN DOUĂ ETAPE A GAZULUI METAN

DE

D. GRECOV, I. IORDACHE, E. GUȚU și ATH. TRUȚEA

662. 69

1. INTRODUCERE ȘI SCOPUL CERCETĂRII

Arderea în două etape se caracterizează prin aceea că o parte din combustibil este ars anterior într-o cameră de precombustie, cu un coeficient de exces de aer mai mic sau egal cu unitatea, după care produsele de ardere se amestecă cu combustibilul gazos principal, încălzindu-l la o temperatură ridicată, amestecul astfel format arzînd în etapa finală cu aerul necesar combustiei în camera de ardere.

Cercetările efectuate asupra arderii cu gaze recirculate [1] au arătat că viteza de ardere crește în acest caz, flacăra avînd un caracter mult mai stabil.

În funcție de coeficientul de exces de aer în camera de precombustie, de temperatura finală de preîncălzire a amestecului de gaze (CH_4, CO, CO_2, H_2, N_2) care rezultă din amestecarea gazului metan cu gazele de ardere, viteza de ardere poate fi mult mărită [2], în același timp avînd loc și o creștere a gradului de negreală a flăcării, datorită formării de particule de carbon solid (C_s) în flacără. Formarea particulelor de carbon poate avea loc datorită atît descompunerii termice a gazului metan (piroliza hidrocarburilor) cît și proceselor de reformare în camera de precombustie sau în flacără (autocarburarea) [2], [3], [4].

Prezenta lucrare își propune să analizeze proprietățile radiante ale flăcărilor gazului metan în funcție de temperatura finală a acestuia, temperatură obținută prin amestecarea gazului metan cu gazele de ardere rezultate în camera de precombustie, la un coeficient de exces de aer care a variat în limite restrînse ($\alpha = 0{,}75 \div 0{,}85$ în funcție de stabili-

tatea arzătorului suplimentar). Totodată, s-au variat și condițiile de ardere în camera principală de combustie, prin utilizarea unor arzătoare care realizează o amestecare diferită a gazului metan cu aerul de combustie, aceasta pentru a scoate în evidență importanța procesului de amestecare asupra proprietăților radiante ale flăcărilor, în condițiile arderii în două etape.

2. CONSIDERAȚII GENERALE ASUPRA PROPRIETĂȚILOR RADIANTE ALE FLĂCĂRILOR COMBUSTIBILILOR GAZOȘI

2.1. **Gradul vizibil de negreală al flăcării.** Procesul de transmitere a căldurii prin radiație, în incinta focarelor cuptoarelor metalurgice, depinde în mod direct de cîmpul de temperaturi în flacără și de gradul vizibil de negreală al flăcării.

Conform lucrărilor [4], [5], gradul vizibil de negreală al flăcării C_f este influențat în mică măsură de valoarea gradului de negreală al acesteia ε_f, pentru valori $\varepsilon_f > 0{,}3$ (în special pentru focarele cuptoarelor cu un grad mare de dezvoltare a suprafeței pereților radianți în raport cu suprafața receptoare), crescînd însă foarte rapid cu creșterea lui ε_f în domeniul $\varepsilon_f = 0{,}1 \div 0{,}3$.

Creșterea valorii gradului de negreală al flăcării ε_f de la valoarea 0,05—0,15, caracteristică flăcărilor transparente (datorită radiației în domeniul infraroșu al gazelor triatomice), pînă la o valoare de 0,3—0,4, necesară unui schimb intens de căldură în focarele cuptoarelor industriale, se poate realiza prin autocarburarea flăcării gazului metan.

Arderea în două etape creează premisele necesare formării particulelor de carbon în flacără, atît datorită încălzirii sale la temperaturi ridicate (prin amestec cu gazele arse), cît și proceselor de ardere la un coeficient de exces de aer mai mic decît unitatea în camera de precombustie.

2.2. **Gradul spectral de negreală al flăcării** — ε_λ. Gradul spectral de negreală al flăcării poate fi definit pentru o anumită valoare a lungimii de undă λ cuprinsă în banda de emisie a flăcării

$$\varepsilon_\lambda = \frac{\int_0^s K^*(\lambda)\, I_{0\lambda}\, e^{-\int_0^s k(\lambda)\, ds}\, ds}{\sigma\, T_0^4}, \qquad (1)$$

în care

$K^*(\lambda)$ și $K(\lambda)$ — reprezintă respectiv coeficientul de emisie și de absorbție al flăcării pentru lungimea de undă λ;

$I_{0\lambda} = C_1 \lambda^{-5} \dfrac{1}{e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - 1}$ — intensitatea radiației corpului negru;

T_0 [°K] — temperatura reală a flăcării;

s[m] — grosimea stratului radiant.

Valoarea ε_λ depinde de concentrația particulelor de carbon în flacără, precum și de dimensiunea acestora. Pentru cazul în care diametrul particulelor de carbon este sub $0{,}1 \div 1\mu$, ceea ce corespunde fenomenului de autocarburare a flăcărilor, valoarea coeficientului de emisie $K^*(\lambda)$ va crește cu scăderea lungimii de undă, această dependență fiind reflectată în mod diferit în literatura de specialitate. Astfel în [6] se recomandă $K = K_0 \nu^{1.39}$ (ν — frecvența), în [5] $K = \frac{K_0}{\lambda^n}$ iar în [7] $K = \frac{K_0}{\lambda}$.

Rezultă deci, că, spre deosebire de cazul radiației moleculelor gazelor triatomice, la care coeficientul de emisie K_1 crește cu scăderea temperaturii (datorită deplasării maximului fluxului radiant înspre valori mari ale lungimii de undă), coefientul de emisie K_2 datorit prezenței particulelor de carbon în flacără va crește cu mărirea temperaturii flăcării.

2.3. **Gradul total de negreală al flăcării.** Gradul total de negreală al flăcării corespunde întregii benzi de lungimi de undă pe care se emit radiațiile și este definit prin expresia

$$\varepsilon_f = \frac{\sum\limits_{\Delta(\lambda)i} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \int_s^{s_0} K^*(\lambda)\, I_{0\lambda}\, e^{-\int_s^{s_0} k(\lambda)\, ds}\, ds\, d\lambda}{\sigma\, T_0^4}. \tag{2}$$

Din ecuațiile (1), (2) se observă că în cazul în care se consideră că mărimea $K(\lambda)$ are o valoare constantă în intervalul $\lambda\ (0,\infty)$, ceea ce corespunde emisiei datorită particulelor de carbon de diametru mediu mai mare de 10 μ, mărimea ε_f poate fi definită prin expresia

$$\varepsilon_f = 1 - e^{-ks}.$$

Este important de stabilit ponderea cu care intervine în expresia gradului total de negreală al flăcării ε_f, componenta datorită autocarburării acesteia. Pentru aceasta se iau în considerație cele două expresii ale energiilor distincte emise de flacără (una emisă de moleculele gazelor triatomice E_1, iar cealaltă datorită emisiei particulelor de carbon C_s din flacără E_2)

$$E_1 = \sum_{(\Delta\lambda)i} \int_{\Delta\lambda} \int_0^s K_1^*(\lambda)\, I_{0\lambda}\, e^{-\int_0^s K_1(\lambda)\, ds}\, ds\, d\lambda,$$

$$E_2 = \int_{\lambda=0}^{\infty} \int_0^s K_2^*(\lambda)\, I_{0\lambda}\, e^{-\int_0^s K_2(\lambda)\, ds}\, ds\, d\lambda, \tag{3}$$

în care $K_1^*(\lambda)$ și $K_2^*(\lambda)$ reprezintă coeficienții de emisie ai mediilor radiante aflate în componența flăcării, iar $K_1(\lambda)$ și $K_2(\lambda)$ respectiv coeficienții de absorbție.

Pentru calculul valorii coeficientului total de negreală al flăcării trebuie avut în vedere faptul că se pot întîlni trei cazuri :

a) Benzile de absorbție și radiație ale mediilor radiante nu au nici o zonă comună ;

b) Mediile radiante emit în tot intervalul lungimilor de undă λ ;

c) Benzile de emisie au anumite zone în care se suprapun.

În primul caz valoarea energiei totale emise poate fi calculată prin integrarea după λ a fluxurilor radiante

$$E = \sum_{(\Delta\lambda)\, i} \int_{\Delta\lambda} \int_0^s K_1^*(\lambda)\, I_{0\lambda}\, e^{-\int_0^s K_1(\lambda)\, ds} ds\, d\lambda + \\ + \int_{\lambda=0}^{\infty} \int_0^s K_2^*(\lambda)\, I_{0\lambda}\, e^{-\int_0^s K_2(\lambda)\, ds} ds\, d\lambda. \tag{4}$$

Dacă se ține seama de relațiile

$$\varepsilon_f = \frac{E}{\sigma T_0^4},$$

și

$$\int_{\lambda=0}^{\infty} \int_0^s K\, I_{0\lambda}\, e^{-\int_0^s K\, ds} ds\, d\lambda = \sigma T_0^4 (1 - e^{-ks}), \tag{5}$$

rezultă că

$$\varepsilon_f = (1 - e^{-K_1 s}) + (1 - e^{-K_2 s}) = \varepsilon_{g_1} + \varepsilon_{g_2}. \tag{6}$$

Trebuie subliniat că în general formula (6) exprimă gradul total de negreală al flăcării (cînd se cunosc valorile coeficienților de negreală datoriți emisiei gazelor triatomice și respectiv particulelor de carbon C_s), deoarece în acest caz emisia gazelor triatomice are loc la lungimi mari de undă (de ordinul $\lambda = 2\mu$), în timp ce emisia particulelor de carbon din flacără, rezultate prin autocarburare, datorită dimensiunilor lor mici ($d_m < 0{,}1$) [3], [6], avînd valori ridicate numai pentru lungimi de undă foarte mici ($\lambda < d_m$), radiația lor în domeniul infraroșu poate fi neglijată.

În cazul în care emisia și absorbția are loc pe întregul interval al lungimilor de undă λ [0, ∞], expresia energiei totale poate fi scrisă sub forma

$$E = \int_{\lambda=0}^{\infty} (I_{\lambda_1} + I_{\lambda_2})\, d\lambda$$

sau

$$E = \int_{\lambda=0}^{\infty} \int_0^s K_1^*\, I_{0\lambda}\, e^{-\int_0^s (K_1 + K_2)\, ds} ds\, d\lambda + \int_{\lambda=0}^{\infty} \int_0^s K_2^*\, I_{0\lambda}\, e^{-\int_0^s (K_1 + K_2)\, ds} ds\, d\lambda, \tag{7}$$

în care

K_1^* și K_2^* — coeficienții de emisie ai celor două medii radiante;

$K_1 + K_2$ — coeficientul de absorbție, care reprezintă suma coeficienților de absorbție ai celor două medii radiante.

Dacă se admite $K = \text{const.}$, prin integrarea ecuației (7) rezultă

$$\varepsilon_f = 1 - e^{-(K_1+K_2)\,s}, \tag{8}$$

ceea ce conduce la expresia

$$\varepsilon_f = \varepsilon_{g_1} + \varepsilon_{g_2} - \varepsilon_{g_1}\,\varepsilon_{g_2}. \tag{9}$$

Rezultă clar că, în cazul cînd mediile radiante au numai anumite benzi ale spectrelor de emisie care se suprapun, valoarea ε_f va fi mai ridicată decît cea găsită prin ecuația (9).

În general, în cazul unor suprapuneri parțiale a benzilor de emisie și absorbție a corpurilor radiante, pentru determinarea valorii ε_f se poate recomanda o expresie de forma

$$\varepsilon_f = \varepsilon_{g_1} + \varepsilon_{g_2} - \beta\,\varepsilon_{g_1}\,\varepsilon_{g_2}, \tag{10}$$

în care coeficientul β va depinde de gradul de suprapunere a benzilor spectrelor de emisie, fiind nul pentru cazul în care benzile nu se suprapun și egal cu unitatea pentru o suprapunere totală a benzilor spectrale.

2.4. **Influența cîmpului de temperaturi asupra gradului de negreală a flăcării.** Problema influenței cîmpului de temperaturi asupra gradului de negreală a mediilor radiante de grosime finită devine mai complexă în cazul în care cîmpul de temperaturi al acestora este variabil în lungul razei lor optice [$T = T(s)$], ceea ce în general are loc în flăcări, unde temperatura scade mult de la centru spre periferie, în special pentru focarele cu pereții intens răciți.

În cazul flăcărilor difuzive, temperatura scade de la centru spre periferie nu numai datorită răcirii gazelor de ardere ci și faptului că zona de reacție gaze-aer are loc într-un spațiu apropiat de zona amestecului stoechiometric, care se află în apropierea axului flăcării, existînd totuși o tendință de egalizare a temperaturilor la o anumită distanță de la capul arzătorului.

Pentru definirea gradului de negreală al flăcării, în acest caz, trebuie pornit de la expresia energiei radiante emise,

$$E = \int_0^{\lambda} \int_0^{s} K^*\, I_{0\lambda}\, e^{-\int_0^s K\,ds}\, ds\, d\lambda, \tag{11}$$

care după integrarea în funcție de lungimea de undă devine

$$E = \int_0^{s} K^*\, \sigma\, [T(s)]^4\, e^{-\int_0^s K\,ds}\, ds. \tag{12}$$

Dacă se consideră că flacăra poate fi asimilată cu un corp ce emite la o temperatură T_m constantă în lungul razei optice, se poate defini tem-

peratura T_m la care energia radiantă a flăcării cu cîmpul de temperaturi variabil $T = T(s)$ este egală cu energia radiantă a corpului considerat,

$$\frac{E}{E_m} = 1 = \frac{\sigma K \int_0^s [T(s)]^4 \, e^{-\int_0^s K\,ds} \, ds}{\sigma T_m^4 (1 - e^{-ks})}, \tag{13}$$

de unde rezultă că temperatura medie de calcul va fi

$$T_m = \sqrt[4]{\frac{K \int_0^s [T(s)] e^{-\int_0^s K\,ds} \, ds}{1 - e^{-Ks}}} \tag{14}$$

Valoarea temperaturii medii T_m va depinde de forma curbei de variație a temperaturii $T = T(s)$ în funcție de raza optică.

Dacă se consideră diferența dintre temperatura maximă la centru și cea minimă la periferia flăcării ($\Delta T = T_{max} - T_{min}$) și se admite o variație parabolică sau liniară a temperaturii în lungul razei optice, ceea ce în general corespunde realității, calculul valorii lui T_m pe baza expresiei (14) conduce la o relație de forma

$$\varphi = f\left[\left(\frac{\Delta T}{T_{max}}\right), (ks)\right],$$

în care

$$\varphi = \frac{T_m}{T_{max}} \tag{15}$$

care se poate calcula pentru diferite valori $\frac{\Delta T}{T_{max}}$.

Valoarea mărimii φ poate varia în limite largi, pentru cîmpurile de temperaturi măsurate în flăcările realizate în instalația experimentală obținîndu-se valori ale lui φ de ordinul $\varphi = 0{,}72 - 0{,}81$.

Se observă deci că numai pentru cazul în care se admite o valoare medie a temperaturii în flacără T_m calculată conform (14), expresia gradului de negreală al flăcării va avea aceeași formă ca și în relația (8), ceea ce impune necesitatea calculării valorii ε_f la temperatura T_m.

2. 5. **Gradul de negreală al flăcării datorit particulelor de carbon.** Pentru a calcula gradul de negreală al flăcării ε_{g_2} cînd se cunoaște gradul spectral de negreală ε_λ, și modul de variație al coeficientului de emisie în funcție de lungimea de undă, folosind relația lui Wien se obține expresia

$$\varepsilon_{g_2} = \frac{E}{\sigma T_m^4} = \frac{\int_{\lambda=0}^{\infty} C_1 \lambda^{-5} \, e^{-C_2/\lambda T_m} (1 - e^{-K(\lambda) s}) \, d\lambda}{\sigma T_m^4}, \tag{16}$$

în care $k(\lambda)$ poate fi luat în general $k(\lambda) = \dfrac{K_0}{\lambda^n + a}$ (a este un coeficient care ține seama de dimensiunile particulelor de carbon și de faptul că la $\lambda = 0$ mărimea $k(\lambda)$ trebuie să aibă o valoare finită).

Integrarea numărătorului expresiei (16) nu este posibilă pe cale analitică, ceea ce face să se caute o relație aproximativă, ușor integrabilă, pentru funcția $k = k(\lambda)$.

Dacă se admite $k(\lambda) = \dfrac{K_0}{\lambda}$ și se definește o valoare T'[7] care să satisfacă relația

$$\frac{C_2}{\lambda T_m} + \frac{K_0 s}{\lambda} = \frac{C_2}{\lambda T'}, \tag{17}$$

sau

$$T' = \frac{C_2 T_m}{C_2 + K_0 T_m s}, \tag{17'}$$

atunci integrarea analitică a numărătorului expresiei (16) devine posibilă, obținîndu-se

$$\int_\lambda C_1 \lambda^{-5} e^{-C_2/\lambda T_m} \, d\lambda - \int_\lambda C_1 \lambda^{-5} e^{-C_2/\lambda T'} \, d\lambda = \varepsilon_{\vartheta_2} \sigma T_m^4,$$

de unde prin integrare rezultă

$$\varepsilon_{\vartheta_2} = 1 - \left(\frac{T'}{T_m}\right)^4, \tag{18}$$

în care T' este definit prin relația (17').

Pentru a determina valoarea K_0 care intră în expresia (17'), este suficient să se găsească o valoare a gradului de negreală pentru o anumită lungime de undă $\lambda_0(\varepsilon_{\lambda_0})$ care este dat de expresia

$$\varepsilon_{\lambda_0} = 1 - e^{-\frac{K_0}{\lambda_0} s}, \tag{19}$$

de unde

$$K_0 = \frac{\lambda_0}{s} \operatorname{colog}_e (1 - \varepsilon_{\lambda_0}). \tag{20}$$

Introducînd mărimea k_0 obținută, în expresia lui $\varepsilon_{\vartheta_2}$ dată de (18) rezultă

$$\varepsilon_{\vartheta_2} = 1 - \left[\frac{C_2}{C_2 + \lambda_0 T_m \operatorname{colog}_e (1 - \varepsilon_{\lambda_0})}\right]^4. \tag{21}$$

Valorile $\varepsilon_{\vartheta_2}$ în funcție de ε_{λ_0}, pentru diferite valori ale temperaturii T_m, sînt prezentate în figura 1, de unde rezultă că pentru valori $\varepsilon_{\lambda_0} < 0{,}3$ valorile $\varepsilon_{\vartheta_2}$ nu depășesc valoarea 0,1.

Pe de altă parte, se poate deduce (în cazul în care se cunoaște cîmpul de temperaturi în flacără și energia radiantă emisă de flacără pentru grosimea s a acesteia, care se poate măsura cu un pirometru cu radiație totală) valoarea gradului total de negreală al flăcării ε_f, datorit atît particulelor de carbon cît și moleculelor gazelor triatomice din flacără pe baza expresiei

$$\varepsilon_f = \left[\frac{T_r}{T_m}\right]^4, \tag{22}$$

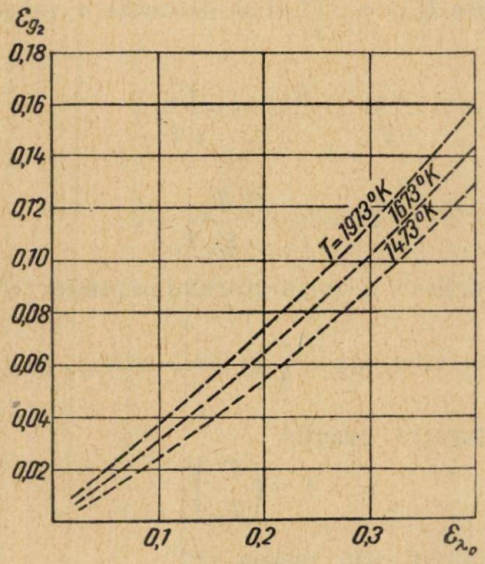


Fig. 1. — Variația lui ε_{g_2} în funcție de $\varepsilon_{\lambda 0}$.

în care T_r [°K] este temperatura de radiație a flăcării.

Deoarece pe baza literaturii [8], [9] se poate calcula cu suficientă aproximație, valoarea gradului de negreală ε_{g_1}, datorit radiației în domeniu infraroșu (cunoscînd compoziția medie și temperatura medie a gazelor de ardere în flacără), determinarea lui ε_f pe baza măsurării temperaturii de radiație a flăcării (formula (22)), va permite să se calculeze valoarea gradului de negreală ε_{g_2} datorit numai prezenței particulelor de carbon în flacără ($\varepsilon_{g_2} = \varepsilon_f - \varepsilon_{g_1}$).

3. INSTALAȚIA EXPERIMENTALĂ ȘI MODUL DE EXPERIMENTARE

Instalația experimentală prezentată în figura 2 constă dintr-o cameră răcită de ardere (Ø 500 mm) avînd cîte nouă orificii (Ø50 mm) de explorare a flăcării, de o parte și de alta a camerii, pe același ax al flăcării în lungul acesteia.

Camera de ardere este răcită cu ajutorul a zece camere circulare, amplasate la o distanță egală (l = 21 cm) răcite cu apă, pentru a se putea

observa cum variază fluxul de căldură transmis de flacără la peretele camerei de ardere, în lungul acesteia.

O parte din gazul metan este ars în camera de precombustie la un coeficient de exces de aer subunitar ($\alpha = 0{,}75 \div 0{,}85$) după care gazele de ardere se amestecă, în conducta de amestecare, cu debitul principal de gaz metan, realizîndu-se în acest fel un grad ridicat de preîncălzire (fig. 2).

Capul principal de ardere, permite să se realizeze diferite grade de amestecare a aerului cu amestecul combustibil, prin alegerea orificiilor de ieșire ($\varnothing_e$) a combustibilului, de diametre diferite, jetul de combustibil fiind paralel cu jetul periferic de aer, prin amplasarea frontală a orificiilor ($\varnothing_e^a = 8$ mm și $\varnothing_e^b = 20$ mm).

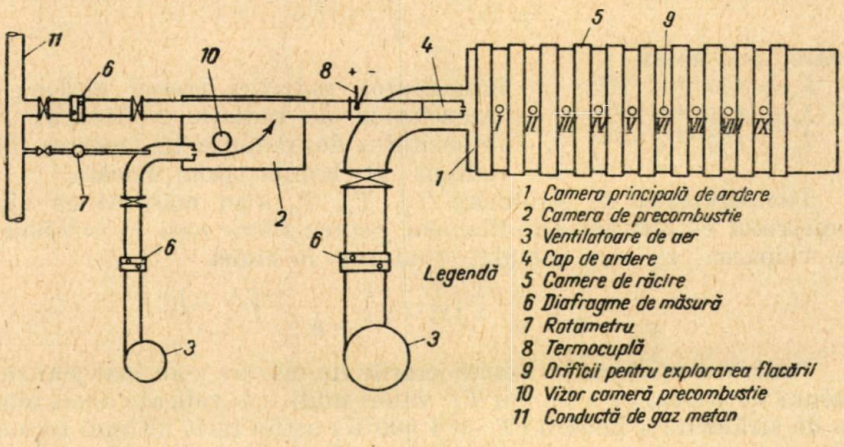


Fig. 2. — Schema instalației experimentale.

Pentru stabilizarea periferică a flăcării au fost practicate în capul de ardere, 15 orificii laterale de diametru $\varnothing_e = 2$ mm, prin care combustibilul este injectat perpendicular pe jetul de aer.

Pentru a se realiza o flacără cu un grad ridicat de omogenizare prealabilă între amestecul combustibil și aerul de combustie, la intrare în camera de ardere, s-a adaptat și un cap de ardere cu 40 de orificii de $\varnothing_e = 2$ mm, amplasate lateral pe capul de ardere.

Instalația a fost echipată cu aparatajul de măsură adecvat pentru măsurătorile de debit a apei de răcire, ce se vehiculează prin camerele de răcire, a temperaturilor apei la intrare și ieșire din acestea, precum și a debitelor principale și secundare ale combustibilului și aerului (vezi fig. 2).

Temperaturile în flacără au fost măsurate zonal cu ajutorul metodei inversiei spectrale, iar în apropierea pereților, în zonele mai reci ale gazelor de ardere, acestea măsurîndu-se cu o termocuplă cu sudură descoperită și ecranată.

Gradul spectral de negreală al flăcării a fost măsurat cu ajutorul unui pirometru cu dispariție de filament și al unei lămpi de radiație, etalon, conform metodei descrise în [3], [6].

Temperaturile de radiație a flăcării s-au măsurat cu ajutorul unui pirometru cu radiație totală, iar compozițiile chimice ale gazelor de ardere s-au determinat în lungul flăcării, pentru a se putea stabili lungimea acesteia, precum și modul cum decurge arderea în lungul ei (excesele locale de aer).

4. REZULTATELE EXPERIMENTALE ȘI INTERPRETAREA LOR

Coeficientul spectral de negreală al flăcării, pentru $\lambda_0 = 0{,}65\ \mu$ s-a măsurat pe baza formulei

$$\varepsilon_{\lambda 0} = \frac{I_1 + I_2 - I_3}{I_1}, \tag{23}$$

în care s-a notat

$I_1 = C_1 \lambda^{-5} e^{-C_2/\lambda T_1}$ — intensitatea radiației lămpii etalon;
$I_2 = C_1 \lambda^{-5} e^{-C_2/\lambda T_2}$ — intensitatea de radiație a flăcării;
$I_3 = C_1 \lambda^{-5} e^{-C_2/\lambda T_3}$ — intensitatea de radiație la trecerea fluxului radiant al lămpii prin flacără.

Temperaturile de strălucire T_1, T_2, T_3 s-au măsurat cu ajutorul pirometrului cu dispariție de filament pentru filtru roșu $\lambda_0 = 0{,}65\mu$ după care valoarea $\varepsilon_{\lambda 0}$ s-a calculat conform formulei.

$$\varepsilon_{\lambda 0} = 1 - e^{-\frac{C_2}{\lambda}\left(\frac{1}{T_3} - \frac{1}{T_1}\right)} + e^{-\frac{C_2}{\lambda}\left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right)}. \tag{24}$$

Pentru a micșora la minim erorile de măsură s-au luat pentru temperatura de strălucire a lămpii T_1 valori mult mai ridicate decît temperatura de strălucire a flăcării ($T_1 >$ 1 600°K) astfel încît ultimul termen din relația [24] poate fi neglijat, la valori ale temperaturii de strălucire al flăcării $T_2 <$ 1 000°K.

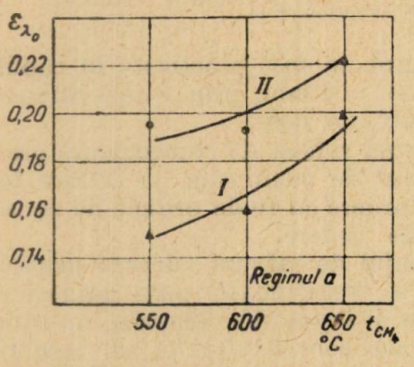


Fig. 3. — Variația lui ε_{λ_0} în funcție de temperatura de preîncălzire a gazului metan.

Valorile $\varepsilon_{\lambda 0}$ calculate pe baza formulei (24) se dau în figura 3, în funcție de temperatura de încălzire a gazului metan în amestec cu gazele arse, pentru regimul „a" de ardere (corespunzător capului de ardere cu orificiu frontal Ø 8 mm) la care s-a observat o colorare slabă a flăcării, ea crescînd într-o măsură oarecare cu creșterea gradului de preîncălzire a gazului.

Măsurătorile compoziției gazelor de ardere au arătat că arderea se termină la circa 0,50 m (fig. 4, *a*, *b*, *c*) flacăra devenind puternic pulsatorie, cînd temperatura de preîncălzire a gazului metan depășește 670 — 680°C.

Flacăra are un puternic caracter turbulent datorită vitezei ridicate de ieșire a amestecului combustibil din capul de ardere (vezi tabela) cu nuclee luminoase datorită caracterului parțial difuziv al flăcării.

Coeficientul spectral de negreală ε_λ nu depășește valoarea 0,22 pentru preîncălzirea optimă de 650°C atinsă în instalație, la ieșirea din tubul de amestecare. Aplicarea formulei (21) pentru calculul coeficientului total de negreală datorit particulelor de funingine în flacără conduc la valori ε_{g_2} între 0,05 și 0,07 (fig. 5).

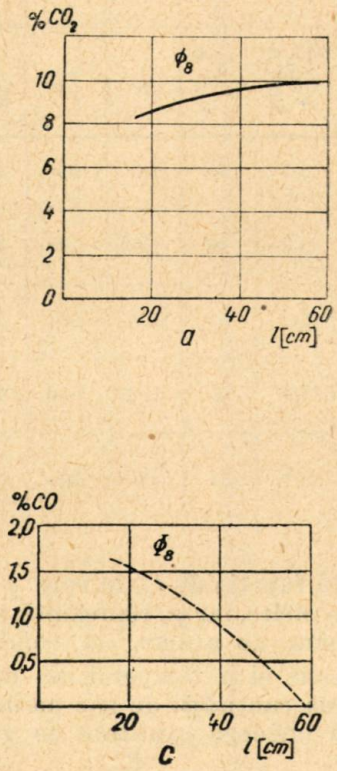


Fig. 4. — Variația compoziției chimice a gazelor de ardere în lungul flăcării (regimul *a*).

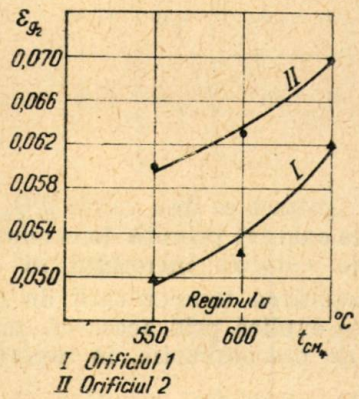


Fig. 5. — Variația lui ε_{g_2} în funcție de ε_{λ_0} și de temperatura de preîncălzire a gazului metan.

Din figura 5 se observă că pentru o creștere a temperaturii de preîncălzire a amestecului combustibil de la 550 la 650°C, gradul de negreală al flăcării ε_{λ_0} crește în medie cu circa 16 — 20%.

Trebuie subliniat că determinările gradului de negreală ε_λ, pentru temperatura de preîncălzire sub 500°C au condus la valori foarte mici ale gradului de negreală al flăcării, care nu au putut fi măsurate cu precizia necesară.

Din tabelă se remarcă că temperatura maximă a flăcării și temperatura de radiație are o tendință de cădere cu mărirea temperaturii de preîncălzire a amestecului combustibil t_p, ceea ce se reflectă de altfel și în micșorarea fluxului termic radiat la suprafețele receptoare de căldură.

Tabelă

	Diametrul orificiului frontal al capului de ardere mm	Camera de precombustie			Camera principală de ardere			Temp. gazului metan	Viteza gazului metan și aerului	
		1			2			3	4	
		V'_{CH_4} Nm³/h	V'_{aer} Nm³/h	α'	V''_{CH_4} Nm³/h	V'_{aer} Nm³/h	α'	t_{CH_4} °C	W_{CH_4} Nm/s	W_{aer} Nm/s
regimul *a*	$\varnothing_e = 8$	1,2	9,75	0,854	5,7	55	1,0	550	42,0	3,1
	$\varnothing_e = 8$	1,4	11,5	0,864	5,5	56	1,03	600	46,5	3,11
	$\varnothing_e = 8$	1,52	11,5	0,795	5,7	55	1,0	650	47,2	3,1
	$\varnothing_e = 8$	1,56	11,25	0,757	5,0	55	1,06	680	45,2	3,1
regimul *b*	$\varnothing_e = 20$	1,37	10,0	0,766	5,7	54	1,0	660	13,1	3,0

În figura 6 se dau valori $q/Q_0\%$ în funcție de t_p, în care q este cantitatea de căldură primită de camera de răcire, iar Q_0 reprezintă cantitatea totală de căldură introdusă în camera de ardere, cu combustibilul.

Micșorarea temperaturii de radiație și a temperaturii maxime în flacără se explică prin aceea că, mărirea cantității de gaz metan arsă în camera de precombustie, în raport cu întreaga cantitate de gaz metan arsă în instalație (din tabelă se vede că raportul $\frac{v'_{CH_4}}{v'_{CH_4} + v''_{CH_4}}$ a crescut de la 17,4 la 24% cînd temperatura de preîncălzire a amestecului combustibil a crescut de la 550 la 680°C) conduce la o micșorare a temperaturii de ardere, deoarece crește cantitatea de căldură pierdută în mediu ambiant de gazele arse în camera de precombustie.

Depășirea temperaturii de 650°C conduce în cazul instalației de experimentare existente la apariția unor pulsații puternice în flacără (transmise flăcării de pulsațiile ce iau naștere în camera de precombustie) care dau naștere unui caracter puternic turbulent al flăcării (flacăra scurtîndu-se mult la $l < 0{,}3$ m), caracterul luminos al flăcării, micșorîndu-se în consecință.

Pentru a mări gradul de negreală al flăcării datorit particulelor de C_s, s-a adoptat un cap de ardere, cu un orificiu frontal cu $\varnothing = 20$ mm, ceea ce a impus un caracter puternic difuziv flăcării (regimul *b*).

Temp. de radiație a flăcării			Temp. maximă a flăcării			Temp. medie a flăcării			Temp. de strălucire a flăcării			Observații
5			6			7			8			
Tr I °K	Tr II °K	Tr III °K	T_{max} I °K	T_{max} II °K	T_{max} III °K	T_m I °K	T_m II °K	T_m III °K	Ts I °K	Ts II °K	Ts III °K	
950	910	—	2 089	2 013	—	1 510	1 495	—	1 250	1 210	—	Flacăra slab luminată.
935	898	—	2 043	1 933	—	1 480	1 430	—	1 230	1 200	—	Flacăra slab luminată.
918	850	—	1 973	1 873	—	1 420	1 395	—	1 205	1 190	—	Flacăra slab luminată.
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	Flacăra puternic pulsatorie
860	930	880	1 725	1 803	1 725	1 300	1 370	1 300	1 213	1 295	1 215	Flacăra intens luminată

Flacăra a devenit intens luminoasă, s-a mărit lungimea flăcării la circa 1 m (fig. 7*a*, *b*, *c*) temperatura medie în flacără micșorîndu-se în consecință (tabela).

S-a remarcat, de asemenea, o puternică micșorare a pulsațiilor în flacără, deși temperatura de preîncălzire s-a ridicat la 660—680°C.

Din figura 8 în care se dau valorile ε_{λ_0} în lungul flăcării, se observă că gradul de negreală are o tendință de creștere în lungul flăcării, ca urmare a unei formări abundente de particule de carbon în flacără, dat fiind caracterul difuziv turbulent al flăcării ; în general mărimea ε_{λ_0} crește mult în raport cu valoarea găsită pentru primul regim de ardere (fig. 3).

Valorile gradului de negreală total datorită particulelor de carbon ε_{g_3}, calculate pe baza formulei (21) sînt date în figura 9.

Trebuie subliniat faptul că deși gradul de negreală crește, totuși scăderea temperaturii medii în flacără T_m (vezi tabela) a condus la o micșorare a fluxurilor termice receptate de suprafețele răcite cu apă în lungul flăcării, observîndu-se o deplasare a nucleului cald al flăcării spre zonele II și III, adică la o distanță de 0,4—0,6 m de capul de ardere (fig. 6).

Pentru a scoate în evidență influența procesului de omogenizare asupra radiației flăcării în cazul arderii în două etape s-a experimentat un cap de ardere în care amestecul combustibil preîncălzit la 650°C, era injectat prin 40 de orificii $Ø_e = 2$ mm, perpendicular pe jetul principal de aer.

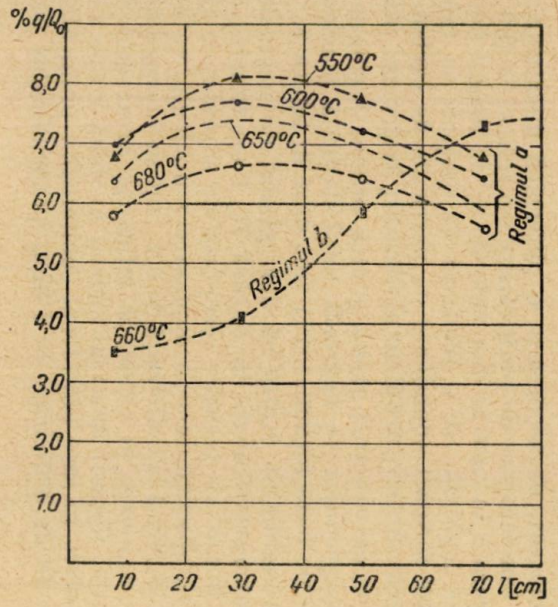


Fig. 6. — Variația procentuală a fluxului termic primit de camerele de răcire (q/Q_0).

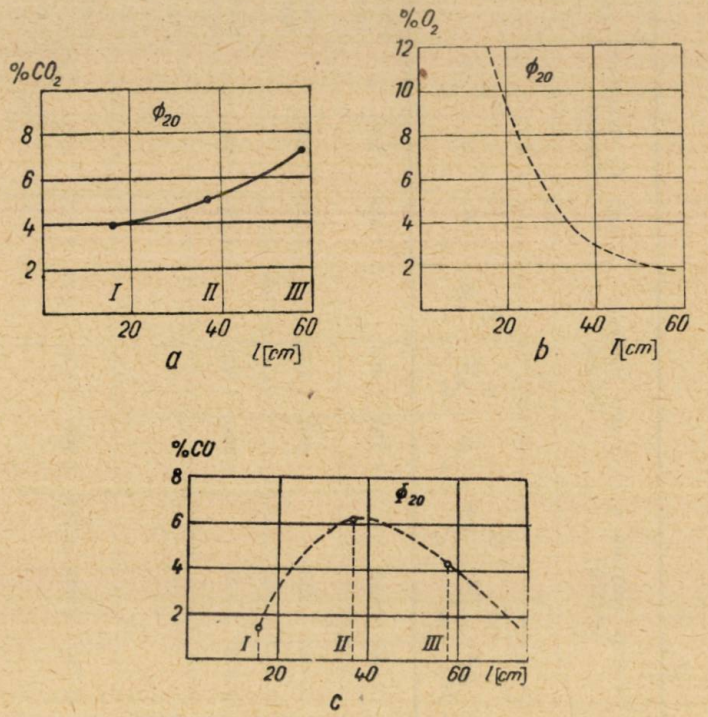


Fig. 7. — Variația compoziției chimice a gazelor de ardere în lungul flăcării (regimul *b*).

S-a observat în acest caz că flacăra se scurtează mult și devine complet transparentă, în domeniu vizibil ($\lambda_0 = 0{,}65\ \mu$) deși prezența particulelor de carbon în amestecul combustibil era foarte probabilă datorită proceselor de reformare și piroliză ce au avut loc în camera de precombustie și în tubul de amestecare gaze arse-gaz metan. Se poate presupune că particulele de carbon solid intrînd în zona de reacție la temperatura ridicată 1 400—1 600°C intră în reacție cu moleculele de CO_2 și H_2O, trecînd în CO.

Această observație reprezintă un indiciu concludent al influenței puternice pe care o are procesul de amestecare a combustibilului gazos

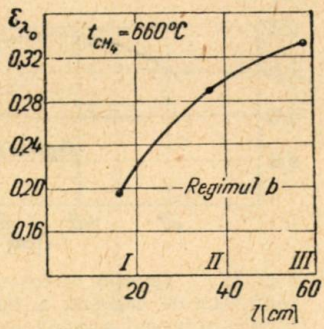


Fig. 8. — Variația lui ε_{λ_0} în lungul flăcării.

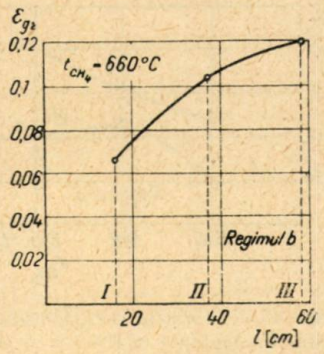


Fig. 9. — Variația lui ε_{g_2} în lungul flăcării în funcție de ε_{λ_0}.

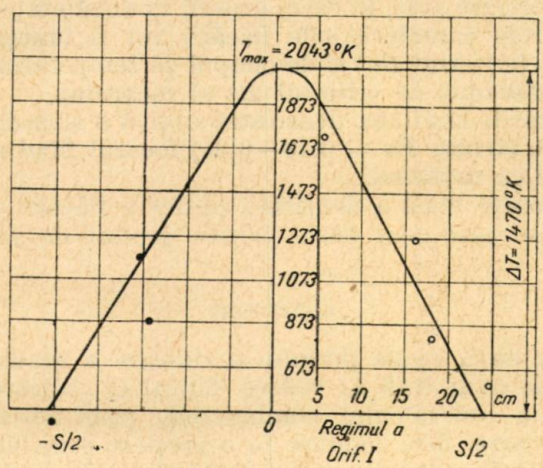


Fig. 10. — Variația temperaturii în flacără în lungul razei optice a acesteia.

cu aerul de combustie, asupra caracterului flăcării și proprietățile ei radiante, autocarburarea flăcării putînd fi realizată numai în anumite condiții de ardere turbulent difuzivă.

Măsurătorile temperaturilor de radiație, cu ajutorul pirometrului cu radiație, totală au condus la valori T_r date în tabelă, iar măsurarea cîmpului de temperaturi a flăcării a permis să se calculeze temperatura medie în flacără corespunzător formulei (14) (fig. 10).

Valorile ε_f (fig. 11 și 12) care caracterizează coeficientul de negreală total datorit particulelor și prezența moleculelor triatomice în flacără s-a calculat conform formulei (22), măsurînd temperatura de radiație T_r și temperatura medie T_m în flacără.

Trebuie subliniat faptul că dependența gradului de negreală datorit autocarburării flăcării, în funcție de temperatura de preîncălzire a ames-

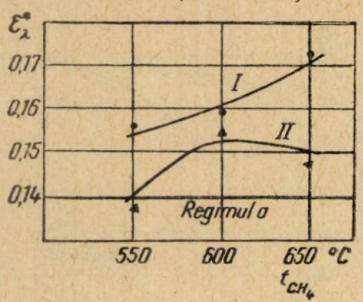


Fig. 11. — Variația coeficientului total de negreală al flăcării ε_f în funcție de temperatura de preîncălzire a gazului metan (regimul *a*).

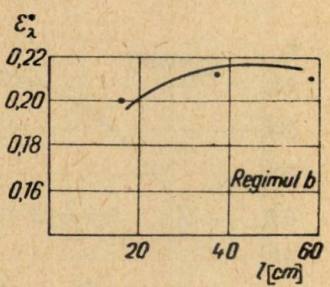


Fig. 12. — Variația coeficientului total de negreală al flăcării ε_f în lungul acesteia (regimul *b*).

tecului gaz metan-gaze arse, în cazul arderii în două etape are un caracter orientativ, deoarece caracteristicile flăcării vor fi funcție de densitatea optică a stratului (criteriul *Bu*) și de cîmpul de temperatură în flacără care este puternic influențat de criteriul *Bo* al focarului.

Pentru cazurile studiate, densitatea optică a stratului radiant (Ks_0) a variat în limite strînse $Bu = 0{,}18-0{,}35$) focarul fiind răcit cu un grad de ecranare egal cu unitatea.

Valoarea foarte mică a densității optice a flăcării explică de altfel valori relativ mici care s-au găsit pentru gradul de negreală total al flăcării.

CONCLUZII

Arderea în două etape permite o ridicare a gradului de negreală a flăcării, trebuie avut însă în vedere faptul că ridicarea temperaturii de preîncălzire a amestecului combustibil, prin amestecarea gazului metan cu gazele arse, deși conduce la o creștere sensibilă a gradului de negreală a flăcării (datorită prezenței particulelor de carbon), totuși apariția pulsațiilor în camera de precombustie poate conduce la o ardere instabilă.

Micșorarea pulsațiilor se poate realiza prin micșorarea presiunii dinamice a gazelor la ieșire din capul de ardere sau printr-o dimensionare adecvată a camerei de precombustie.

Dat fiind faptul că arderea în două etape se caracterizează printr-o stabilitate ridicată (viteza de ardere este mult mai mare decît în cazul arderii simple, fiind funcție de temperatura finală a amestecului combustibil și de coeficientul de exces de aer în camera de precombustie) și printr-un coeficient de negreală relativ ridicat, acest procedeu de ardere poate fi utilizat în cazul cuptoarelor la care se cere o flacără cu proprietăți radiante relativ ridicate.

Primit la redacție la 15 noiembrie 1963

BIBLIOGRAFIE

1. CLAUDE KARR, *L'influence de la récirculation des produits de la combustion sur la vitesse de flamme*. Revue générale de thermique, II, *17* (1963).
2. E. PERTHUIS, *Amélioration des qualités de stabilisation des flammes de gaz naturel par l'utilisation d'un procédé de combustion en deux étapes*. Revue générale de thermique, **1**, *11* (1962).
3. A. G. GAYDON, H. G. WOLFHARD, *Flames and their structure, radiation and temperature*.
4. И. М. РАФАЛОВИЧ, *Природный газ как топливо для металлургических печей*. Москва, 1961.
5. А. В. КАВАДЕРОВ, *Тепловая работа пламенных печей*. Свердловск, 1956.
6. А. Е. КАДЫШЕВИЧ, *Измерение температуры пламени*, Москва, 1961.
7. A. GOUFFE, *Considérations sur le rayonnement des flammes éclairants*. Revue générale de Thermique **II**, *19* (1963); **II**, *20* (1963).
8. М. А. МИХЕЕВ, *Основы теплопередачи*. Москва-Ленинград, 1956.
9. MC. ADAMS, *Heat transmission*. McGraw-Hill, Book Co. (1960).

SCHIMBUL DE CĂLDURĂ ÎN CANALUL DE EVACUARE LA MOTOARELE CU ARDERE INTERNĂ

DE

CĂLIN ADRIAN VASILESCU

621.43.016

Schimbul de căldură între fluidul care evoluează în motoarele cu ardere internă și mediul răcitor, se petrece atît în cilindrul cît și în canalele prin care curg gazele în timpul proceselor de aspirație și de evacuare. Deoarece o porțiune a canalelor este cuprinsă în chiulasă, căldura evacuată se transmite fluidului răcitor al motorului, contribuind astfel la încărcarea termică a acestuia. Ca urmare a diferențelor mici de temperatură, căldura schimbată în canalul de aspirație din chiulasă este neînsemnată. În schimb, în canalul de evacuare, atît vitezele de curgere cît și diferențele de temperatură sînt mari, astfel că schimbul de căldură poate fi important. Problema este puțin analizată în literatură, tratarea ei considerîndu-se ca aproximată de cazul curgerii gazelor în mișcare turbulentă prin canale. Deoarece regimul termic al unui motor poate deveni prohibitiv la modificarea parametrilor săi funcționali, este necesar să se cunoască mai îndeaproape factorii care guvernează schimbul de căldură atît în cilindru cît și în canale.

În lucrarea de față se analizează, pe baza unui exemplu, ponderea pe care o are transferul de căldură de la fluidul de lucru al motorului către mediul răcitor în diferitele evoluții ale ciclului și se cercetează în continuare (în cadrul unor ipoteze simplificatoare privind ciclul de lucru) factorii care pot influența schimbul de căldură în canalul de evacuare. În final, se stabilește formula coeficientului de convecție pentru acest caz.

1. Se analizează în primul rînd schimbul de căldură la un motor cu aprindere prin scînteie avînd diametrul cilindrului $D = 101$ mm cursa $S = 114$ mm și raportul de compresiune $\varepsilon = 6{,}2$. Variația presiunii (obținută cu ajutorul diagramelor indicate) și a temperaturii (cal-

culată) la regimul de plină admisie şi turaţia $n = 2\,400$ rot/min este prezentată în figura 1.

Schimbul de căldură pe fiecare evoluţie s-a calculat cu relaţia

$$Q = \int_{\theta_1}^{\theta_2} kF\,(T - T_r)\,\frac{d\theta}{360.60.n}, \qquad (1)$$

expresie în care F [m²] reprezintă suprafaţa instantanee interioară a peretelui cu care vin în contact gazele; T [°K] — temperatura gazelor

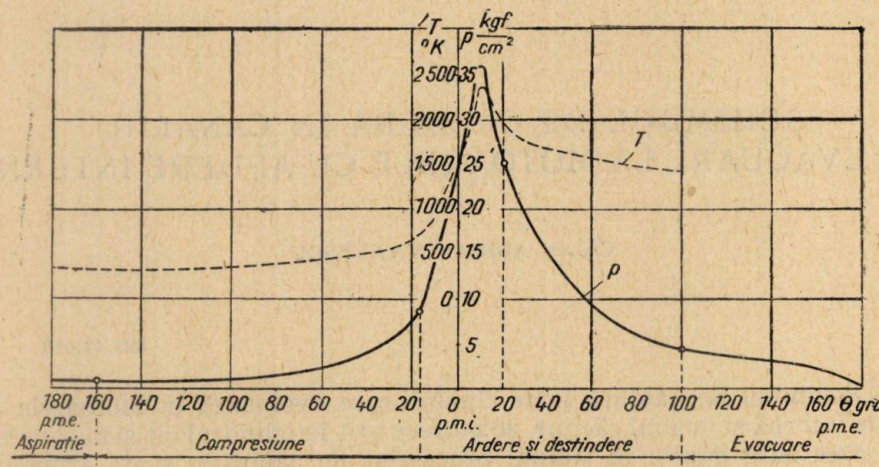


Fig. 1. — Variaţia presiunii p şi a temperaturii T în funcţie de unghiul de rotaţie al arborelui cotit θ pentru un motor cu aprindere prin scînteie avînd $D = 101$ mm, $S = 114$ mm; $\varepsilon = 6{,}2$ şi $n = 2\,400$ rot/min la plină admisie.

din cilindru; T_r [°K] — temperatura medie a fluidului răcitor; n [rot/min] turaţia motorului; θ [grade] — unghiul de rotaţie al arborelui cotit, iar k [kcal/m² . h . grd] — ceficientul global de transfer de căldură dat de ralaţia

$$k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_c} + \frac{\delta}{\lambda_p} + \frac{1}{\alpha_a}}, \qquad (2)$$

unde α_c [kcal/m² . h . grd] reprezintă coeficientul de convecţie de la gazele din cilindru la faţa interioară a peretelui acestuia; λ_p [kcal/m . h . grd] — coeficientul de conductibilitate al metalului din care este alcătuit peretele; δ [m] — grosimea peretelui şi α_a [kcal/m² . h . grd] — coeficientul de convecţie de la faţa exterioară a peretelui cilindrului la apa de răcire.

Pentru coeficientul de convecţie s-a utilizat formula [1]

$$\alpha_c = 2{,}1 \,.\, \sqrt[3]{w_m}\,\sqrt{pT}, \qquad (3)$$

unde, în plus față de notațiile introduse pînă aici, w_m [m/s] reprezintă viteza medie a pistonului și p [kgf/cm²] presiunea instantanee a gazelor din cilindru. Valoarea coeficientului de convecție de la gaze la peretele cilindrului, calculată cu relația (3), este redată în figura 2. Se observă că pe evoluția de compresiune, valorile coeficientului de convecție sînt relativ mici, ele devenind apreciabile pe evoluția de ardere și de destindere.

Pe evoluția de ardere care durează de la $\theta = 17$ grade înainte de *p.m.i.* și pînă la $\theta = 20$ grade după *p.m.i.* s-a ținut seama și de coeficientul de schimb de căldură datorat radiației gazelor α_r [kcal/m² . h . grd] determinat cu relația [2]

$$\alpha_r = 0{,}362 \cdot \left[\left(\frac{T}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_p}{100}\right)^4\right] \frac{1}{T - T_r}, \qquad (4)$$

unde T_p [°K] reprezintă temperatura feței interioare a peretelui cilindrului. Rezultatul acestor calcule sînt prezentate în figura 3 unde punctat s-a arătat și schimbul de căldură în timpul evoluției de ardere cînd nu se ține seama de procesul de radiație. În diagramă s-a figurat în ordonată raportul în procente dintre căldura evacuată prin răcire Q_r și căldura dezvoltată prin arderea completă a combustibilului introdus Q_k. Se observă că, în cazul considerat, pe evoluțiile care se succed de la închiderea supapei de aspirație și pînă la deschiderea supapei de evacuare, se eli-

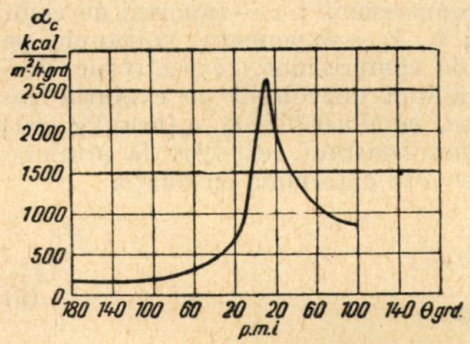


Fig. 2. — Variația coeficientului de convecție de la gaze la fața interioară a peretelui cilindrului α_c în funcție de unghiul de rotație al arborelui cotit θ.

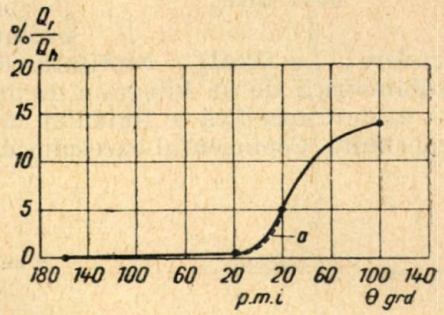


Fig. 3. — Variația raportului dintre căldura evacuată prin răcire și căldura dezvoltată prin arderea completă a combustibilului $\frac{Q_r}{Q_k}$, în funcție de unghiul de rotație al arborelui cotit θ; a — căldură transmisă numai prin convecție (în procesul de ardere).

mină prin sistemul de răcire al motorului 13,8% din căldura dezvoltată prin arderea combustibilului. Repartiția căldurii transmise de la gaze, pe evoluții, este după cum urmează: 0,5% din căldura dezvoltată prin arderea combustibilului pe evoluția de compresiune care durează $\theta = 143$ grade; 4,4% din căldura dezvoltată prin arderea combustibilului, pe

evoluția de ardere care durează $\theta = 37$ grade dintre care 3,9% reprezintă căldură transmisă prin convecție și 0,5% prin radiație; 8,9% din căldura dezvoltată prin arderea combustibilului, pe evoluția de destindere care durează $\theta = 80$ grade.

Cantitatea de căldură schimbată prin peretele canalului de evacuare reprezintă 2,2% din cantitatea de căldură dezvoltată prin arderea combustibilului fiind prin urmare comparabilă cu căldura evacuată prin convecție în evoluția de ardere.

2. Factorii care afectează schimbul de căldură între gazele arse și peretele canalului de evacuare sînt fie parametrii funcționali ai motorului, fie elemente constructive ale motorului, ale sistemului de evacuare și ale sistemului de răcire.

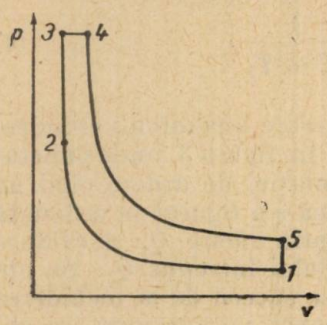


Fig. 4. — Ciclul ideal al motorului cu aprindere prin compresiune și ardere mixtă.

Pentru un motor dat, modificarea parametrilor funcționali influențează valoarea temperaturii și presiunii de la începutul evacuării. Studiul acestor modificări se face în continuare, pornindu-se de la un ciclu ideal de motor cu aprindere prin compresiune și ardere mixtă (fig. 4) pe care evoluează gaze ideale, la care se cunosc: T_1 [°K] — temperatura fluidului la începutul compresiunii; p_1 [kgf/cm²] — presiunea din cilindru la începutul compresiunii; ε — raportul de compresiune; k_1, k_2 — exponentul politropic pe evoluția de compresiune, respectiv de destindere; ξq [kcal] — cantitatea de căldură dezvoltată pe evoluția izovolumetrică de un kilogram de amestec combustibil; c_v, c_p [kcal/kg.grd] — căldura specifică a fluidului la volum constant, respectiv la presiune constantă. Coeficientul excesului de aer α se determină cu relația

$$\alpha = \frac{\dfrac{P_{c_i}}{q} - 1}{\min L}, \tag{5}$$

unde P_{c_i} [kcal/kg] reprezintă puterea calorifică inferioară a combustibilului; q [kcal/kg] — căldura dezvoltată prin arderea combustibilului cuprins într-un kilogram de amestec de combustibil și aer; min L — cantitatea teoretică de aer necesară pentru a arde un kilogram de combustibil. Cu aceste notații se poate stabili valoarea temperaturii gazelor din cilindru la sfîrșitul destinderii

$$T_5 = \frac{\left[T_1 \varepsilon^{k_1-1} + \xi \dfrac{q}{c_v} + (1-\xi)\dfrac{q}{c_p}\right]^{k_2}}{\left[\varepsilon\left(T_1 \varepsilon^{k_1-1} + \xi \dfrac{q}{c_v}\right)\right]^{k_2-1}}, \tag{6}$$

precum și valoarea presiunii

$$p_5 = \frac{p_1}{T_1} \frac{\left[T_1 \varepsilon^{k_1-1} + \xi \frac{q}{c_v} + (1-\xi)\frac{q}{c_p}\right]^{k_2}}{\left[\varepsilon\left(T_1 \varepsilon^{k_1-1} + \xi \frac{q}{c_v}\right)\right]^{k_2-1}}. \tag{7}$$

În timpul evacuării are loc un proces complex de destindere adiabatică a gazelor din cilindru și de laminare a acestora în regiunea supapei, astfel că temperatura gazelor din canalul de evacuare va varia între temperatura din momentul deschiderii supapei și temperatura ce o au gazele destinse pînă la presiunea ce domnește în galeria de evacuare. Pentru calculul schimbului de căldură se va considera o temperatură medie T_e dedusă în cadrul unor ipoteze simplificatoare [3], dintre care cele mai importante sînt : se neglijează cantitatea de gaze rămasă în cilindru la sfîrșitul evacuării izobare ; se consideră amestecarea perfectă a diferitelor tranșe de gaz evacuate ; se consideră gazul în repaus ; se consideră ipoteza căldurilor specifice constante. Desigur că aceste ipoteze corespund numai parțial realității însă aprecierea unei temperaturi medii a întregii mase de gaz permite să se simplifice expresia de calcul a căldurii schimbate, iar considerarea fluidului frînat nu aduce decît erori mici datorită, pe de o parte, vitezelor nu prea mari din canalul de evacuare și, pe de altă parte, nivelului ridicat al temperaturii gazelor. Relația de calcul a temperaturii medii a gazelor evacuate este

$$T_e = \frac{T_5}{\varkappa}\left[1 + (\varkappa - 1)\frac{p_t}{p_5}\right], \tag{8}$$

unde $\varkappa$ este raportul căldurilor specifice al gazelor ce participă la procesul de evacuare și p_t [kgf/cm²] reprezintă presiunea din conducta de evacuare.

Schimbul de căldură în canalele de evacuare s-a calculat cu relația

$$Q = \int_0^{\theta_e} k' f (T_e - T_r) \frac{d\theta}{360 \cdot 60 \cdot n} \text{ [kcal/ciclu]}, \tag{9}$$

unde f [m²] este suprafața peretelui canalului de evacuare iar k' [kcal/m² . h . grd] care reprezintă coeficientul global de schimb de căldură — se determină cu relația

$$k' = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_g} + \frac{\delta'}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_a}}, \tag{10}$$

expresie în care α_g [kcal/m² . h . grd] reprezintă coeficientul de convecție de la gazele arse la peretele interior al canalului de evacuare și care se determină după relațiile cunoscute pentru curgerea forțată prin conducte.

3. Cu ajutorul relațiilor arătate, se analizează influența factorilor funcționali ai motorului, urmărindu-se modul de variație al presiunii p_5 și temperaturii T_5 la începutul evacuării, precum și schimbul de căldură

între gaze şi peretele canalului de evacuare Q. Rezultatele sînt prezentate în figura 5 sub formă raportată la valorile obţinute prin calcul de la un ciclu de referinţă. Dintre mărimile care caracterizează temperatura şi presiunea la începutul evacuării s-a analizat influenţa lui T_1 — temperatura de aspiraţie, p_1 — presiunea de aspiraţie, ε — raportul de compresiune, α — coeficientul excesului de aer, ξ — cantitatea de amestec combustibil (dintr-un kilogram de amestec) ce arde pe evoluţia izovolumetrică, k_2 — exponentul politropic al evoluţiei de destindere. Deoarece variaţia exponentului politropic pe evoluţia de compresiune este mai redusă, nu s-a analizat influenţa acestui factor. Ciclul de referinţă a fost calculat pentru mărimile : $T_1 = 300°K$, $p_1 = 0{,}9$ kgf/cm², $\varepsilon = 15$, $\alpha = 1{,}4$, $\xi = 0{,}2$, $k_2 = 1{,}30$ şi $k_1 = 1{,}35$. În calcule, s-au păstrat toate mărimile ciclului de referinţă constante, variindu-se pe rînd un singur parametru din cei analizaţi şi s-a determinat cu ajutorul relaţiilor (6) şi (7) valoarea temperaturii T_5 şi a presiunii p_5 la începutul evacuării. Apoi, pentru valoarea $p_t = 1$ kgf/cm² şi $\varkappa = 1{,}35$ s-a calculat cu relaţia (8) temperatura medie a gazelor arse în conducta de evacuare. Luîndu-se o suprafaţă de schimb de căldură $f = 165 \cdot 10^{-4}$ m² s-a calculat cu relaţia (9) cantitatea de căldură schimbată, unde $\theta_e = 250$ grade.

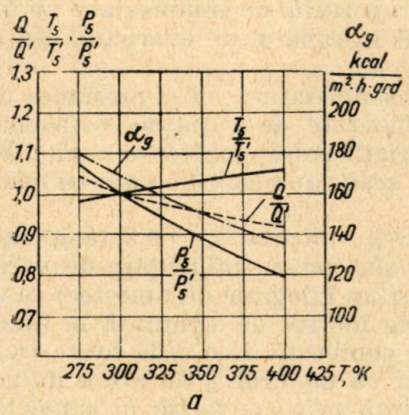
Din figura 5 *a* se constată că temperatura finală creşte cu creşterea temperaturii de aspiraţie în timp ce presiunea finală scade ; ca urmare scade coeficientul de convecţie α_g într-o măsură mai mare decît creşterea temperaturii gazelor evacuate şi prin urmare căldura transmisă mediului răcitor tinde să scadă. Ca urmare a variaţiei mici remarcate, se poate conchide că modificarea temperaturii de aspiraţie nu influenţează apreciabil căldura transmisă pereţilor conductei de evacuare.

Din figura 5 *b* se constată că mărirea presiunii de aspiraţie conduce la creşterea presiunii de la începutul evacuării în timp ce temperatura rămîne constantă. Crescînd viteza de curgere în canal, creşte coeficientul de convecţie α_g şi prin urmare schimbul de căldură. În consecinţă, mărirea presiunii de aspiraţie face să crească schimbul de căldură în canalul de evacuare.

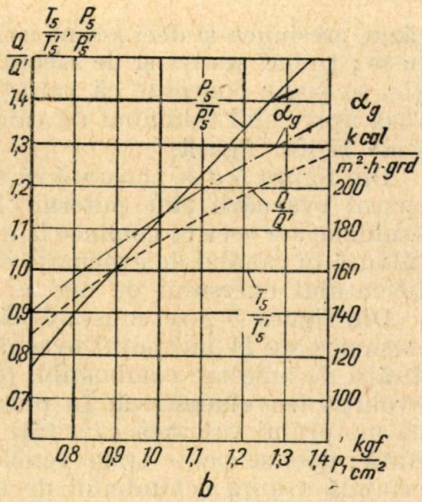
Din figura 5 *c* se constată că prin mărirea raportului de compresiune, ca urmare a destinderii mai prelungite, scade atît temperatura cît şi presiunea de la începutul evacuării. Rezultă două efecte contrarii asupra temperaturii din conducta de evacuare : aceasta tinde să scadă deoarece a scăzut temperatura de la începutul evacuării şi tinde să crească deoarece

---

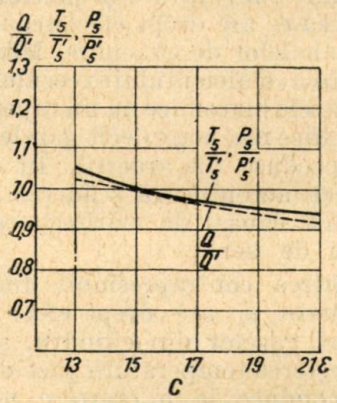
Fig. 5. — Variaţia presiunii $\frac{p_5}{p_5'}$ a temperaturii $\frac{T_5}{T_5'}$ la începutul evacuării şi a căldurii schimbate în canalele de evacuare $\frac{Q}{Q'}$ (mărimi raportate) în funcţie de parametrii funcţionali ai ciclului ; *a* — funcţie de temperatura de aspiraţie T_1 ; *b* — în funcţie de presiunea de aspiraţie p_1 ; *c* — în funcţie de raportul de compresiune ε ; *d* — în funcţie de coeficientul excesului de aer α ; *e* — în funcţie de cantitatea de amestec combustibil arsă (dintr-un kilogram de amestec) pe evoluţia izovolumetrică ξ ; *f* — în funcţie de exponentul politropicei de destindere k_2 ; α_g — coeficientul de convecţie al gazelor către peretele canalului de evacuare.


Q/Q', T_s/T'_s, P_s/P'_s
α_g kcal/m²·h·grd
1,3
1,2
1,1
1,0
0,9
0,8
0,7
200
180
160
140
120
100
α_g
T_s/T'_s
Q/Q'
P_s/P'_s
275 300 325 350 375 400 425 T, °K

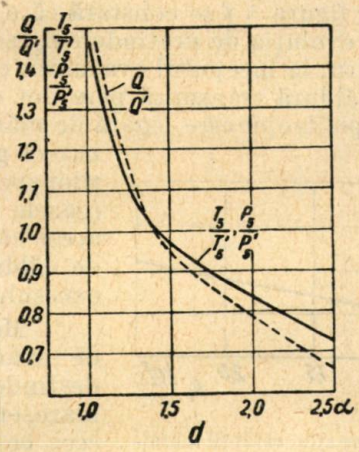
a


Q/Q', T_s/T'_s, P_s/P'_s
1,4
1,3
1,2
1,1
1,0
0,9
0,8
0,7
P_s/P'_s
α_g
α_g kcal/m²·h·grd
200
180
160
140
120
100
Q/Q'
T_s/T'_s
0,8 0,9 1,0 1,1 1,2 1,3 1,4 P, kgf/cm²

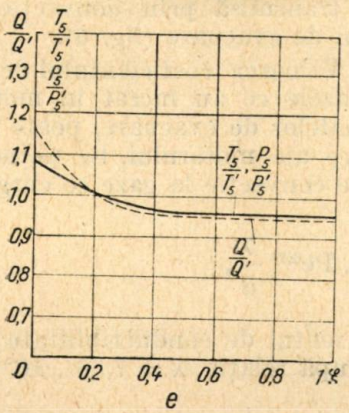
b


Q/Q', T_s/T'_s, P_s/P'_s
1,3
1,2
1,1
1,0
0,9
0,8
0,7
T_s/T'_s, P_s/P'_s
Q/Q'
13 15 17 19 21 ε

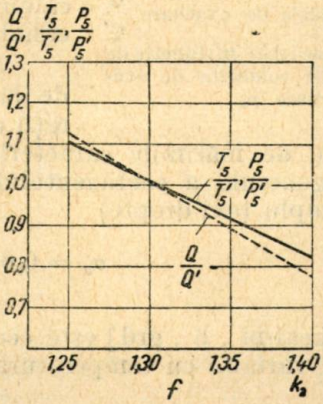
c


Q/Q', T_s/T'_s, P_s/P'_s
1,4
1,3
1,2
1,1
1,0
0,9
0,8
0,7
Q/Q'
T_s/T'_s, P_s/P'_s
1,0 1,5 2,0 2,5 α

d


Q/Q', T_s/T'_s, P_s/P'_s
1,3
1,2
1,1
1,0
0,9
0,8
0,7
T_s/T'_s, P_s/P'_s
Q/Q'
0 0,2 0,4 0,6 0,8 1 ε

e


Q/Q', T_s/T'_s, P_s/P'_s
1,3
1,2
1,1
1,0
0,9
0,8
0,7
T_s/T'_s, P_s/P'_s
Q/Q'
1,25 1,30 1,35 1,40
k_s

f

a scăzut presiunea şi deci s-a micşorat destinderea, efectele oarecum anulîndu-se ; ţinînd seama şi de efectul redus, asupra coeficientului de convecţie, se poate conchide că variaţia raportului de compresiune nu influenţează apreciabil schimbul de căldură în canalul de evacuare, aşa cum se vede şi din figură.

Din figura 5 *d* se constată că atît temperatura cît şi presiunea de la începutul evacuării sînt puternic influenţate de variaţia coeficientului excesului de aer ceea ce conduce la o variaţie corespunzătoare a schimbului de căldură în canalul de evacuare, care scade apreciabil o dată cu mărirea coeficientului excesului de aer α.

Din figura 5 *e* se constată că peste valoarea $\xi = 0{,}3$ temperatura şi presiunea de la începutul evacuării sînt puţin influenţate de variaţia cantităţii de amestec combustibil (dintr-un kilogram de amestec) ce arde pe evoluţia izovolumetrică. În plus, din motive de siguranţă în funcţionarea motorului valoarea cantităţii de combustibil ce arde brusc trebuie limitată ; deci se poate trage concluzia că factorul ξ nu are o influenţă apreciabilă asupra schimbului de căldură prin convecţie în canalele de evacuare.

Din figura 5 *f* se constată că o dată cu creşterea exponentului politropic pe evoluţia de destindere k_2, scade temperatura şi presiunea gazelor din cilindru, la începutul evacuării, ceea ce are drept efect scăderea cantităţii de căldură transmisă pereţilor canalelor de evacuare. Mărirea exponentului politropic este legată de mărirea coeficientului excesului de aer, deoarece gazele biatomice au un raport al căldurilor specifice mai mare decît gazele triatomice (gazele produse ale arderii). În consecinţă, acest efect accentuează scăderea schimbului de căldură cauzat de mărirea coeficientului excesului de aer.

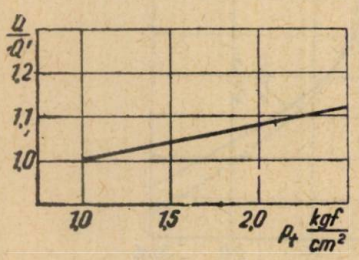


Fig. 6. — Variaţia căldurii schimbate în canalele de evacuare $\frac{Q}{Q'}$ (mărime raportată) în funcţie de presiunea din conducta de evacuare p_t.

Mărirea contrapresiunii din conducta de evacuare p_t are drept efect micşorarea destinderii gazelor din cilindru, şi, prin urmare, creşterea temperaturii gazelor evacuate, ceea ce conduce la o creştere moderată a căldurii transmisă prin convecţie pereţilor canalului de evacuare (fig. 6).

4. Valoarea coeficientului de convecţie de la gazele ce au lucrat în motor la pereţii canalelor de evacuare, poate fi stabilită în funcţie de mărimile caracteristice ale motorului. Se porneşte de la expresia generală a coeficientului de convecţie la gaze ce curg prin ţevi (spre exemplu ţevi drepte)

$$\alpha_g = 0{,}040 \cdot \mathrm{Pe}^{0{,}75} \frac{\lambda}{d}, \qquad (11)$$

unde λ [kcal/m . h . grd] este coeficientul de conductibilitate al gazelor (care deşi variabil cu temperatura după relaţia $\lambda = 7{,}36 \cdot 10^{-5} \cdot T$ poate

fi admis constant luîndu-se valoarea pentru temperaturile uzuale) iar d [m] este diametrul canalului de evacuare ; cifra Peclet este :

$$\mathrm{Pe} = \frac{3\,600 \cdot wd\gamma c_p}{\lambda}, \tag{12}$$

unde W[m/s] este viteza medie de curgere a gazelor şi γ [kgf/m^3] reprezintă greutatea specifică a gazelor ce curg în canalul de evacuare.

Dacă se notează cu G[kg/ciclu] cantitatea de gaz ce evoluează în timpul unui ciclu în motor şi care prin urmare urmează să fie evacuată, ecuaţia continuităţii permite să se scrie

$$G = \frac{\pi d^2}{4}\gamma W\tau; \tag{13}$$

în această expresie τ[s] —timpul în care se produce curgerea gazelor — se presupune a fi timpul cît supapa de evacuare rămîne deschisă (numărul de grade θ_e)

$$\tau = \frac{\theta_e}{6.n}. \tag{14}$$

De asemenea, cantitatea de gaz din cilindrul motorului poate fi scrisă

$$G = \frac{p_1 V_1}{RT_1}, \tag{15}$$

unde R [kgm/kg . grd] este constanta gazului şi V_1 [m^3] — volumul maxim al cilindrului motorului (în cazul motoarelor reale poate fi înlocuit cu cilindrarea motorului, presupunîndu-se că spaţiul camerei de ardere nu este golit de gaze în procesul de evacuare).

Înlocuindu-se ralaţiile (13), (14) şi (15) în (12) şi ţinînd seama că $\frac{c_p}{R} = A\frac{\varkappa}{\varkappa - 1}$ se obţine

$$\mathrm{Pe} = \frac{4 \cdot 3\,600 \cdot 6}{\pi} \cdot \frac{A\varkappa p_1 v_1}{\lambda(\varkappa - 1)T_1} \cdot \frac{1}{d} \cdot \frac{n}{\theta_e}. \tag{16}$$

Se introduce expresia (16) în (11) şi ţinînd seama de valorile $\lambda = 7{,}36 \cdot 10^{-2}$ kcal/m . h . grd, $\varkappa = 1{,}35$, $A = \frac{1}{427}$ kcal/kg. m, se obţine în final expresia coeficientului de convecţie pentru gazele de ardere evacuate

$$\alpha_g = 1{,}31 \cdot \left(\frac{p_1}{T_1} n\right)^{0.75} \frac{V_1^{0.75}}{\theta_e^{0.75}\, d^{1.75}} \text{ [kcal/ m}^2 \text{ . h . grd]}. \tag{17}$$

În această expresie diferitele mărimi se introduc în următoarele unităţi de măsură : presiunea p_1 [kgf/m^2]; temperatura T_1[°K]; turaţia n [rot/min], durata în unghi de rotaţie ale arborelui cotit de deschidere a supapei de evacuare θ_e [grade]; volumul cilindrului V_1 [m^3] şi diametrul conductei (sau diametrul echivalent) d [m].

Se constată că mărimea coeficientului de convecție α_a este influențată de valoarea presiunii și temperaturii inițiale (ceea ce a fost analizat în figurile 5*a* și 5*b*) de turația motorului n și de durata de deschiderea supapei de evacuare θ_e. Coeficientul de convecție crește apreciabil cu turația (fig. 7) deoarece crește viteza de curgere. În schimb, micșorîndu-se timpul pus la dispoziție pe ciclu, scade schimbul de căldură o dată cu mărirea turației; căldura evacuată orar crește însă cu mărirea turației.

Efectul real al modificării turației nu va fi atît de puternic, deoarece, indiferent de variația acesteia, pe o primă porțiune a evacuării, gazele curg cu viteza sunetului și în canalul de evacuare, relativ scurt, nu este posibil să se micșoreze imediat viteza la valoarea corespunzătoare secțiunii puse la dispoziție, astfel că influența turației se va estompa.

Mărirea timpului de deschidere a supapei de evacuare θ_e care are ca efect micșorarea vitezei de curgere duce la scăderea coeficientului de convecție (fig. 8), în același timp crește timpul de parcurgere a canalului de evacuare astfel că în ansamblu schimbul de căldură se mărește.

Micșorarea diametrului canalului d mărește viteza de curgere, ceea ce duce la mărirea coeficientului de convecție, deși suprafața de schimb de căldură se micșorează, în ansamblu cantitatea de căldură schimbată crește (fig. 9). Lungimea canalului de evacuare l influențează direct proporțional schimbul de căldură.

Schimbul de căldură în procesul de evacuare se calculează cu relația (9) în care s-a înlocuit expresia (17). Se obține (neglijîndu-se factorii $\frac{\delta'}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_a}$)

$$Q = \int_0^{\theta_e} 1{,}9 \cdot 10^{-4} \cdot \left(\frac{p_1}{T_1}\right)^{0{,}75} \frac{1}{n^{0{,}25}} \left(\frac{V_1}{\theta_e d}\right)^{0{,}75} l \ (T_e - T_r) \mathrm{d}\theta \text{[kcal/ciclu]}. \qquad (18.\ a)$$

$$Q = \int_0^{\theta_e} 0{,}0057 \cdot \left(\frac{p_1}{T_1} n\right)^{0{,}75} \left(\frac{V_1}{\theta_e d}\right)^{0{,}75} l \, \mathrm{d}\theta \text{ [kcal/h]}, \qquad (18.\ b)$$

expresie în care l [m] reprezintă lungimea conductei de evacuare. În expresia (18) apare grupul de mărimi

$$\Pi = \left(\frac{V_1}{\theta_e d}\right)^{0{,}75} l, \qquad (19)$$

care reprezintă parametrii constructivi ai motorului. Acest grup poate fi considerat un criteriu de similitudine pentru cazul de transmisie de căldură considerat; două motoare diferite, dar avînd aceiași parametri ai fluidului de lucru, vor transmite aceeași cantitate de căldură prin pereții canalelor de evacuare dacă parametrul π este același la cele două mărimi studiate.

5. Ca urmare a studiului efectuat se pot trage cîteva concluzii:

Schimbul de căldură prin convecție dintre gazele de ardere și pereții canalelor de evacuare este de ordinul de mărime al schimbului de căldură

prin convecție în procesul de ardere și prin urmare este necesar să se țină seama de această cantitate de căldură care încarcă sistemul de răcire al motorului.

Dintre parametrii funcționali ai motorului, temperatura de aspirație T_1 și coeficientul care exprimă cantitatea de amestec combustibil (din-

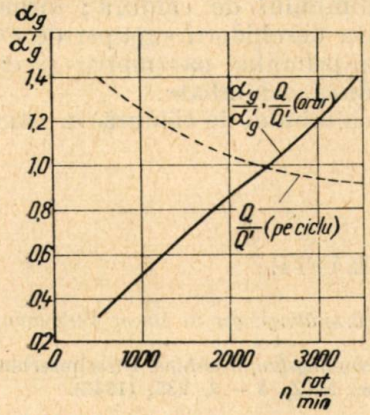


Fig. 7. — Variația coeficientului de convecție de la gazele arse la peretele canalului de evacuare $\frac{\alpha_g}{\alpha'_g}$, și variația căldurii schimbate în canalul de evacuare $\frac{Q}{Q'}$ (mărimi raportate) cu turația motorului n.

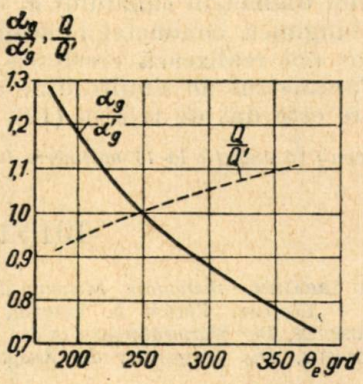


Fig. 8. — Variația coeficientului de convecție de la gazele evacuate la peretele canalului de evacuare $\frac{\alpha_g}{\alpha'_g}$ și variația căldurii schimbate în canalul de evacuare $\frac{Q}{Q'}$ (mărimi raportate) cu durata de deschidere a supapei de evacuare θ_e.

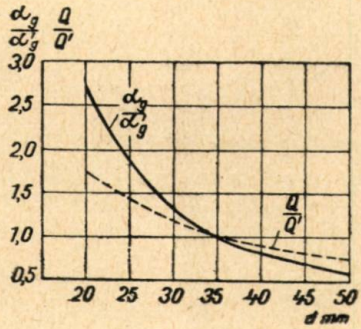


Fig. 9. — Variația coeficientului de convecție de la gazele evacuate la peretele canalului de evacuare $\frac{\alpha_g}{\alpha'_g}$ și variația căldurii schimbate în canalul de evacuare $\frac{Q}{Q'}$ în funcție de diametrul canalului d.

tr-un kilogram de amestec) care arde violent ξ, nu influențează practic acest schimb de căldură; presiunea de aspirație p_1, contrapresiunea în conducta de evacuare p_t și turația n îl influențează moderat, mărirea primilor doi parametri și micșorarea celui de-al treilea conducînd la intensificarea schimbului de căldură (pe ciclu); o influență mai mare asupra schimbului de căldură cu pereții canalului de evacuare o are coeficientul

excesului de aer α a cărui creştere micşorează schimbul de căldură; prin mărirea coeficientului excesului de aer se măreşte şi exponentul politropic k_2 ceea ce contribuie, de asemenea, la micşorarea schimbului de căldură.

Dintre parametrii constructivi, raportul de compresiune ε are o influenţă foarte redusă asupra schimbului de căldură; influenţează apreciabil diametrul canalului d, durata deschiderii supapei de evacuare θ_e, şi lungimea conductei l; scăderea primului parametru şi creşterea ultimilor doi realizează creşterea căldurii schimbate.

Parametrul de similitudine al schimbului de căldură în canalul de evacuare este dat de relaţia (19).

Primit la redacţie la 15 noiembrie 1963

BIBLIOGRAFIE

1. ABBDU IBRAHIM, *Stationäre Messung des Wärmeüberganges in einem Verbrennungsmotor.* Leeman, Zürich u. Leipzig, 1945.
2. W. NUSSELT, *Der Wärmeübergang in der Verbrennungskraftmaschine.* Dieselmaschinen, 1924.
3. H. BLASIUS, *Die Temperatur der Auspuffgase.* MTZ, *8 — 9*, 235, (1943).

EFORTURILE AXIALE ALE TURBOCOMPRESOARELOR DE SUPRAALIMENTARE A MOTOARELOR CU ARDERE INTERNĂ

DE

VICTOR PIMSNER

611. 438.621.6

Utilizarea turbocompresoarelor la supraalimentarea motoarelor cu ardere internă constituie una din metodele cele mai eficace de mărire a puterii motorului și de micșorare a consumului specific de combustibil. Cum turbocompresorul nu este cuplat cu motorul pe care îl deservește, funcționarea sa la un anumit regim de lucru este condiționată de egalitatea puterilor turbinei și compresorului, care sînt dependente direct de parametrii funcționali și constructivi ai motorului. De aceea, pentru a obține performanțele optime ale motorului supraalimentat, este necesară tratarea în ansamblu a celor două instalații și analizarea atentă a condițiilor de interdependență.

Soluția constructivă a turbocompresorului poate fi astfel aleasă încît turația maximă a grupului să nu depășească valoarea limită impusă de rezistența paletelor, supuse forțelor centrifuge, alegînd convenabil debitul limită atît în rețeaua fixă de palete, cît și în cea mobilă [1]. Acestui regim limită îi va corespunde gradul de comprimare maxim pe care îl poate realiza compresorul grupului. Evident că turațiile grupului la diverse regimuri de lucru vor fi inferioare regimului limită ceea ce va duce la micșorarea corespunzătoare a gradului de comprimare. În timpul funcționării, în afara forțelor centrifuge, turbocompresorul este supus unor eforturi axiale, a căror intensitate depinde de regimul de lucru. Cunoașterea aprofundată a proceselor funcționale permite proiectantului ca, prin alegerea convenabilă a dimensiunilor constructive, să obțină eforturile axiale minime la regimul cu durată maximă de funcționare, iar la celelalte regimuri efortul axial să fie sub valoarea pe care o pot prelua palierele.

În cazul în care un turbocompresor existent urmează a fi adoptat unui nou tip de motor, ceea ce presupune alegerea presiunii normale de

refulare (implicit turația nominală), este indispensabil pentru a asigura securitatea agregatului, să se determine eforturile axiale la care va fi supus acesta la regimurile de lucru pe care i le impune motorul.

În acest scop, lucrarea își propune să stabilească modul de calcul al eforturilor axiale la care este supus turbocompresorul, ca și influența lor asupra soluției constructive. Pentru ilustrare se va considera turbocompre-

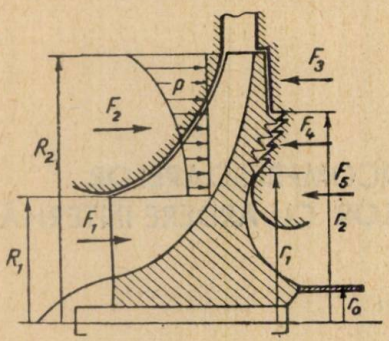


Fig. 1. — Schema compresorului centrifug semideschis.

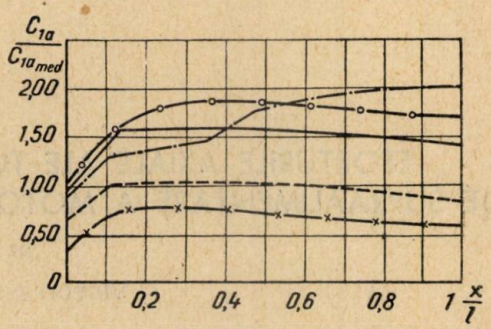


Fig. 2. — Variația raportului dintre viteza axială C_{1a} și viteza medie $C_{1a\,med}$ în secțiunea de intrare a compresorului centrifug (l — lungimea paletei).

sorul format dintr-un compresor centrifug semiînchis, antrenat de o turbină axială monoetajată. Se alege sensul pozitiv al forțelor, sensul de deplasare al fluidului de lucru. În secțiunea de intrare a compresorului (fig. 1) aerul are presiunea p_1 constantă, dar inferioară celei din mediul ambiant, funcție de forma constructivă a conductei de admisie și de regimul motorului. În general, viteza de intrare a aerului în rotorul compresorului c_1 este neuniformă (fig. 2) atît în lungul razei, cît și în lungul unei suprafețe inelare coaxiale [2].

Gradul de neuniformitate este definit de expresia

$$\chi = \frac{k}{k'}, \tag{1}$$

în care

$$k = \frac{1}{2\int_{S_1} c_{1a}\,dS}\int_{S_1} \rho_1 c_{1a}^3\,dS)^2 \tag{2}$$

este presiunea dinamică produsă de componenta axială a vitezei c_1, iar

$$k' = \frac{\rho_1}{2}\left(\frac{1}{S_1}\int_{S_1} c_{1a}dS\right)^2 \tag{3}$$

este presiunea dinamică, calculată din componenta axială medie a vitezei c_{1a}, dedusă din ecuația debitului. Coeficientul χ poate fi obținut experimental, sau din datele acumulate de practică, putînd corecta cal-

culele efectuate considerînd în secțiunea 1 o viteză axială constantă c_{1a}. În acest caz

$$F_1 = \pi p_1 (R_1^2 - r_b^2) + \frac{G_a}{g} c_{1a} = \pi (R_1^2 - r_b^2)(p_1 + \rho_1 c_{1a}^2). \quad (4)$$

În rotorul compresorului se admite că presiunea p variază proporțional cu pătratul razei, adică

$$p \sim p_2 \left(\frac{R}{R_2}\right)^2.$$

Pentru a determina familia paralelelor ce trec prin punctele de stare 1 și 2 scriem

$$p - p_1 = A (R - R_1)^2, \quad (5)$$

determinarea coeficientului A efectuîndu-se din condițiile la limită în punctul 2 (R_2, p_2), deci

$$A = \frac{p_2 - p_1}{(R_2 - R_1)^2},$$

iar (5')

$$p - p_1 = \frac{p_2 - p_1}{(R_2 - R_1)^2} (R - R_1)^2.$$

Expresia forței F_2 cu care aerul apasă rotorul compresorului este

$$F_2 = \int_{R_1}^{R_2} 2\pi p \, R dR = 2\pi \int_{R_1}^{R_2} \left[p_1 + (p_2 - p_1) \left(\frac{R - R_1}{R_2 - R_1}\right)^2 \right] R dR, \quad (6)$$

iar în cele din urmă

$$F^2 = \pi p_1 (R_2 - R_1) \left[R_2 + R_1 + \frac{\pi_c - 1}{6} (3R_2 + R_1) \right] \quad (6')$$

în care $\pi_c = \frac{p_2}{p_1}$ este gradul de comprimare al rotorului, determinat de viteza de rotație a grupului și de rezistențele aerodinamice din sistemul de aspirație al motorului. Cum turația grupului depinde de puterea turbinei rezultă că gradul de comprimare depinde direct de regimul de lucru al motorului. Trebuie subliniat că p_2 este presiunea statică la ieșirea din rotor (fiind diferită de presiunea statică la ieșirea din compresor), modul ei de calcul fiind prezentat în [3], [4].

În interstițiul dintre rotor și stator pătrunde o parte din aerul refulat de rotor. Dacă peretele statorului este suficient de depărtat de rotor pentru ca presiunea din spatele rotorului să fie egală cu presiunea aerului la ieșirea din rotor (adică $p_r' = p_2$), atunci asupra rotorului va acționa forța

$$F_3 = \pi p_2 (R^2_2 - r^2_2), \quad (7)$$

unde r_2 este raza exterioară a labirinților. Dacă jocul dintre rotor și stator este mic, prin intermediul stratului limită aflat pe rotor, se transmite

aerului din interstițiu o anumită cantitate de mișcare astfel încît întreaga masă de aer, atît din stratul limită cît și în afara lui, este antrenat într-o mișcare de rotație corespunzătoare rotației corpului solid, cu o viteză unghiulară ω_f, care este însă diferită de cea a rotorului ω_r. Fără a exista date experimentale suficiente, se apreciază [5] că

$$\omega_f = (0{,}5 \div 0{,}8)\omega_r.$$

Din cauza rotirii, aerul din interstițiu este supus forțelor centrifuge care creează un gradient de presiune

$$dp'_r = \omega_f^2 p_r r dr. \tag{8}$$

Considerînd evoluția de comprimare politropică și aplicînd condițiile limită la raza R_2, se obține

$$\frac{\rho_r}{\rho_2} = \left(\frac{p'_r}{p_2}\right)^{\frac{1}{n}},$$

deci:

$$\int_{p_{r'}}^{p_2} \frac{dp'_r}{p'^{\frac{1}{n}}_r} = \frac{\omega_f^2 \rho_2}{p_2^{\frac{1}{n}}} \int_r^{R_2} r dr, \tag{9}$$

de unde:

$$\frac{n}{n-1}\left(p_2^{\frac{n-1}{n}} - p'^{\frac{n-1}{n}}_r\right) = \frac{\omega_f^2 \rho_2}{2p_2^{\frac{1}{n}}}(R^2_2 - r^2). \tag{10}$$

Se poate astfel determina forța

$$F_3 = \int_{r_2}^{R_2} 2\pi p_2 \left[1 - \frac{n-1}{n} \cdot \frac{\omega_f^2 \rho_2 (R_2^2 - r^2)}{2p_2^{\frac{1}{n}}}\right] r dr. \tag{11}$$

Relația se rezolvă mai comod grafic, calculînd inițial $2\pi p'_r = f(r)$ care, reprezentat într-un sistem de coordonate, permite determinarea funcției $F_3 = \int_{r_2}^{R_2} 2\pi p'_r r dr$. Valoarea exponentului politropic este $n \cong 1{,}4 \div 1{,}48$, însă datele experimentale existente sînt insuficiente pentru a putea generaliza aceste valori.

Deși în zona labirintului presiunea variază în trepte (fig. 3) gradul de variație depinzînd de soluția constructivă aleasă, se poate admite că în lungul labirinților, variația presiunii este liniară, fiind cuprinsă între p'_{r_2} și p'_{r_1}. În acest caz presiunea la o rază curentă este

$$p = p'_{r_1} + \frac{r - r_1}{r_2 - r_1}(p'_{r_2} - p'_{r_1}), \tag{12}$$

iar forța care acționează în zona labirintului, este

$$F_4 = 2\pi \int_{r_1}^{r_2} \left[p'_{r_1} + \frac{r - r_1}{r_2 - r_1} (p'_{r_2} - p'_{r_1}) \right] r dr, \tag{13}$$

de unde

$$F_4 = \pi \left[(r_2^2 - r_1^2) \frac{p'_{r_1} r_2 - p'_{r_2} r_1}{r_2 - r_1} + \frac{2}{3} (r_2^3 - r_1^3) \frac{p'_{r_2} - p'_{r_1}}{r_2 - r_1} \right]. \tag{13'}$$

În sfîrșit, în spațiul inelar, cuprins între razele r_1 și r_0, se consideră că există o presiune constantă și egală cu p'_{r_1} deci

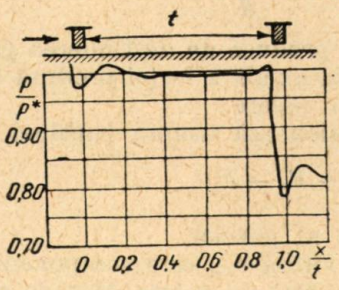


Fig. 3. — Distribuția presiunii în lungul labirintului [6].

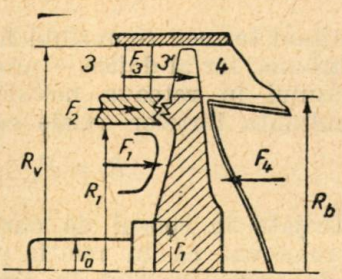


Fig. 4. — Schema și dimensiunile principale ale turbinei axiale.

$$F_5 = \pi p'_{r_1} (r_1^2 - r_0^2). \tag{14}$$

Rezultanta forțelor axiale ce acționează asupra compresorului este

$$R_c = F_1 + F_2 - F_3 - F_4 - F_5$$

și este dirijată în sensul intrării aerului în compresor.

Turbina axială (fig. 4) este supusă forțelor

$$F_1 = \pi p_1 (R_1^2 - r_1^2), \tag{15}$$

$$F_4 = \pi p R_b^2, \tag{16}$$

produse de presiunea aerului sau a gazelor de ardere pe discul turbinei. Presiunile p și p_1 pot fi diferite de presiunea mediului ambiant, în cazul în care una, sau ambele suprafețe, sînt răcite cu aer prelevat.

În zona labirinților, admițînd variația liniară a presiunii, între valorile $p_{3'}$ și p_1 se obține

$$p = p_{3'} - \frac{R_b - R}{R_b - R_1} (p_{3'} - p_1), \tag{17}$$

de unde

$$F_2 = 2\pi \int_{R_1}^{R_b} \left[p_{3'} - \frac{R_b - R}{R_b - R_1} (p_{3'} - p_1) \right] R dR, \tag{18}$$

sau

$$F_2 = \pi p_{3'}(R_b^2 - R_1^2) - \pi R_b (R_b + R_1)(p_{3'} - p_1) + \\ + \frac{2\pi}{3}(R_b^2 + 2R_b R_1 + R_1^2)(p_{3'} - p_1). \tag{19}$$

Efortul axial pe care îl produce fluidul de lucru asupra rețelei mobile de palete a turbinei este dat de relația

$$F_3 = \pi (R_v^2 - R_b^2)(p_{3'} - p_4) + \frac{G_g}{g}(c_{3'a} - c_{4a}), \tag{20}$$

în care primul termen reprezintă forța produsă de destinderea gazului în rotorul turbinei, iar al doilea — proiecția axială a forței produsă de variația impulsului în rețeaua mobilă de palete.

Rezultanta forțelor axiale ce acționează asupra turbinei este

$$R_t = F_1 + F_2 + F_3 - F_4 \tag{21}$$

și este dirijată în sensul de curgere al gazelor.

De remarcat că în relația (20) viteza $c_{3'a}$ este componenta axială a vitezei de ieșire a gazelor din rețeaua fixă de palete. Metoda corectă și expeditivă de determinare a componentei $c_{3'a}$ se bazează pe măsurarea experimentală a cuplului la care este supusă rețeaua fixă de palete. În acest caz [7]

$$c_{3'u} = \frac{M_{p \cdot f \cdot g}}{G_g \gamma_{3'}}, \tag{22}$$

iar

$$c_{3'a} = \frac{G_g}{S_{3'a}\gamma_{3'}},$$

$$\text{cum } \gamma_{3'} = \frac{p_{3'}}{RT_{3'}} \text{ și } T_{3'} = T_3^*\left(1 - \frac{\varkappa - 1}{\varkappa + 1}\lambda_{3'}^2\right),$$

în care $\lambda_{3'} = \dfrac{c_{3'a}}{\sin\alpha_{3'} a_{cr_3}}$, determinarea se efectuează prin aproximații succesive. Dacă se cunosc valorile medii ale mărimilor de stare, componenta $C_{3'a}$ se determină din relația

$$C_{3'a} = \frac{G_g R T_3^*}{S_{3'a} p_3^* \sigma_{p \cdot f}^*}\left[\frac{1}{1 - \dfrac{\Delta i_t}{i_3^*}\left(1 - \rho_t\right)}\right]^{\frac{1}{\varkappa - 1}}, \tag{23}$$

în care $\sigma_{p \cdot f}^* = p_{3'}^*/p_3^*$ este raportul presiunilor totale la ieșire, respectiv la intrare în rețeaua fixă de palete; Δi_t — căderea entalpică realizată în turbină; ρ_t — gradul de reacțiune al turbinei; iar i_3^* entalpia totală

a gazelor, aflate la temperatura T_3^*. Pentru a determina componenta c_{4a} este necesară cunoașterea unghiului $\beta_{3'}$ a vitezei relative $w_{3'}$

$$\operatorname{tg}\beta_{3'} = \frac{\lambda_{3'} \sin\alpha_{3'}}{\lambda_{3'} \cos\alpha_{3'} - \lambda_u},$$

cu ajutorul căreia se determină temperatura relativă totală [8]

$$\left(\frac{T_w^*}{T_3^*}\right)_m = 1 - \frac{\varkappa - 1}{\varkappa + 1} (\lambda_u^2 - 2\lambda_n \lambda_{3'u}), \tag{24}$$

care permite calculul coeficientului

$$\lambda_{3'w} = \lambda_{3'} \frac{\sin\alpha_{3'}}{\sin\beta_{3'}} \left(\frac{T_w^*}{T_3^*}\right)_m^{\frac{1}{2}} \tag{25}$$

și a presiunii totale în mișcare relativă

$$p_{3'w}^* = p_{3'}^* \frac{\pi(\lambda_{3'})}{\pi(\lambda_{3'w})}.$$

Știind lucrul mecanic produs de turbină, în mod analog se determină mărimile de stare în secțiunea de ieșire a turbinei.

Regimul de funcționare al turbocompresorului este determinat de regimul motorului prin debitul și parametrii de stare ai gazelor livrate turbinei. La un anumit regim, puterea compresorului

$$P = G_a i_0 \left(\pi_c^{*\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} - 1\right) \frac{1}{\eta_c}$$

trebuie să fie egală cu puterea transmisă de turbină

$$P_t = G_t \eta_t \eta_m i_3^* \left[1 - \left(\frac{1}{\delta_t^*}\right)^{\frac{\varkappa_g - 1}{\varkappa_g}}\right].$$

Se obține, notînd randamentul global al turbocompresorului $\eta = \eta_c \eta_t \eta_m$ relația

$$\delta_t^* = \left[\frac{1}{1 - \dfrac{\pi_c^{*\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} - 1}{\dfrac{i_3^*}{i_0} \eta \left(1 + \dfrac{1}{\alpha \operatorname{minl}}\right)}}\right]^{\frac{\varkappa_g}{\varkappa_g - 1}} \tag{26}$$

permite determinarea gradului de destindere din turbină $\delta_t^* = p_3^*/p_4$, în funcție de gradul de comprimare $\pi_c^* = p_2^*/p_0$, entalpia gazelor la intrarea în turbină i_3^*, excesul arderii α și exponentul izentropic $\varkappa_g$ al gazelor de ardere. Din figura 5, care reprezintă variația lui δ_t^* în funcție

de π_c^* și t_3^*, rezultă că se poate realiza practic orice presiune de supraalimentare, dacă se mărește corespunzător temperatura gazelor la intrarea în turbină. Cum această valoare este limitată de solicitările termice la care este supus motorul și paletele turbinei, rezultă necesitatea menținerii

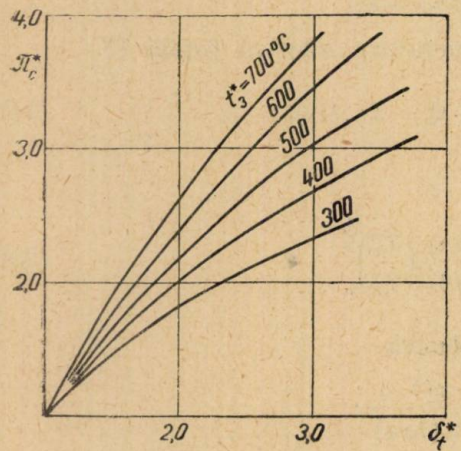


Fig. 5. — Variația gradului de comprimare al compresorului π_c^*, în funcție de gradul destinderii în turbină δ_t^* și temperatura gazelor de ardere în fața turbinei t_3^* ($\eta = 0{,}50$, $t_0 = 15°C$, $\varkappa_g = 1{,}35$).

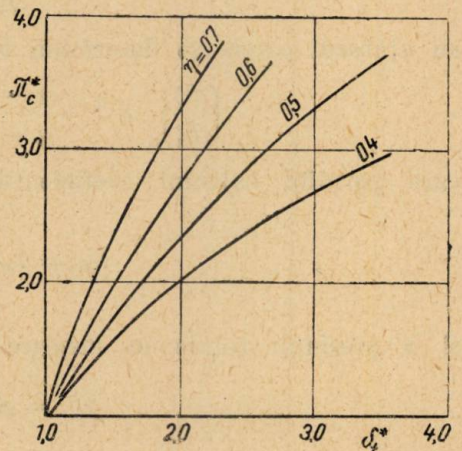


Fig. 6. — Variația gradului de comprimare a compresorului π_c^*, în funcție de δ_t^* și randamentul global η ($t_3^* = 600°C$, $t_0 = 15°C$).

randamentului global al turbocompresorului la valori suficient de mari pentru a realiza o funcționare sigură (fig. 6). Din această cauză, la asamblarea motorului cu grupul turbocompresor se dă o atenție deosebită situării liniei regimurilor de lucru ale compresorului în domeniul randamentelor maxime.

Pentru ilustrare, în figura 7 este prezentată variația cu sarcina a parametrilor menționați mai sus [9], dedusă experimental, care poate fi utilizată la determinarea, într-o primă aproximație, a eforturilor axiale. Deși această determinare este suficient de exactă pentru calculele curente, cînd se urmărește o precizie sporită este necesar să existe caracteristicile universale ale compresorului și turbinei.

În figura 8 sînt prezentate variantele eforturilor axiale ce apar în două turbocompresoare, construite în țara noastră, în funcție de presiunea de supraalimentare [10] pentru un anumit regim de lucru al motorului, apropiat de cel nominal, din care se constată că forța axială a turbocompresoarelor variază rapid cu presiunea de refulare a aerului din compresor, ajungînd la unele regimuri să atingă valorile limită admisibile ce pot fi preluate de palierele ansamblului.

Din modul de calcul al eforturilor axiale rezultă că există suficiente posibilități ca prin alegerea soluției constructive să se obțină un anumit

efort axial la un regim de lucru determinat; spre exemplu prin modificara locului de amplasare a labirinților compresorului și turbinei, modificarea diametrului butucului, alegerea presiunii pe suprafețele rotoarelor etc.

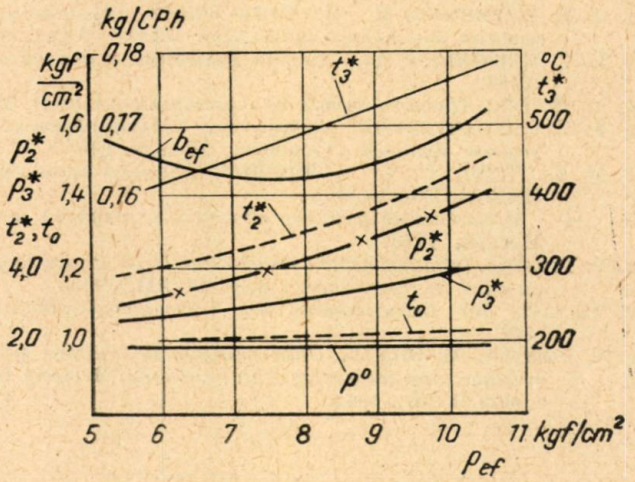


Fig. 7. — Variația parametrilor funcționali ai turbocompresorului cu sarcina motorului (b_{ef} — consum specific efectiv).

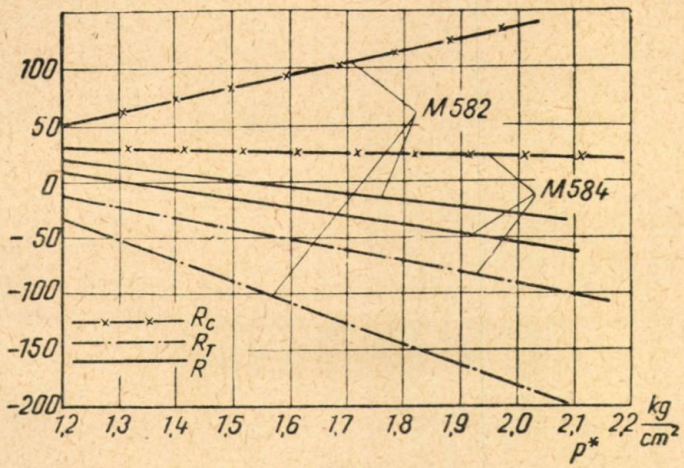


Fig. 8. — Variația eforturilor axiale ale compresorului, turbinei și a rezultantei totale, în funcție de presiunea de supraalimentare p_2^* ale grupurilor M-582 și M-584.

Aceste soluții constructive pot fi utilizate la modificarea valorii absolute a efortului axial, însă alura sa de variație rămîne aceeași.

Din cele prezentate, rezultă că la analiza posibilităților de utilizare a unui grup turbocompresor pentru supraalimentarea unui tip de motor cu ardere internă este necesară determinarea eforturilor axiale ce solicită palierele grupului, determinare care necesită cunoașterea caracteristicilor ambelor agregate.

Primit la redacție la 15 noiembrie 1963

BIBLIOGRAFIE

1. V. PIMSNER, I. CSERVENY, *Studiul utilizării turbinei de trecere pentru comprimarea gazelor naturale pe conductele magistrale*. St. cerc. energ., *3* (1963).
2. А. С. ЕРЕМЕНКО, М. И. САЙКОВСКИЙ, *Моделирование аэродинамики всасывающего потрубка компрессора*. Издат. Акад. наук УССР, Киев, 1955.
3. Б. С. СТЕЧКИН и др., *Теория реактивных двигателей* . I, Оборонгиз, Москва, 1956.
4. В. Ф. РИС, *Центробежные компрессорные машины*, Машгиз, Москва, 1951.
5. Г. С. СКУБАЧЕВСКИЙ, *Авиационные газотурбинные двигатели, конструкция и расчет деталей*. Оборонгиз, Москва, 1955.
6. М. Е. ДЕЙЧ, Г. С. САМОЙЛОВИЧ, *Основы аэродинамики осевых турбомашин*. Машгиз, Москва, 1959.
7. — *Исследования рабочего процессса в ступени газовой турбины*. Оборонгиз, Москва, 1956.
8. V. PIMSNER, *Influenţa naturii fluidului de lucru asupra caracteristicii universale a turbinei cu gaze*. St. cerc. energ., Seria B, **XII** (1962).
9. H. LIST, *Der Ladungswechsel der Verbrennungskraftmaschine*. Springer-Verlag, Wien, 1962.
10. V. PIMSNER, M. BIENER, *Unele probleme ale utilizării grupurilor turbocompresoare la supraalimentarea motoarelor cu ardere internă*. Memoriu Institutul de energetică al Academiei R.P.R., 1963.

UNELE PROBLEME ENERGETICE ALE CONSTRUCȚIEI VENTILATOARELOR ÎN R. P. POLONĂ

DE

Prof. dr. STANISLAV KUCZEWSKI [1])

621

În economia națională a R.P. Polone, totalul puterii absorbite de ventilatoare este destul de important, din cauza multiplelor utilizări în diverse instalații industriale uzuale din industria energetică, minieră, de construcții etc. Pe baza datelor din ultimii patru ani se apreciază că numărul suflantelor radiale din industria R.P. Polone este 300 000, cu o putere instalată de circa 1 100 MW, iar a celor axiale de peste 250 000, consumînd la regim o putere de 150 MW. Fără a avea o statistică exactă în acest domeniu, care să poată preciza coeficientul de simultaneitate în funcționarea acestor mașini, deci consumul lor anual efectiv, totuși datele existente indică poziția și importanța lor în economia energetică.

În viitor, pe măsura dezvoltării industrializării țării, va crește în mod continuu atît numărul suflantelor, cît și puterea medie de acționare, de aceea, orice creștere a randamentului de exploatare reprezintă o serioasă sursă de economie a consumului de energie și, în același timp, prin alegerea rațională a suflantelor în funcție de instalațiile ce urmează a fi deservite se obține o creștere a gradului de rentabilitate a întregii instalații. În foarte multe cazuri, acest ultim avantaj poate depăși cu mult pe cel realizat prin economia consumului de energie.

Prin randament de exploatare se înțelege randamentul care corespunde condițiilor de lucru efective, sau — în cazul unei sarcini temporar variabile — valoarea medie a randamentului.

Pentru a realiza rentabilitatea economică maximă este necesar ca ventilatorul respectiv să aibă randamentul cel mai ridicat și să fie ales

[1]) Institutul Termotehnic din Łódź—R. P. Polonă.

rațional față de rețea, adică punctul său de funcționare să fie situat cît mai aproape de punctul randamentului optim. În plus, cînd se prevăd variații de sarcină este necesar ca curba randamentului să fie cît mai aplatisată în zona valorilor maxime.

Cea dintîi și cea de-a treia condiție reclamă o îmbunătățire în construcția ventilatoarelor ; aceasta impune o metodă de calcul mai precisă, o mai bună cunoaștere a eficacității diferitelor piese ale mașinii și a tuturor fenomenelor de curgere care survin. În cazul suflantelor mari, cerințele cresc și reclamă adesea folosirea unor instalații de reglare, care complică și mai mult construcția mașinilor.

Îndeplinirea celei de-a doua condiții, adaptarea corespunzătoare la rețea, depinde de proiectantul care proiectează instalația din care face parte și suflanta. Proiectantul stabilește condițiile în care urmează să funcționeze ventilatorul, iar constructorul trebuie să fie în stare să interpreteze în mod practic condițiile de lucru ale ventilatorului.

Pentru îndeplinirea acestor condiții au fost necesare numeroase studii și cercetări, deoarece metodele de calcul de pînă acum nu au fost satisfăcătoare. Astfel, se considera, și se mai consideră în multe cazuri, că este suficientă stabilirea unui singur punct al caracteristicii ventilatorului, determinarea caracteristicii complete urmînd să fie făcută după construirea prototipului, cu ocazia determinărilor de recepție. Această situație s-a perpetuat datorită faptului că la ventilatoarele radiale se poate atinge cu ușurință, datorită forțelor centrifuge aplicate fluidului de lucru, randamente de peste 50 %, ceea ce a permis să se introducă în calcule numeroase simplificări. Cînd s-a impus însă ca randamentul ventilatorului să depășească 80 %, s-au ivit numeroase dificultăți legate de necunoașterea proceselor de lucru. În paralel, a crescut puterea absorbită și mărimea ventilatorului (cel mai mare din R.P. Polonă are 47 t), construindu-se uneori chiar unicate, ceea ce a condus la rentabilitatea efortului depus pentru stabilirea unei metode raționale de calcul. Cercetări în R.P. Polonă în domeniul ventilatoarelor se efectuează la Institutele politehnice din Łódź și Gdansk, la Institutul de mașini cu palete al Academiei de Științe Polone etc., însă întreaga sferă a problemelor menționate este cuprinsă de Institutul de termotehnică din Łódź, care timp de peste zece ani a efectuat cercetări sistematice în acest domeniu.

În prezent, cercetările cuprind ventilatoarele axiale, cu și fără anterotor, precum și rotoarele cu accelerație meridiană, apoi ventilatoarele radiale, de diverse soluții constructive, inclusiv rotoare cu tambur cu unghiurile de ieșire ale paletelor de 160—180°, ca și suflantele cu flux transversal.

La elaborarea metodelor de calcul s-a renunțat la ipoteza simplificatoare a fluidului ideal, ținîndu-se seama de viscozitatea și compresibilitatea fluidului. Teoria fluxului potențial s-a aplicat doar la calculul unor rotoare radiale, la care deplasarea fluidului avea aproximativ caracterul unui flux diagonal, paletele fiind proiectate cu o creștere continuă a unghiului de-a lungul liniilor de curent. S-au efectuat determinări experimentale, care au dat rezultate satisfăcătoare, pentru a verifica metoda de determinare a liniilor de curent între butucul și carcasa unui ventilator

cu acțiune. În prezent, este greu să se stabilească cît de mare este diferența între debitul determinat pe un model fix și cel real, în cazul rotirii paletelor și a butucului rotorului. Cercetările efectuate inițial asupra rețelelor de palete fixe nu au fost continuate, deoarece s-a constatat că transpunerea rezultatelor obținute asupra rețelelor mobile ale ventilatorului nu sînt suficient de precise. Modelele de ventilatoare axiale și cele cu accelerație meridiană au fost construite pe baza literaturii, astfel că s-a folosit metoda lui Howel, unele date prezentate de B. Eckert, ca și noile contribuții din bibliografia de specialitate. Pe baza acestor metode se poate calcula, pentru condiții date, curba profilului paletei, ca și punctul de funcționare. Rezultatele obținute, îmbinate cu o analiză teoretică, a permis adunarea unui material prețios pentru determinarea influenței diferiților parametri constructivi asupra calității funcționării ventilatorului și a preciziei calculelor.

În plus, s-a elaborat și o metodă proprie de calcul, bazată pe utilizarea funcțiilor coeficientului aerodinamic de portanță și de rezistență în funcție de unghiul de incidență, ca și de influența reciprocă a paletelor. Datele de care dispune însă Institutul de termotehnică din Łódź limitează aplicarea metodei la încărcări ale paletelor care să nu depășească coeficientul $C_y \cong 0{,}5$. În acest mod a fost proiectat un compresor axial pentru o turbină de gaze, rezultînd o abatere între curba caracteristică efectivă și cea calculată de numai 3%, la un randament optim de 83%.

În cazul ventilatoarelor radiale s-a reușit să se determine vectorul vitezei medii la ieșirea din rotor, la un debit oarecare, introducîndu-se ideea unei palete neeficiente, care nu transmite nici un fel de forță fluidului. Devierea paletei de la forma ei zero este o măsură pentru creșterea vitezei periferice a fluidului. În acest mod a fost coeficientul de micșorarea puterii, citat în lucrările de specialitate și care referindu-se numai la punctul nominal al curbei caracteristice, nu este adecvat pentru ventilatoarele la regimuri de lucru variabile. Metoda elaborată păstrează însă una din părțile slabe ale vechii metode de calcul — referirea doar la fibra medie a curgerii — de aceea nu poate fi aplicată la rotoarele diagonale sau la cele cu tamburi cu palete mult curbate înainte. Pînă la elaborarea unei metode proprii complete și unitare este încă o cale lungă de parcurs. Se acumulează material nou și se îmbunătățește cel disponibil.

În paralel, s-au făcut numeroase experiențe pentru studiul sistemelor de reglare a ventilatoarelor, a cauzelor care produc uzura paletelor și a rotoarelor, ca și a depunerilor de praf pe palete. Această ultimă problemă este deosebit de importantă pentru ventilatoarele exhaustoare ale cazanelor cu aburi, care sînt echipate de cele mai multe ori cu focare alimentate cu praf de cărbune cu un conținut relativ mare de cenușă, iar instalațiile de desprăfuire nu dau întotdeauna rezultate satisfăcătoare. În acest caz, sînt de rezolvat probleme de dinamica gazelor, probleme constructive și tehnologice. Experimentările au demonstrat că, în acest complex de probleme, materialul nu joacă un rol deosebit, diferențele dintre rezultatele la uzură ale diferitelor materiale fiind destul de mici. S-a constatat că prelungirea vieții ventilatoarelor trebuie căutată în repartizarea uniformă a particulelor în focare pe suprafața totală supusă

curgerii fluidului. Soluționarea acestei probleme este încă dificilă. Sudarea unor praguri din plăcuțe de metal realizează o oarecare protecție, dar utilizarea unui material superior nu a dus la ameliorări sensibile, în schimb la mărirea vitezei periferice a rotorului și a unghiurilor de ieșire ale paletelor. S-a insistat mai mult asupra acestor probleme, deoarece durata de funcționare a ventilatoarelor de cazane, depinde în mare măsură, de cantitatea de praf din gazele de ardere.

Această situație îl obligă pe constructor să adopte o soluție de compromis, practica demonstrînd că ea este cauza care limitează în mare măsură posibilitatea realizării unor randamente maxime, a dimensiunilor și greutăților reduse.

Cercetările întreprinse s-au concretizat în numeroase instalații introduse în exploatare, ce vor fi prezentate în continuare. Însă nu toate cercetările au dus la rezultate scontate. S-a întîmplat ca uneori să fie necesară întoarcerea la unele idei vechi, care păreau perimate, dar care au fost revizuite și îmbunătățite pe baza noilor rezultate științifice. Un exemplu care ilustrează cele afirmate îl constituie cercetările legate de ameliorarea unui ventilator radial, cu flux transversal, destinat să fie preîncălzitor de aer în scopuri industriale. Se spera să se realizeze o construcție ușoară, cu dimensiuni optime, care să producă un zgomot slab. Cele dintîi cercetări au condus la un randament mic și un zgomot puternic. Cercetîndu-se cauzele s-a ajuns la ideea ventilatorului cu tambur. Experiențele pe modele au dat rezultate satisfăcătoare, astfel că acest tip a fost adoptat ca preîncălzitor de aer.

Pe baza cercetărilor întreprinse în domeniul ventilatoarelor, s-a ajuns în R.P. Polonă, la o cotitură bine definită ; trecerea la fabricarea pe scară industrială a unor noi tipuri este legată de adaptarea construcției la condițiile de prelucrare din uzine, la ameliorarea elementelor tipizate. În prezent, se acumulează date din exploatare, care sînt valorificate în laboratoare și apoi introduse în fabrica pentru îmbunătățirea fabricației și eliminarea erorilor existente. În domeniul construcției ventilatoarelor în R.P. Polonă, ca urmare a colaborării între institutele de cercetări științifice, birourile de proiectare și uzine, a apărut o perioadă de reprofilare, în care vechile modele și construcții sînt părăsite și dispar treptat din uzine.

Pentru a ilustra dezvoltarea construcției și valorificarea cercetării științifice în producție este necesară o privire de ansamblu asupra ventilatoarelor, care reprezintă un tip anumit.

În momentul de față, în R.P. Polonă toate cazanele de abur se construiesc în țară, echipate cu ventilatoare noi.

Este vorba în special de ventilatoarele cazanelor cu capacitatea de 130, 210, 230, 380 și 650 t/h, în diferite variante, în funcție de felul combustibilului : huilă, cărbune brun, precum și în funcție de condițiile locale.

Ventilatoarele pentru insuflare sub zonele cazanelor mari de abur se construiesc cu aspirație unilaterală. Rotoarele, cu plăci de acoperire înclinate, au paletele profilate, cu unghiurile de intrare de 29—35°.

Vitezele periferice ale rotoarelor sînt de 85—109 m/s. Sectoarele de admisie cercetate în prealabil la Institutul termotehnic din Łódź (ITC) asigură o justă funcționare, concomitent cu rotoarele. O instalație de reglare cu acțiune continuă s-a realizat prin paletele directoare mobile precuplate.

Dispozitivul director a fost montat în decupajul carcasei spirale, ceea ce a avut ca rezultat scurtarea arborelui și ieftinirea piesei forjate.

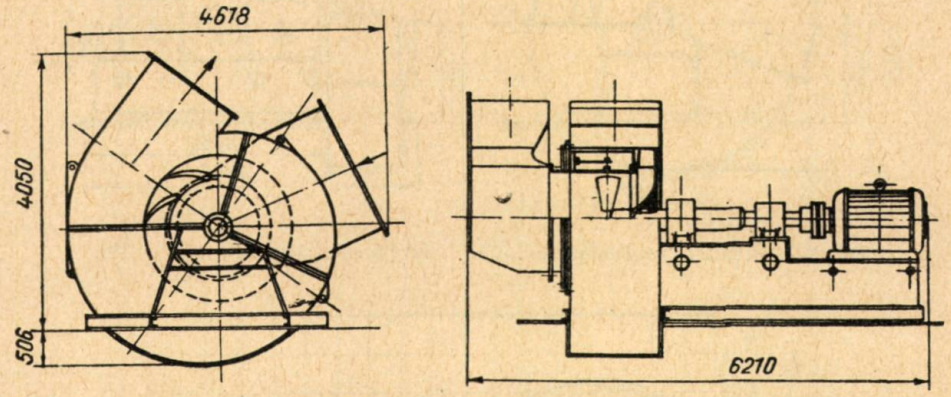


Fig. 1. — Schema ventilatorului (66 — 13) pentru cazanul OP — 230 b cu cărbune brun.

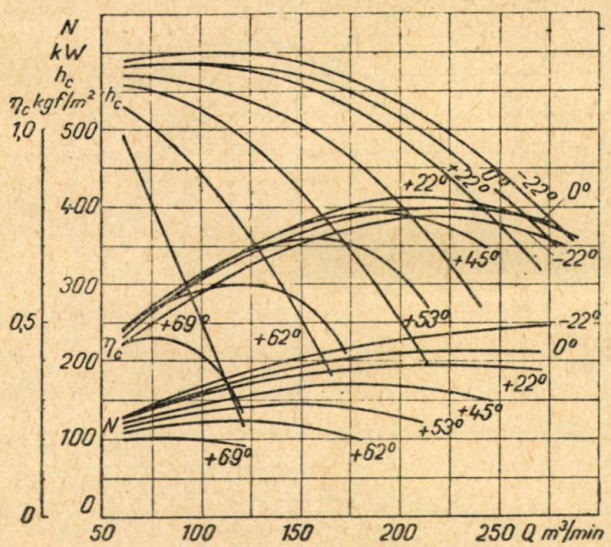


Fig. 2. — Caracteristica ventilatorului (66 — 13).

Randamentele în punctele optime ale curbei caracteristice variază între 75 și 87%.

Randamentul de exploatare optim, care depinde de adaptarea ventilatorului la cazan pentru domeniul de reglare al unui anumit program

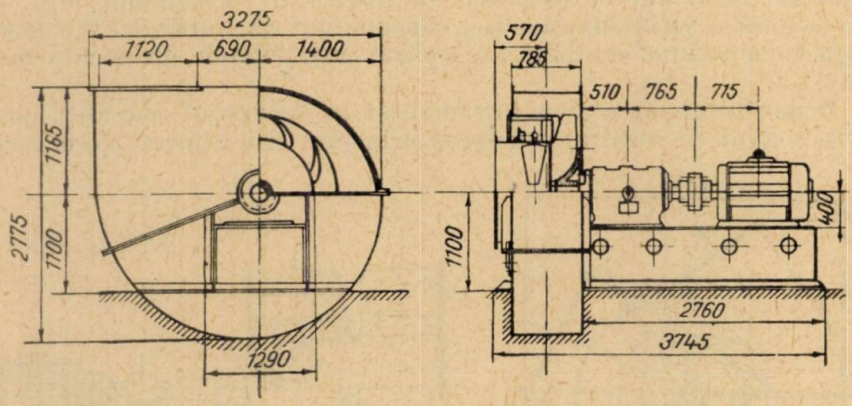


Fig. 3. — Schema ventilatorului (GC — 22) pentru cazanul OP — 230.

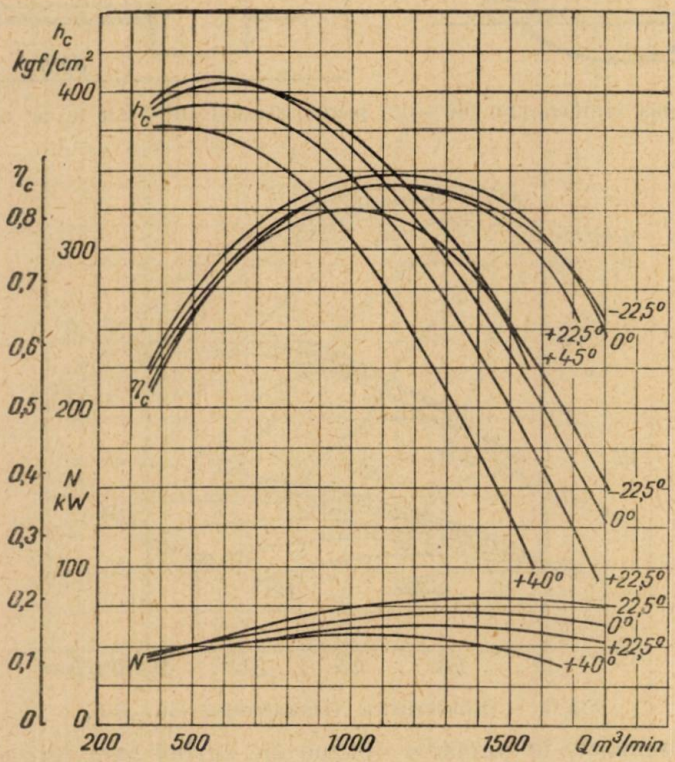


Fig. 4. — Caracteristica ventilatorului (GC—22), avînd $Q = 79\,000$ m³/h, $h = 300$ kgf/m².

de lucru și pentru scopurile admise, este stabilit, prin calculele prealabile, între limitele 76—87%.

O ilustrare a celei mai recente construcții din producția R.P. Polone se găsește în figura 1, reprezentînd ventilatorul de construcție inferioară (tip 66—13) pentru un cazan OP — 230 b cu cărbune brun, avînd caracteristicile următoare :

debitul $Q = 153\,000$ m³/h ; presiunea de refulare $h = 410$ kgf/m² ; temperatura $t = 35°C$; puterea motorului $N = 260$ kW.

În figura 2 este reprezentată caracteristica ventilatoarelor de mai sus din care rezultă că randamentul optim este de 82%. Randamentul variază însă de la 75 la 80% cînd cazanul funcționează la 20% din puterea nominală. Se înțelege de la sine că valorile de mai sus nu pot fi menținute decît în condițiile de exploatare presupuse în cazul în speță. În figurile 3 și 4 este prezentat un ventilator de construcție inferioară (tip GC—22) pentru cazane tip CP — 230 precum și caracteristica lui. Valorile nominale sînt : debitul refulat $Q = 79\,000$ m³/h ; presiunea de refulare $h = 300$ kgf/m² ; temperatura $t = 20°C$; puterea motorului $N = 136$ kW.

După cum se poate vedea ventilatorul lucrează la regim nominal, cu un randament de 85%.

Tipul (GC—76) ale cărui caracteristici sînt redate în figura 5 reprezintă o suflantă mică și simplă pentru cazanul OKR—5 cu grătar, avînd caracteristicile $Q = 21\,100$ m³/h ; $h = 190$ kgf/m² ; $t = 150°C$; $N = 20$ kW.

Figura 6 reprezintă caracteristica suflantei de aspirație (GC — 28) pentru cazanul OP—210. Datele de proiectare sînt

$$Q = 242\,000 \text{ m}^3/\text{h} ;$$

$$h = 230 \text{ kgf/m}^2 ;$$

$$t = 150^0 \text{C} ;$$

$$N = 250 \text{ kW}.$$

Din cauza sortului de cărbune folosit și din cauza marei uzuri a paletelor, în practică au apărut mari dificultăți. A fost necesar să se facă o serie de modificări suflantei, modificări care au coborît randamentul de exploatare la 70%. În figura 7 sînt prezentate caracteristicile ventilatorului (GC—21) al morii cazanului OP—210, avînd $Q = 50\,000$ m³/h ; $h = 1\,000$ kgf/m² ; $t = 70°C$; $N = 250$kW. Randamentul acestui ventilator, exploatat cu aer fără praf, este de 78%. Valoarea indicată este deosebit de mare pentru acest tip constructiv cu rotor îngust.

Din datele menționate mai sus s-ar putea trage concluzia că randamentele ventilatoarelor de cazane prezentate sînt foarte mari. În exploatare însă, s-au obținut randamente cu mult mai mici, datorită evaluării aproximative a cantității real necesare de aer, respectiv de cantitățile de gaze arse și de rezistența din canalele cazanelor. Este dezavantajoasă și cerința unei rezerve mai mari de presiune, determinată de prevederi exagerate. Caracteristicile prezentate demonstrează clar cît de mult scade randamentul în exploatare în cazul unei alegeri eronate a ventilatorului caza-

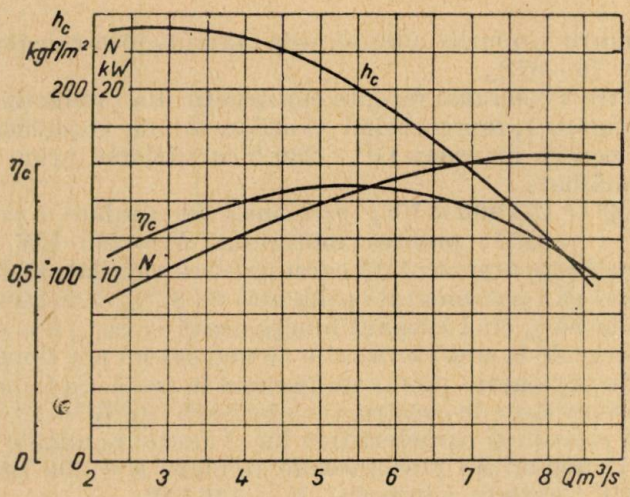


Fig. 5. — Caracteristica ventilatorului (GC — 76) destinat cazanului OKR — 5.

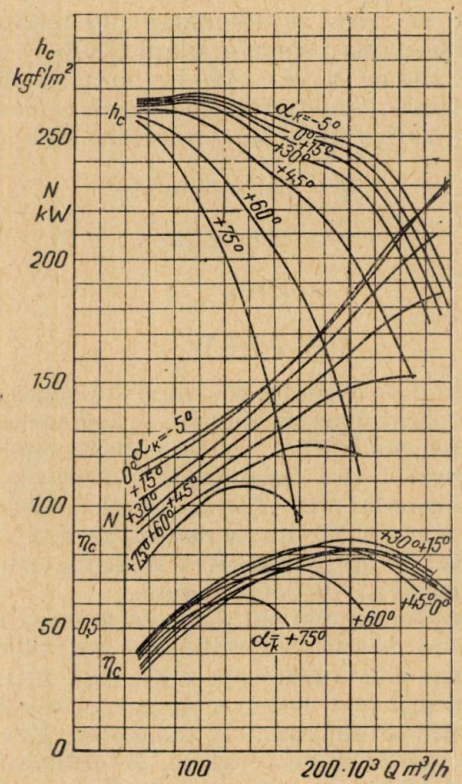


Fig. 6. — Caracteristica ventilatorului de aspirație (GC — 28) al cazanului OP — 210.

nului. Cu toate acestea, există exemple de scădere a puterii de acționare cu circa 40%, pricinuită de înlocuirea unui tip vechi de ventilator de cazan printr-unul nou. Printre alte unități mari, poate fi menționată suflanta (GC—30) cu două turații de lucru și cu reglare continuă prin roata directoare de intrare a cărei caracteristică este prezentată în figura 8 și avînd la regim nominal $Q = 420\,000$ m³/h ; $h = 130/230$ kgf/m² ; $t = 20°C$; $N = 250/500$ kW.

Baza de la care se pleacă, în proiectarea ventilatoarelor de puteri mari, sînt modelele.

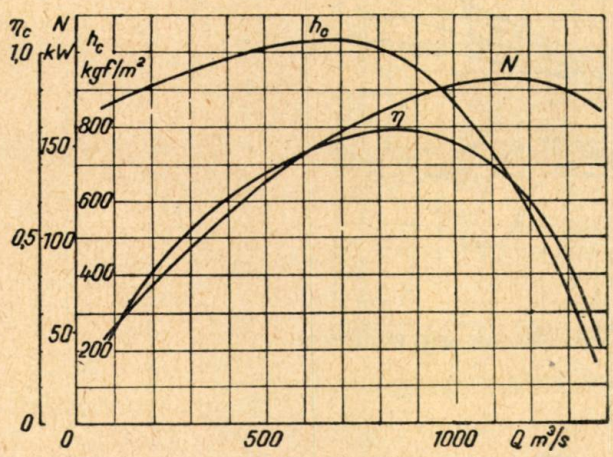


Fig. 7. — Caracteristica ventilatorului (GC — 21) al morilor cazanului OP—210.

Modelul se execută la scara 1 : 3, se păstrează identică viteza perife a rotoarelor în vederea unei bune transpuneri a caracteristicii asupra fenomenelor din timpul experienței.

Se pare că această metodă permite o mai precisă evaluare a caracteristicilor ventilatoarelor, executate la dimensiuni normale, decît determinarea caracteristicilor în timpul exploatării cazanului ; într-adevăr exploatarea nu permite efectuarea de măsuri suficient de exacte.

Pe model se poate stabili debitul refulat cu precizia de $\pm 1\%$, presiunea cu precizia de $\pm 2\%$, puterea necesară cu precizia de $\pm 1{,}5\%$, iar randamentul cu o precizie de $\pm 2\%$.

Modelele servesc și la elaborarea de serii de tipuri pentru industrie. Ca un exemplu, în figura 9 se prezintă caracteristicile seriei ventilatoarelor GC—19 fabricate în serie la fabrica din Olkusz. Caracteristicile machetei au fost :

$$Q = 6\,300 \text{ m}^3/\text{h} ; \; h = 322 \text{ kgf/m}^2 ; \; t = 20°C ; \; N = 10 \text{ kW}.$$

Dintr-o serie de încercări făcute cu un ventilator cu roata directoare foarte lată și cu paletele curbate înainte, cu unghiul de ieșire de 180 pînă la 160°, a rezultat construirea unui ventilator cu tambur. Caracteristic pentru

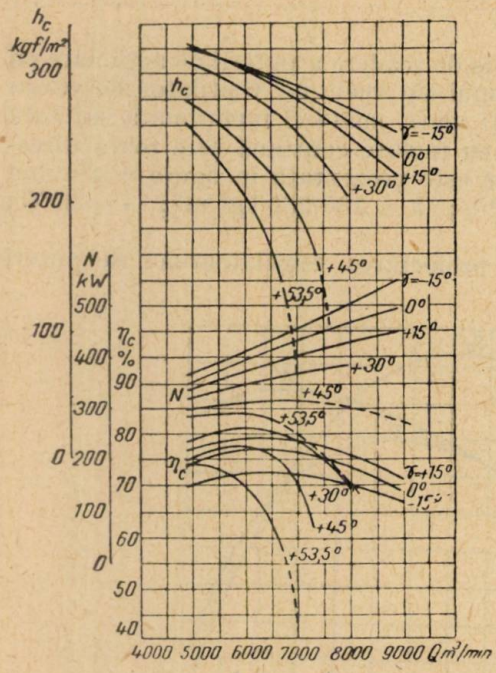


Fig. 8. — Caracteristica ventilatorului (GC—30) cu două turații de lucru și cu reglare continuă prin palete directoare la intrare.

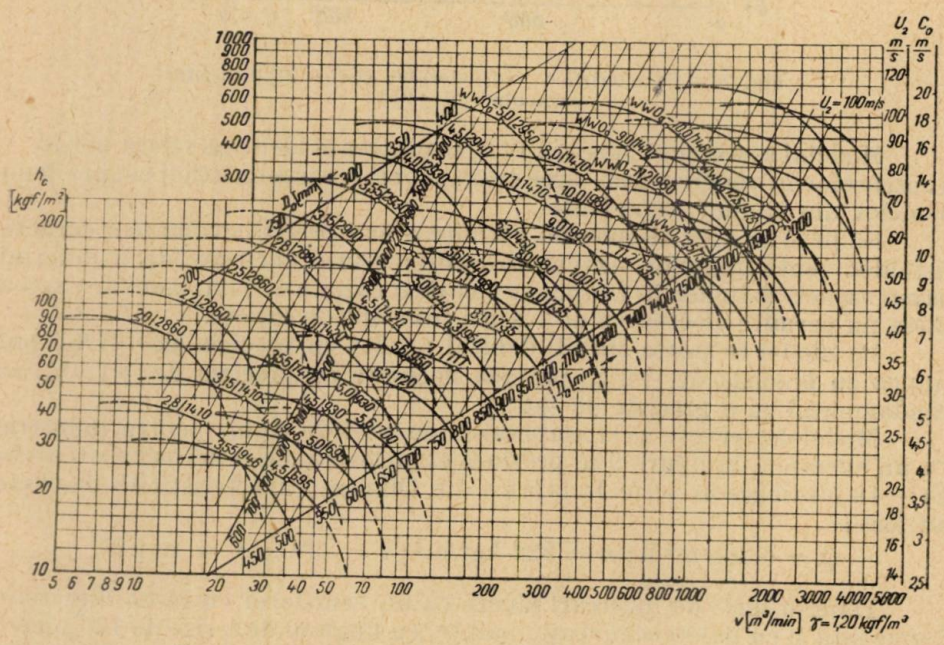


Fig. 9. — Caracteristicile seriei de ventilatoare (GC—19).

acest ventilator este coeficientul de refulare foarte mare care atinge valoarea de 3,2. Curbele de refulare sînt permanent ascendente, după cum rezultă din figura 10.

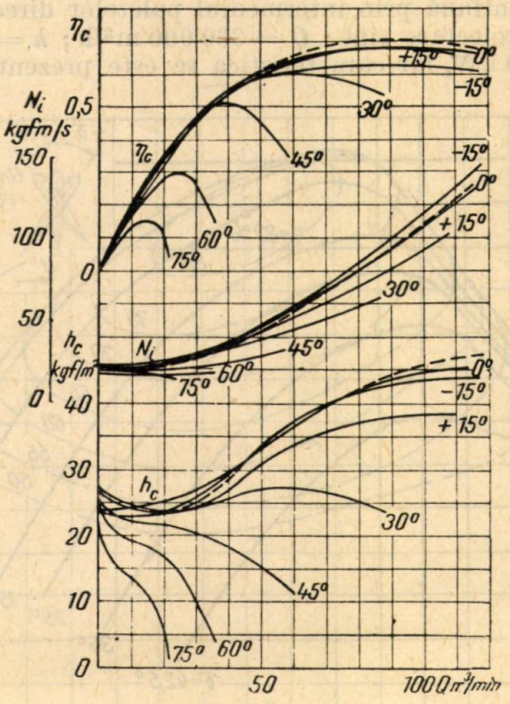


Fig. 10. — Caracteristica ventilatorului (GC—37).

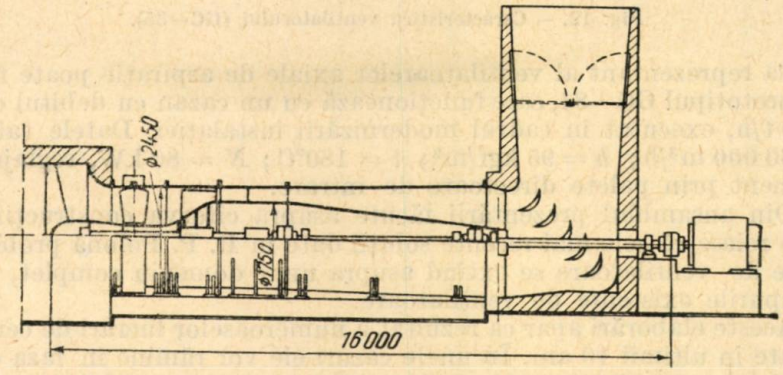


Fig. 11. — Schița ventilatorului (GC—35) aerajului central.

La astfel de ventilatoare se realizează un randament de 70%, chiar și în cazul unghiurilor de ieșire mari. Aceasta se explică prin aceea că o ase-

menea coroană cu palete provoacă o accelerație importantă a gazelor.

Pentru a ilustra cercetările efectuate în legătură cu ventilatoarele axiale, în figura 11 se prezintă ventilatorul pentru aerisirea minelor (GC—35) cu reglare continuă prin intermediul paletelor directoare de intrare. Datele sale de proiectare sînt : $Q = 360\,000$ m³/h ; $h = 305$ kgf/m² ; $t = 20°C$; $N = 430$ kW, iar caracteristica sa este prezentată în figura 12.

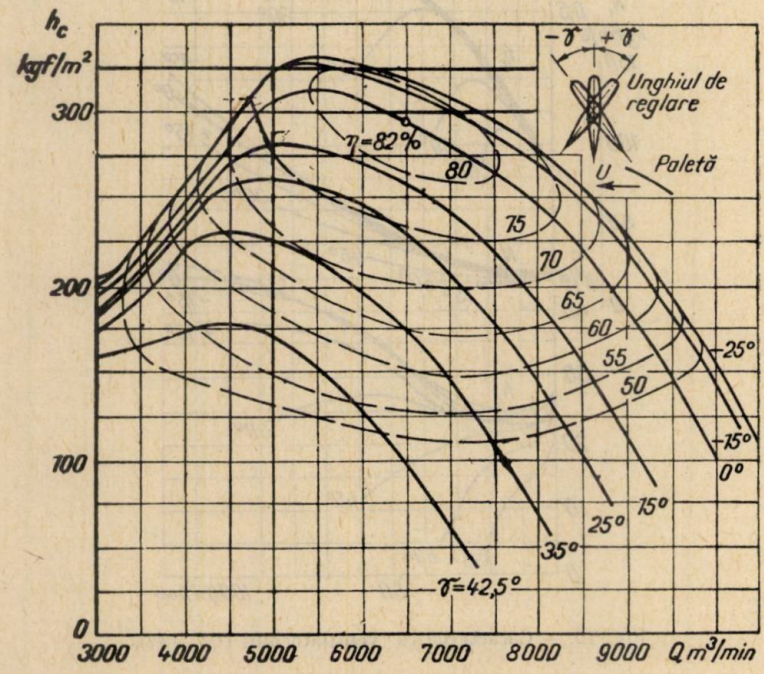


Fig. 12. — Caracteristica ventilatorului (GC—35).

Ca reprezentant al ventilatoarelor axiale de aspirație poate fi considerat prototipul GC—84, care funcționează cu un cazan cu debitul de abur de 130 t/h, executat în cadrul modernizării instalației. Datele sale sînt : $Q = 160\,000$ m³/h ; $h = 95$ kgf/m² ; $t = 180°C$; $N = 80$ kW, reglajul fiind permanent prin palete directoare de intrare.

Din ansamblul prezentării făcute asupra cîtorva construcții selecționate reiese că cele mai recente soluții date în R. P. Polonă problemelor ridicate de ventilatoare se extind asupra unui domeniu complet, cuprinzînd tipurile existente de ventilatoare.

Aceste elaborări apar ca rezultat a numeroaselor lucrări de cercetare, efectuate în ultimii 10 ani. În unele cazuri ele vor rămîne în faza de prototipuri, în multe alte cazuri însă ele vor fi introduse în producție.

Primit la redacție la 20 septembrie 1963

ASUPRA UNOR NOI PROPRIETĂȚI ALE ELECTROMAGNEȚILOR DE TIP SOLENOIDAL

DE

prof. MATEI MARINESCU
MEMBRU CORESPONDENT AL ACADEMIEI R.P.R.

621.318.33.001.25

INTRODUCERE.

Electromagnetul este unul din dispozitivele cele mai vechi folosite în electrotehnică.

În legătură cu electromagneții solenoidali se cunoaște proprietatea unui asemenea electromagnet de a atrage miezul magnetic (armătura mobilă) în interiorul solenoidului (efect de succiune), proprietate folosită în practica industrială unde asemenea electromagneți sînt folosiți la ridicarea de greutăți, la acele de căi ferate, ca ciocane pilon ș.a.

În general, electromagnetul fiind alimentat în curent continuu sau *alternativ*, atunci cînd miezul este îndepărtat din poziția centrală și lăsat liber, el revine, sub acțiunea forțelor electromagnetice de atracție, în această poziție centrală, sau direct, sau prin cîteva oscilații de amplitudine descrescîndă (oscilații amortizate).

Miezul se găsește deci, în poziția centrală, în stare de echilibru stabil.

Aceasta constituie singura proprietate cunoscută pînă în prezent în legătură cu acești electromagneți și care, după cum s-a menționat, este folosită în aplicații industriale.

Cercetările noastre au pus în evidență o serie de noi proprietăți datorită cărora acești electromagneți pot fi folosiți avantajos ca moatoare electrice cu mișcare alternativă, mișcare întîlnită tot atît de frecvent în practica industrială ca și mișcarea de rotație, și obținută astăzi încă cu motoare

electrice rotative clasice, şi mecanisme intermediare. Astfel, în lucrări anterioare [1], [2] am folosit existenţa la aceşti electromagneţi a unui regim de oscilaţii, cu frecvenţă egală cu 1/2 din frecvenţa curentului constituit din impulsuri. Nu s-a făcut însă în aceste lucrări analiza procesului prin care acest regim ia naştere şi dacă este stabil sau labil.

DESCRIEREA UNOR NOI EFECTE OBŢINUTE CU ELECTROMAGNEŢI SOLENOIDALI

În anumite condiţii, pe care urmează să le stabilim starea de echilibru stabil, cunoscută ca atare, în literatura tehnică de specialitate, a unui miez magnetic al unui electromagnet solenoidal, poate deveni o stare de echilibru labil ; astfel miezul poate părăsi spontan poziţia centrală îndepărtîndu-se de ea prin oscilaţii de amplitudine crescîndă, în jurul poziţiei centrale, pînă cînd atinge o anumită amplitudine, finită, de regim oscilant permanent.

Aceste oscilaţii permanente, în jurul poziţiei centrale, de amplitudine constantă, constituie o a 2-a stare de echilibru (dinamic) stabil, a electromagnetului. Dacă căutăm să îndepărtăm electromagnetul din această stare dinamică, de echilibru, căutînd să-i micşorăm sau să-i mărim amplitudinea de oscilaţie, el revine singur la amplitudinea de regim, odată ce cauza micşorării sau măririi amplitudinii a fost îndepărtată. Rezultă deci că această nouă stare de echilibru dinamic este stabilă.

Se mai poate întîmpla de asemenea, ca oscilaţiile să nu atingă o valoare finită a amplitudinii ci aceasta să continue să crească pînă cînd miezul este proiectat în afara solenoidului.

În sfîrşit, mai putem obţine încă următorul efect : îndepărtînd miezul din poziţia centrală de echilibru, pînă la o anumită *distanţă critică* şi lăsîndu-l liber, el să revină în poziţia centrală prin oscilaţii amortizate.

Dacă însă depăşim această *distanţă critică*, miezul nu mai revine la centru ci se îndepărtează tot mai mult prin oscilaţii de amplitudine crescîndă, pînă la o anumită amplitudine, cînd intră în starea de echilibru dinamic, *stabilă*, descrisă mai sus.

Chiar în poziţia corespunzînd distanţei critice, miezul se găseşte într-o stare de echilibru (dinamic) *labilă*, astfel încît la cea mai mică perturbaţie el revine la una sau cealaltă din cele două stări de echilibru stabil.

Toate aceste efecte, la prima vedere neverosimile, datorită faptului că nu putem concepe cum forţe electromagnetice de *atracţie*, către centru, pot scoate miezul din poziţia centrală, îndepărtîndu-l de aceasta, ceea ce ar presupune forţe de *repulsie*, faţă de centru, nu pot fi puse în evidenţă prin alimentarea obişnuită a electromagnetului cu curent continuu sau alternativ.

Datorită acestor două împrejurări şi anume, pe de o parte imposibilităţii de a fi imaginate pe baza concepţiilor clasice, iar pe de altă parte din cauza unei probabilităţi reduse de a fi puse în evidenţă experimental, aceste efecte au rămas necunoscute — electrotehnicien lor — şi nu au fost încă folosite la dezvoltarea de noi tipuri de motoare electrice.

BAZELE FIZICE ALE PROCESULUI DE STABILIRE A REGIMULUI DE ECHILIBRU DINAMIC, STABIL

Procesul fizic al instabilității centrale și al stabilirii regimului de echilibru dinamic, stabil, la electromagneții solenoidali poate fi explicat după cum urmează : la cea mai mică disimetrie (infinit mică) a miezului față de centrul electromagnetului de tip solenoidal, forțele de atracție electromagnetice îl vor atrage spre centru. Dacă lucrul mecanic al acestor forțe pe o distanță egală cu dublul disimetriei inițiale este mai mare decît lucrul mecanic absorbit de sarcină pe același parcurs, atunci este evident că disimetria creată prin deplasarea armăturii de partea opusă disimetriei inițiale, față de centru, va fi mai mare decît disimetria inițială. Dacă aceeași inegalitate între cele două energii, energia electromagnetică și energia absorbită de sarcină se păstrează în continuare și pentru deplasarea armăturii în sens invers din noua poziție de disimetrie sporită, este evident că armătura se va depărta prin oscilații de amplitudine crescîndă de poziția centrală, care devine astfel o poziție de echilibru labil.

Procesul acesta va continua pînă cînd la o anumită amplitudine de oscilație cele două energii devin egale, cînd procesul se oprește iar regimul corespunzător este chiar regimul echilibrului dinamic, stabil.

Acesta fiind substratul fizic al acestui proces, urmează ca pe bază de analiză matematică, exprimînd lucrul mecanic al forțelor electro-magnetice în funcție de amplitudinea de oscilație precum și lucrul mecanic absorbit de sarcină, în funcție de aceeași variabilă, să stabilim condițiile în care are loc inegalitatea, în sensul arătat, precum și egalitatea acestor două energii.

CALCULUL LUCRULUI MECANIC AL FORȚELOR ELECTROMAGNETICE

Să calculăm deci lucrul mecanic τ_{em} al forțelor electromagnetice în deplasarea armăturii din poziția $-x$ pînă în poziția $+x$ (v. fig. 1) vom avea

$$\left|\tau_{em}\right|_{-x}^{x} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} i\,d\varphi.$$

Să presupunem că, în momentul cînd $t = 0$ și $x = -\hat{x}$ avem

$$i = 0\,; \quad \varphi = 0$$

de asemenea că după $t = \frac{T_m}{2}$, cînd $x = +\hat{x}$ avem din nou

$$i = 0, \quad \varphi = 0.$$

Aceasta însemnă că i, φ și x fiind funcții periodice de t, perioada T_m a lui $x(t)$ este egală cu dublul perioadei T a lui $i(t)$ și $\varphi(t)$. Deci

$$T_m = 2T.$$

Vom avea atunci

$$\left|\tau_{em}\right|_{-\hat{x}}^{+\hat{x}} = \int_{(C)} i\,d\varphi, \tag{1}$$

integrala fiind luată de-a lungul conturului închis (C) descris în planul (φ, i) într-o perioadă de timp T, de funcțiile periodice $\varphi(t)$ și $i(t)$. Observăm că, în baza presupunerii inițiale conturul (C) trece prin origine, adică prin punctul de coordonate $\varphi = 0$, și $i = 0$.

Deoarece avem în vedere stabilirea condițiilor pentru care : $\tau_{em} \geqslant \tau_s$, este indicat să urmărim ca integrala (1), pentru valorile de vîrf ale lui x și i date anticipat, să fie maximum.

În lucrări anterioare am stabilit că acest maxim există și are loc atunci cînd conturul descris în planul (φ, i) prin variația periodică a lui $\varphi(t)$ și $i(t)$, este acela din figura 2, în care curba OA corespunde variației lui φ cu i pentru x constant și egal cu valoarea dată anticipat, fie ea x_m ; iar curba OB corespunde variației lui φ cu i, pentru $x = 0$. Aceste două curbe reprezintă chiar curbele de magnetizare (statice) a circuitului magnetic, cu întrefierul maxim, corespunzător lui $x = x_m$ și întrefierul minim corespunzător lui $x = 0$, respectiv. În cazul cînd φ_m nu atinge valoarea de saturație, aceste două curbe sînt niște drepte, care pornesc din origine. Tot în lucrările anterioare, menționate, s-a stabilit că funcțiile $x(t)$ și $i(t)$ care permit obținerea ciclului $OABO$, au forma și poziția relativă ilustrată în figura 3.

Se vede astfel că, în timpul unui impuls de curent, x trebuie să scadă (în valoare absolută) iar în timpul unei pauze de curent, x trebuie să crească (în valoare absolută).

După cum s-a arătat în acele lucrări, această condiție de fază se realizează de la sine, atunci cînd o anumită relație de „rezonanță electromecanică" este satisfăcută. Această relație este următoarea :

$$f = a\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Să evaluăm deci integrala (1) de-a lungul centrului $OABO$. În acest scop trebuie să cunoaștem funcția $\varphi(x, i)$. Aceasta o aflăm din ecuația circuitului magnetic — care pentru un circuit ca acela al electromagnetului solenoidal din figura 1 — este dată de expresia

$$\varphi = L\left(1 + \frac{k}{1 + ax^2}\right)i, \tag{2}$$

unde L, k și a sînt constante în domeniul nesaturat al valorilor lui φ.

Expresia (2) traduce matematic proprietățile esențiale ale fluxului care străbate circuitul magnetic al unui electromagnet solenoidal. Într-adevăr, acest flux are valoarea maximă pentru $x = 0$, tinde asimptotic către o valoare finită, cînd $x \to \infty$ și nu depinde de semnul lui x, variabilă care intervine în (2) ca funcție pară. Dacă x și i sînt valori instantanee, φ reprezintă și el valori instantanee, circulația lui φ în planul (φ, i) făcîndu-se de-a lungul conturului, în sensul $OABO$

Efectuînd integrala (1) după înlocuirea lui φ, cu expresia (2) vom obține

$$\tau_{em} = \tau_0 \frac{ax_m^2}{1 + ax_m^2}, \tag{3}$$

unde

$$\tau_0 = \frac{1}{2} KLI_m^2. \tag{3'}$$

Expresia (3) ne dă deci energia disponibilă maximă care poate fi transformată în lucru mecanic, în condiții optime pentru un circuit magnetic dat, de tip solenoidal. După cum vedem această energie disponibilă maximă este funcție de variabila x_m, de parametrul τ_0 = valoarea asimptotică a lucrului

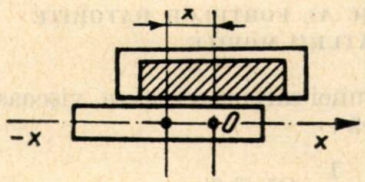


Fig. 1. — Electromagnet solenoidal (1/2 secțiune longitudinală).

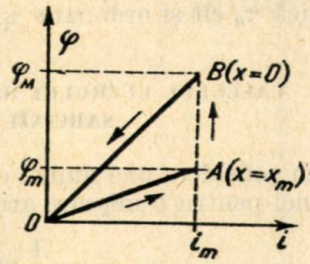


Fig. 2. — Ciclul de arie maximă descris în planul (Ø, I) pentru anumite funcții $x(t)$ și $i(t)$.

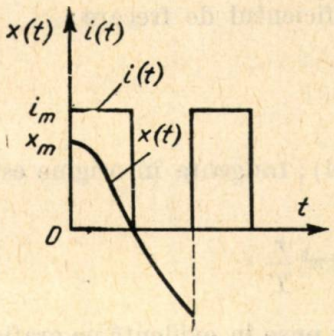


Fig. 3. — Funcțiile $x(t)$ și $i(t)$ care permit descrierea în planul (Ø/I) a conturului de arie maximă OA BO (v. fig. 2).

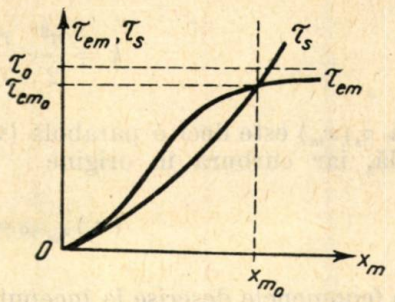


Fig. 4. — Curba lucrului mecanic al forțelor electromagnetice τ_{em} și curba de sarcină τ_s, funcție de variabila x_m, și a căror intersecție ne dă parametrii regimului de echilibru dinamic, stabil (x_{mo}, τ_{emo}).

mecanic și de a = constantă în domeniul de valori ale fluxului, care nu ating valoarea de saturație.

Pentru orice alte funcții $x(t)$ și $i(t)$ decît acele ilustrate în figura 3, ciclul transformării respective în planul (φ, i) este înscris în interiorul ciclului maxim și lucrul mecanic dezvoltat este mai mic.

Curba $\tau_{em}(x_m)$ este ilustrată în figura 4.

Această curbă se bucură de următoarele proprietăți :

1 — tangenta la origine este orizontală ;

2 — curbura în origine este egală cu

$$2\tau_0 a ; \tag{4}$$

3 — punctul de inflexiune are loc pentru coordonatele

$$x_m = 1/\sqrt{3a} ; \ \tau_i = 1/4 \ \tau_0. \tag{5}$$

Observăm că luînd pentru I_m diferite valori obținem pentru $\tau_{em}(x_m)$ o familie de curbe ; o dată cu creșterea lui I_m crește și curbura în origine, valoarea asimptotică τ_0 cît și ordonata τ_i a punctului de inflexiune.

CALCULUL LUCRULUI MECANIC AL FORȚELOR DATORITE SARCINII ARMĂTURII MOBILE

Vom considera aici numai cazul unei sarcini rezistive, vîscoase. Vom avea atunci pentru o mișcare armonică :

$$\tau_s = \frac{1}{2} r v_m^2 T = \frac{1}{2} r \Omega_m^2 x_m^2 T,$$

$$= k \cdot x_m^2, \tag{6}$$

unde : T = perioada curentului ; r = coeficientul de frecare ;

$$k = \frac{\pi^2}{2} \cdot \frac{r}{T}. \tag{7}$$

Curba $\tau_s(x_m)$ este deci o parabolă (v. fig. 4) ; tangenta în origine este orizontală, iar curbura în origine

$$(\tau_s)''_{x_m=0} = 2k = \pi^2 \frac{r}{T} \tag{8}$$

Toate fenomenele descrise la început pot fi puse în evidență pe graficul celor două funcții $\tau_{em}(x_m)$ și $\tau_s(x_m)$, calculate mai sus — și a proprietăților lor.

Astfel dacă în origine, curbura lui $\tau_{em}(x_m)$ este mai mare decît curbura lui $\tau_s(x_m)$, deci dacă

$$a \cdot \tau_0 > k, \tag{9}$$

poziția centrală a miezului nu mai corespunde unei stări stabile : la cea mai mică perturbație energia furnizată τ_{em} este mai mare decît energia consumată τ_s și armătura părăsește această poziție centrală, angajîndu-se într-un regim de oscilație de amplitudine crescîndă, pînă cînd cele două energii, furnizată și consumată, sînt egale, ceea ce are loc în punctul de intersecție al celor două curbe.

Scriind egalitatea celor două energii, vom obține valoarea amplitudinii de regim permanent, care va fi

$$x_m = \sqrt{\frac{\tau_0}{k} - \frac{1}{a}}. \tag{10}$$

Din examinarea relațiilor (10) și (9), se desprinde și concluzia că în cazul unei sarcini *rezistive*, deoarece curbele $\tau_{em}(x_m)$ și $\tau_s(x_m)$ nu se întretaie decît într-un singur punct, în afara originii, existența regimului labil *intermediar*, constatat experimental în anumite cazuri, nu este posbil.

Rămîne totuși încă nelămurit, la prima vedere, răspunsul la următoarea întrebare:

Cum se face că toate aceste efecte nu pot fi puse în evidență pe electromagneți solenoidali, alimentați în c.a.?

Dacă ne referim la condițiile optimizante care au stat la baza calculului lui $\tau_{em}(x_m)$, răspunsul vine de la sine. Într-adevăr, am presupus că alimentarea se face cu un astfel de curent $i(t)$ și oscilațiile $x(t)$ au o astfel de formă încît ciclul descris este ciclul $OABO$ de arie maximă (v. fig. 2); în afara acestor condiții optimizante și în particular dacă $i(t)$ este o funcție sinusoidală ciclul are o altă formă de arie mai mică, fiind înscris în interiorul ciclului limită $OABO$ — iar energia furnizată nu poate fi mai mare decît energia consumată, ceea ce face imposibilă existența unui regim de oscilație, stabil și asigură stabilitatea poziției centrale a armăturii.

Pentru aplicații, în vederea realizării unor tipuri de motoare cu mișcare alternativă, trebuie deci realizată inegalitatea (9) — obținută prin efectul combinat al alimentării prin impuls de curent și al satisfacerii relației „rezonanței electromecanice".

Se propune ca ansamblul noilor efecte descrise și analizate aici, să fie desemnate, spre referire, în lucrări ulterioare sub denumirea provizorie, prescurtată, de efectul „M" a. electromagneților solenoidali.

Primit la redacție la 20 noiembrie 1963

BIBLIOGRAFIE

1. M. MARINESCO, *Sur un nouveau moteur électrique à mouvement alternatif*. R.G.E., sept. (1961)
2. M. MARINESCO, N. GAVRILIU, I. GRÎNARU, *Sur l'effet d'hystérèse electro-mécanique*. R.G.E. dec. (1962).

SCHEMA RADIALĂ, STRUCTURĂ SIMPLĂ TIP, REPREZENTATIVĂ, ÎN STUDIUL SISTEMELOR ELECTROENERGETICE[1])

DE

PAUL DIMO

MEMBRU CORESPONDENT AL ACADEMIEI R.P.R.

1. NECESITATEA RESTRUCTURĂRII METODELOR STUDIULUI SISTEMELOR ENERGETICE ŞI A REVIZUIRII CONCEPTELOR

621.315.052.4 : 621.372.6

Introducerea calculatoarelor electronice se caracterizează prin:

a) Multiplicitate practic nelimitată a datelor ce pot fi considerate în analize şi calcule de sisteme energetice;

b) Efectuare uşoară a calculelor laborioase;

c) Rezultate foarte bogate, conţinute în tablourile cu cifre, elaborate cu ajutorul calculatoarelor.

Astfel, analizele pot fi extinse la sisteme foarte vaste, cu considerarea tuturor elementelor ce intervin şi care în trecut au fost în bună parte neglijate.

În schimb, se pierde viziunea unitară asupra proceselor, iar judecata pe căi simple directe pentru urmărirea fenomenelor este de multe ori practic imposibilă; raţionamentele simple considerînd direct legile fizice nu mai par posibile. Structurile simple: generator — bară de putere infinită; motor-generator etc., care permiteau raţionamente simple directe, ce stau şi azi la baza metodelor folosite de electrotehnică în studiul reţelelor sistemelor energetice, au devenit azi inaplicabile. Ne mulţumim deci cu legi de variaţie deduse din curbe obţinute dintr-un anumit număr de calcule şi rămîne dificultatea orientării noastre asupra unei anumite evoluţii, plecînd de la o situaţie care a fost calculată, adică de la caracteristicile unei anumite stări, determinate prin calcul.

[1]) Comunicare prezentată în şedinţa secţiei de ştiinţe technice a Academiei R.P.R., din 18 octombrie 1963.

2. SCHEMA RADIALĂ PROPUSĂ DE AUTOR ŞI CALITĂŢILE EI. IMAGINEA TIP ALCĂTUITĂ DIN CURENŢI DE SCURTCIRCUIT

Dintre toate structurile simple, propuse pentru studiul sistemelor energetice, schema radială echivalentă (fig. 2) propusă de autor oferă posibilităţi deosebite.

Ea consistă, pentru fiecare nod receptor sau generator al sistemului, într-o schemă care are în fiecare braţ al ei cîte un generator de tensiune reprezentînd unul din generatoarele sistemului şi avînd tensiunea electromotoare reală a generatorului reprezentat. Autorul a arătat [1], [2] marile posibilităţi ale acestei scheme în studiul sistemelor electroenergetice : probleme de regimuri, de stabilitate statică şi dinamică, de reglaj etc. pot fi atacate unitar cu ajutorul ei, iar un grafic tipizat (fig. 1), conţinînd curenţii pe care i-ar debita diferitele surse pe un scurtcircuit în nodul considerat, reprezintă o imagine simplă şi totuşi generală a dependenţelor dintre mărimi, care oferă astfel posibilităţi mari de raţionament pentru urmărirea fenomenelor fizice.

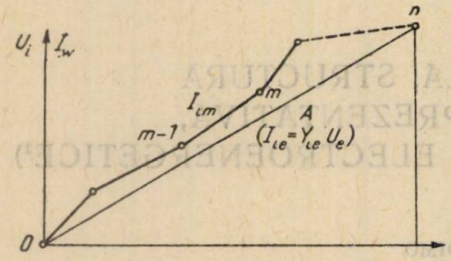


Fig. 1. — Imaginea tip reprezentativă alcătuită de curenţii de scurtcircuit.

Numărul oricît de mare al ramurilor radiale, dat de numărul de generatoare din sistem, nu complică problemele : imaginea rămîne aceeaşi linie frîntă alcătuită din vectorii reprezentînd curenţii de scurtcircuit, căreia i se multiplică corespunzător numai numărul de laturi. Formularea matematică se amplifică cu termeni noi de o aceeaşi structură simplă, care se adaugă pentru ramurile în plus [1], [2]. Considerînd aceste calităţi ale schemei radiale, autorul a dezvoltat căi unitare pentru stabilirea schemei radiale echivalente pentru un nod oarecare, pentru o structură de reţea oricît de complicată.

3. STABILIREA, CU AJUTORUL CALCULATORULUI NUMERIC, A SCHEMEI RADIALE CARE — PENTRU UN NOD DAT — ESTE ECHIVALENTĂ CU INTREAGA REŢEA

Pentru a stabili, pentru un nod dat al unei reţele oarecare, schema ei radială echivalentă, se foloseşte faptul că, atît expresiile matematice utilizate în studiul fenomenelor cu ajutorul schemei radiale, cît şi imaginea tip care o reprezintă, conţin ca elemente curenţii (YE) pe care i-ar debita fiecare sursă pe un scurtcircuit în nodul analizat, toate celelalte surse fiind presupuse pasivizate.

Problema se reduce deci la obţinerea curenţilor de scurtcircuit (YE) descompuşi pe surse, pentru un scurtcircuit în nodul pentru care se echivalează reţeaua complexă cu schema radială tipizată.

În vederea obţinerii acestor mărimi, trebuie cunoscută (sau admisă) o lege de variaţie, funcţie de tensiune, a oricărei sarcini exterioare nodului

pentru care se construiește schema radială. Toate sarcinile exterioare se înlocuiesc cu admitanțe (liniarizare) și curenții de scurtcircuit indicați mai sus se determină în această ipoteză. Ulterior, dacă este cazul, valorile acestor admitanțe pot fi variate.

Problema s-a redus astfel la utilizarea ecuațiilor nodale, de tipul matricial

$$[I]=[Y]\cdot[E] \tag{1}$$

și la eliminarea succesivă — după liniarizare — a nodurilor cu sarcini. *În final rămîn din ecuația matricială numai rîndul corespunzător nodului pentru care se construiește schema radială și nodurile „generatoare".*

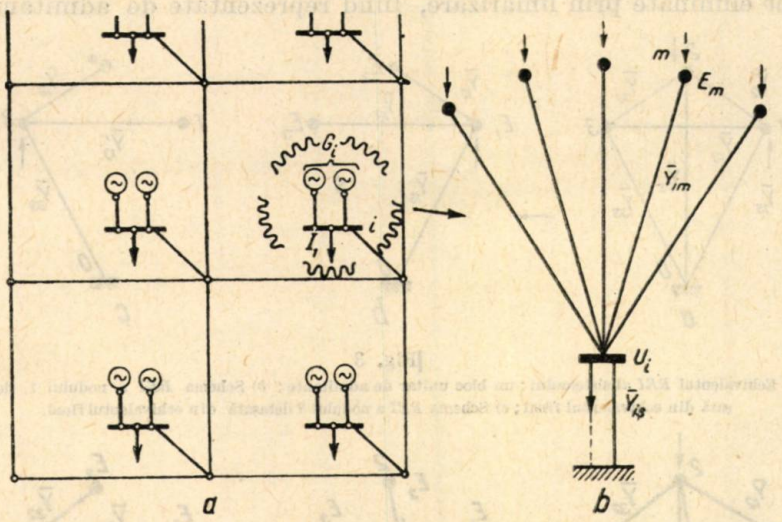


Fig. 2

a) Un sistem complex oarecare; *b*) Schema REI echivalentă sistemului pentru nodul *i*.

Fiecare rînd al matricei astfel reduse reprezintă o schemă radială a unui nod.

Cu calculatorul numeric se obțin aceste scheme cu multă ușurință [2], [3], fie din calculul curenților de scurtcircuit, fie în alte moduri, în paralel cu calculele curente, atacate cu ajutorul ecuațiilor nodale.

Schema astfel redusă conține un număr de ramuri egal cu numărul de generatoare din rețea, ramuri cărora li se aplică tensiuni egale cu forțele electromotoare reale ale acestor generatoare — și mai are o admitanță echivalentă în nodul central (vezi fig. 2), reprezentînd sarcina exterioară linearizată și redusă la nod (Y_s în figura 2).

În lucrările sale, autorul a numit această schemă, schema *REI* a nodului respectiv, pentru că ea este efectiv *radială* (*R*), pentru că este *echivalentă* (*E*), pentru nodul respectiv, cu întreaga rețea și fiindcă este *independentă* (*I*) de tot ce se petrece dincolo de tensiunile aplicate schemei.

4. BLOCUL UNITAR AL ECHIVALENTULUI REI AL UNUI ÎNTREG SISTEM ELECTROENERGETIC

Schemele radiale echivalente pot fi construite atît pentru noduri consumatoare, cît şi pentru noduri generatoare. Spre a se obţine aceste scheme pentru nodurile generatoare, se reduc toate nodurile cu sarcini şi rezultă ecuaţia matricială

$$[I_0]=[Y_0]\cdot[E_0].$$

În această ecuaţie matricială se obţine din fiecare rînd schema radială corespunzătoare a nodului generator respectiv; sarcinile au fost complet eliminate prin liniarizare, fiind reprezentate de admitanţele Y_{is}.

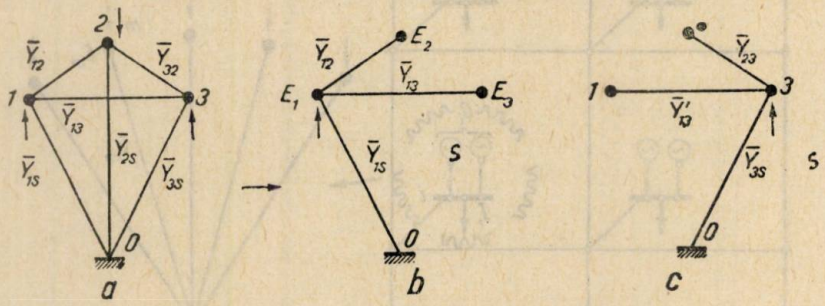


Fig. 3

a) Echivalentul *REI* al sistemului: un bloc unitar de admitanţe; *b*) Schema *REI* a nodului 1, detaşată din echivalentul final; *c*) Schema *REI* a nodului *3* detaşată din echivalentul final.

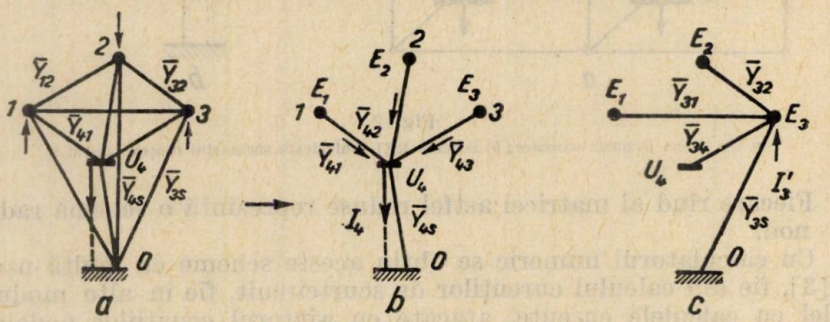


Fig. 4.

a) Echivalent REI al sistemului în care s-a păstrat şi nodul consumator 4; *b*) *c*) Scheme *REI* extrase din acest echivalent.

între nodul *i* şi pămînt (neutru), vezi figurile 2 şi 3. Autorul a observat că pentru fiecare sistem, oricît de complex, există un bloc unic de admitanţe legate într-o anumită schemă pe care el a numit-o *echivalentul final REI al sistemului* şi care are o proprietate importantă. Această schemă are un număr de noduri egal cu numărul de noduri generatoare din sistem — plus unul pentru neutru (sau pămînt), iar admitanţele sînt legate în ea direct

între diferitele noduri generatoare, după toate laturile existente în poligonul complet format de aceste noduri (fig. 3*a*).

Proprietatea importantă a echivalentului final *REI* al sistemului este următoarea : dacă se detaşează din el numai ramurile ce unesc un nod oarecare, considerat cu toate celelalte noduri ale poligonului complet, se obţine schema *REI* a sistemului, redusă la nodul considerat. Deci, echivalentul final *REI* al unui sistem se realizează asamblînd, după principiul indicat mai sus, schemele radiale ale sistemului, referitoare la diferitele lui noduri generatoare. Posibilitatea constituirii acestui bloc unic se bazează pe faptul că admitanţa din ramura care leagă nodul generator i cu nodul generator j (inclusiv pămîntul) rezultă acelaşi, fie că schema radială echivalentă se construieşte pentru nodul i, fie că ea se construieşte pentru nodul j : din ecuaţia matricială respectivă, admitanţa Y_{ij} rezultă egală cu admitanţa Y_{ji}. *Echivalentul REI final* al sistemului este deci alcătuit din schemele *REI* ale nodurilor generatoare şi corespunde reducerii tuturor sarcinilor linearizate.

Pentru a păstra într-un echivalent al sistemului şi un nod consumator „neliniarizat", ajunge să se considere tensiunea respectivă în nod şi injecţia lui de curent şi să fie tratat în rest ca orice nod generator (fig. 4).

După acelaşi principiu se pot constitui „echivalenţi" ai întregului sistem, chiar şi cu noduri fictive, cum ar fi nodul „sarcinii totale", aşa cum a arătat autorul în studii anterioare [2], [3], în cazul unor probleme dificile (de exemplu în problema determinării pierderilor).

5. ROLUL ECHIVALENŢILOR TIPIZAŢI REI CA ÎNSOŢITORI AI CALCULATOARELOR ELECTRONICE

Prin metoda autorului, problemele complicate ale sistemelor moderne foarte complexe sînt reduse la problemele simple ale structurii echivalenţilor radiali, care pot fi deduşi în paralel cu oricare calcul, împreună cu graficele reprezentative respective ; acestea se pot obţine şi mecanizat, cu ajutorul unui analizor grafic [1], dezvoltat de asemenea de autor. Structura topologică unică a schemelor radiale, pentru care se întocmesc grafice reprezentative tipizate, e deci singura tratată ca sistem fizic.

Prin aceasta :

1. Problemele sînt reduse la cazurile elementare care apar în structura schemei radiale, iar graficul tipizat reprezentativ redă simplu aspectele fenomenelor fizice.

2. Sînt puse în evidenţă elementele esenţiale în diverse probleme, ceea ce permite simplificări fundamentale şi reducerea la minimul necesar a elementelor de considerat în studiul unor probleme complicate (de exemplu în studiul pierderilor [3].

3. Se creează noi posibilităţi de studiu al structurilor moderne foarte vaste, prin descompunerea lor în mai multe sisteme reprezentate prin echivalenţi ce pot fi studiaţi apoi separat, — precum şi posibilitatea

studiului interconectării sistemelor, reductibilă la o anumită legare între ei a echivalenților [2].

★

Echivalenții autorului introduc deci raționamentul asupra unui sistem fizic simplu, — întotdeauna același și cunoscut ca natură specialistului, — în cercetarea oricărei probleme și oricărei structuri topologice, oricît de complexe. Prin aceasta, calculele laborioase efectuate de calculatoarele electronice pot fi simplu orientate, iar rezultatele obținute pot fi judecate și interpretate ușor.

Autorul mulțumește cu această ocazie profesorului Remus Răduleț pentru deosebitul concurs pe care i l-a dat la precizarea conceptelor și formularea ideilor în cursul elaborării lucrărilor sale.

Primit la redacție la 20 noiembrie 1963

BIBLIOGRAFIE

1. PAUL DIMO, *Analiza nodală a sistemelor electroenergetice prin utilizarea curenților de scurt-circuit (schema radială)*. Edit. tehnică București, 1958.
2. — *Conceptele și procedeele analizei nodale, asociate calculatoarelor numerice*, St. cer. energ., seria A, *3* (1963).
3. — *Studiul pierderilor pe echivalenții REI ai analizei nodale*. St. cerc. energ., seria A, *4* (1963).

TIMPUL DE DIFUZIUNE ÎN AXA PROFILELOR PĂTRATE ŞI DREPTUNGHIULARE

DE

Academician AUREL AVRAMESCU

536.21+538.542.001.25

Fenomenele tranzitorii din domeniul mare al difuziunii cîmpului de concentraţie, de curenţi calorici şi electrici, de neutroni, de mişcare Browniană etc., dominate toate de ecuaţia diferenţială de tip parabolic, s-au studiat mai puţin în literatura de specialitate decît cele din domeniul oscilaţiilor şi undelor (avînd ecuaţii de tip eliptic şi hiperbolic).

Teoria analitică a căldurii, fondată de Fourier în 1822 şi dezvoltată apoi de o pleiadă de savanţi şi cercetători [1]—[3], a pus bazele pentru studiul acestor fenomene, dar numai după dezvoltarea metodelor de calcul speciale, mai ales a transformaţiei Laplace, s-au creat posibilităţi de aprofundare a domeniului [1].

Timpul de difuziune, denumit anterior constanta de timp, caracterizează pătrunderea cîmpului în interiorul unor corpuri la aplicarea bruscă a treptei unitare a intensităţii lui pe suprafaţa exterioară. Acest parametru este definit ca timpul mediu de creşterea intensităţii în punctul, axa sau suprafaţa de simetrie a corpului [4]. El s-a calculat de autor pentru corpurile geometrice simple ca sfera, cilindrul plin, tubul circular, placa etc. [5]. Pentru profile patratice şi dreptunghiulare, calculul prezintă dificultăţi atît pe căile clasice, din cauza apariţiei unor serii Fourier duble infinite [6], cît şi pe căile moderne, deoarece în domeniul imagine nu se pot evita serii infinite [7].

După ce într-o lucrare recentă am dat rezultatele unor calcule numerice a parametrului pentru aceste profile [8], în cele ce urmează se deduc rezultatele exacte pe baza teoriei clasice utilizînd în acest scop unele teoreme din teoria matricelor. Rezultatele au importanţă pentru aplicaţiile practice în fizică, tehnică şi industrie, de exemplu pentru calculul rapid al încălzirii şi răcirii laminatelor avînd astfel de profile.

PROBLEMA LA LIMITĂ ŞI SOLUŢIA EI CLASICĂ

Ţinînd seama de simplificările admise în general pentru tratarea analitică a problemelor de difuziune [2], [3] problema la limită prevede rezolvarea ecuaţiei diferenţiale cu derivate parţiale

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \tag{1}$$

în dreptunghiul cu laturile $2X$, $2Y$ în condiţiile pe frontiere

$$u(\pm X, \pm Y) = 0, \qquad t > 0, \tag{2}$$

în centrul dreptunghiului, care coincide cu originea coordonatelor avînd simetrie, deci flux nul

$$u'_{xy}\ (0,0) = 0, \qquad t > 0, \tag{3}$$

după ce condiţia iniţială prevede treapta unitară negativă pe suprafaţa exterioară

$$u(x,y,t) = 1, \qquad t < 0. \tag{4}$$

Soluţia clasică a problemei se obţine prin înmulţirea soluţiilor valabile pentru două plăci de grosimea $2X$ şi $2Y$ şi este [6]

$$u(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} A_n A_m \cos\mu_n \frac{x}{X} \cos\mu_m \frac{y}{Y} \exp\left[-\left(\mu_n^2 \frac{R^2}{X^2} + \mu_m^2 \frac{R^2}{Y^2}\right)\mathrm{Fo}\right], \tag{5}$$

unde

$$\mathrm{Fo} = \frac{at}{R^2}, \quad \frac{1}{R^2} = \frac{1}{X^2} + \frac{1}{Y^2}, \quad A_{n,m} = (-1)^{n,m}\frac{2}{\mu_{n,m}}, \quad \mu_n = (2n+1)\frac{\pi}{2}$$

După anularea bruscă a intensităţii cîmpului pe suprafaţa exterioară (4), în axa de simetrie a barei, considerată foarte lungă, intensitatea scade după funcţia

$$u(0,0,\mathrm{t}) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} A_n A_m \exp\left[-\left(\mu_n^2 \frac{R^2}{X^2} + \mu_m^2 \frac{R^2}{Y^2}\right)\mathrm{Fo}\right]. \tag{6}$$

Conform definiţiei, timpul de „răspuns" în axă este dat de integrala

$$T_{\square} \equiv \int_0^{\infty} u(0,0,t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+m}2^2}{\mu_n \mu_m} \frac{X^2 Y^2}{Y^2\mu_n^2 + X^2\mu_m^2}, \tag{7}$$

care în cazul barei cu secţiune pătrată devine

$$T_{\square} \equiv \int_0^{\infty} u(0,0,t)\,\mathrm{d}t = \frac{R^2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m-1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+m}2^2}{\mu_n \mu_m} \frac{1}{\mu_n^2 + \mu_m^2}. \tag{8}$$

Prin aceasta s-a dat soluţia formală exactă a problemei. Se impune a se găsi forme mai simple ale expresiilor (7) şi (8) respectiv a se calcula sumele dublu infinite.

CALCULUL TIMPULUI DE DIFUZIUNE PENTRU BARA CU SECȚIUNE PĂTRATĂ

Seriile (7) și (8) sînt absolut și uniform convergente, deoarece aceste proprietăți le au și seriile Fourier (5) și (6). Dacă seria (8) se întrerupe la un termen $n = m$, de valoare suficient de mare, suma dublu infinită devine o formă pătratică de tipul

$$\left.\begin{aligned} f = a_{11}^2 + 2a_{12} + \ldots + 2a_{1n} \\ + a_{22}^2 + \ldots + 2a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + a_{nn}^2. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Termenii sumei (9) au matricea

$$[A] = \left[\begin{matrix} a_{11}\, a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\ a_{n2} \ldots a_{nn} \end{matrix}\right] \quad a_{in} = a_{ni}. \tag{10}$$

Orice formă patratică se poate reduce prin substituții „ortogonale" la o sumă de pătrate, ceea ce oferă posibilitatea calculării imediate a sumei.

Pentru aceasta se caută valorile proprii din soluții ale ecuației caracteristice „seculare" (Laplace):

$$\Delta \equiv \left|\begin{matrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \ldots\ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots\ldots a_{nn} - \lambda \end{matrix}\right| = 0, \tag{11}$$

care sînt coeficienții noi ai termenilor pătrați.

Efectuînd calculele rezultă pentru suma dublă infinită (8) valoarea

$$T_{\square} = \frac{3}{10}\,\frac{X^2}{a} = \frac{6}{5}\,\frac{R_2}{4a} = 1{,}2\ T_c. \tag{12}$$

Deci timpul de difuziune în axa unui patrat este cu 20% mai mare decît în axa unui cilindru rotund de raza R egală cu semilatura pătratului.

Timpul de difuziune în axa unei bare patrate este egal cu cel în axa unui cilindru rotund avînd o rază $R = 1{,}1\ X$, cu 10% mai mare decît semilatura patratului. Este de remarcat faptul că secțiunile sînt sensibil dar nu exact egale, din cauză că avem

$$\pi(1{,}1\ X)^2 = 3{,}8\ X^2 \approx 4X^2.$$

Calculul timpului de difuziune în axa unui dreptunghi, nu se poate concretiza într-o formulă atît de simplă din cauză că lungimea laturilor intră implicit în termenii sumei infinite (7). Aici se impun calcule aproximative, ca cele indicate de autor în lucrarea [8].

Astfel se deschid noi posibilităţi pentru calculul exact şi aproximativ al timpului de difuziune în interiorul unor corpuri cilindrice de diferite secţiuni.

Primit la redacţie la 10 octombrie 1963

BIBLIOGRAFIE

1. А. Б. Лыков, *Теория теплопередачи*. ЖИТТЛ, Москва, 1952.
2. H. S. Carslaw, I. C. Jaeger, *Conduction of Heat in Solids*. Clarendon Press, Oxford, 1959.
3. Grober, Erk Grigall, *Die Grundgesetze der Wärmeübertragung*. Springer-V. Berlin (Göttingen) Heidelberg, 1955.
4. A. Avramescu, *Constanta de timp a fenomenelor tranzitorii*. Bul. ştiinţ. Acad. R.P.R., Secţ. 3, **4**, *3— 4*, 241 — 248 (1952).
5. *Constanta de timp a efectului pelicular în conductoare cilindrice şi tubulare*. Comun. Acad. R.P.R., **I**, *3*, 295 — 304, (1958).
6. Fr. Berger, *Über die Berechnung der Temperaturverlaufs in einem Rechtkant beim Abkühlen und Erwärmung*. Z. angew. Math. u. Mech., **8**, *6*, 479 — 484 (1928).
7. K. W. Miller, *Diffusion of electric currents into rods, tubes and flat surfaces*. Trans. Amer. Inst. electr. Engrs., **66**, 1446 — 1507 (1947).
8. A. Avramescu, *Timpul de încălzire a barelor cilindrice profilate*. St. cerc. energ., **13**, *3*, 367 (1963).
9. K. Knopp, *Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen*. J. Springer, Berlin, 1922.
10. A. Avramescu, *Un nou criteriu cumulativ de optimizarea sistemelor automate*. Comun. Acad. R.P.R., **11**, *10*, 1181 — 1193 (1961).

ARZATORUL COMBINAT CU PULVERIZARE MIXTĂ DE 190 kg/h

DE

V. GHIA şi E. FERCALĂ

1. PRINCIPIUL DE FUNCŢIONARE

La acest arzător, pulverizarea păcurii se realizează de către aerul de joasă presiune şi un injector prevăzut cu cameră de turbionare avînd întoarcerea combustibilului.

Pentru a permite funcţionarea la presiuni de injecţie cît mai scăzute, efectul de pulverizare al aerului insuflat se activează prin turbionarea realizată de carcasa spirală a arzătorului. Astfel în zona centrală a părţii terminale a carcasei, apare un cîmp de viteze avînd sensul invers deplasării particulelor de combustibil injectate.

Extinderea cîmpului şi valoarea absolută a vitezelor axiale inverse (negative), depinde în special de geometria carcasei şi de cantitatea de aer vehiculată prin aceasta.

Pentru ca funcţionarea unui asemenea arzător să fie bună, este necesar ca în primul rînd energia cinetică a combustibilului să aibă o anumită valoare, în raport cu energia cinetică a aerului care se întoarce către arzător.

De aceea, numai la anumite valori ale debitului de păcură şi presiuni de injecţie, tot combustibilul pulverizat va fi refulat în focar şi va participa la procesul de ardere. Astfel, în cazul unei proaste dimensionări, curenţii inverşi de aer fac ca o parte din combustibil să se scurgă în carcasa arzătorului.

Injectorul prevăzut cu cameră de turbionare preîntîmpină infundarea duzei deoarece avînd un coeficient de debit relativ redus, permite să folosească o duză cu diametru relativ mare, pentru arzătorul cu debitul nominal de 190 kg/h. Deoarece prin pulverizare se realizează o pînză de combustibil în formă de hiperboloid de rotaţie, se favorizează amestecul intim între aer şi păcură, ceea ce permite arderea la excese mici de aer.

Datorită depresiunii care se creează în zona centrală a părții terminale a carcasei, în interiorul golului format prin conul de combustibil, se aspiră gaze fierbinți din focar, fenomen care acționează vaporizarea și apoi aprinderea combustibilului.

Rezultă astfel că arzătoarele cu pulverizare mixtă de tipul prezentat prezintă importante avantaje, însă realizarea acestora constituie o problemă dificilă.

Arzătorul de combustibil gazos este de tipul turbionar cu admisia periferică a combustibilului și formează corp comun cu arzătorul de păcură.

În lucrarea prezentă, se vor da rezultatele obținute la experimentările efectuate asupra arzătorului combinat de 190 kg/h (denumit prescurtat, arzătorul C.P.M.—190) având particularitățile funcționale prezentate anterior.

2. PERFORMANȚELE OBȚINUTE

Experimentările au avut ca scop principal stabilirea geometriei optime a arzătorului C.P.M.—190. S-au studiat numeroase variante constructive, variindu-se geometria injectorului și a carcasei arzătorului. S-a constatat că la presiunea de injecție $p_i = 7$ kgf/cm², viscozitatea relativă a păcurii 2,3—2,5° E, s-au obținut cele mai bune performanțe pentru caracteristica geometrică a injectorului $A = 5{,}31$ și caracteristica geometrică a carcasei $\psi = 2{,}24$.

Viscozitatea dorită s-a obținut prin preîncălzirea păcurii la circa 120°C.

În tabela 1, se prezintă caracteristicile păcurii folosite la experimentări, iar în figura 1 se dă curba de variație a viscozității cu temperatura.

Tabela 1

Analiza structurală (metoda „$n-d-M$“)

Procentul de carboni aromatici din moleculă	$C_A = 40\%$
Procentul de carboni ciclici din moleculă	$C_R = 69\%$
Procentul de carboni naftenici din moleculă	$C_N = 29\%$
Procentul de carboni parafinici din moleculă	$C_P = 31\%$
Numărul total de cicluri	$R_T = 5{,}25$
Numărul de cicluri aromate	$R_A = 2{,}36$
Numărul de cicluri naftenice	$R_N = 2{,}89$
Greutatea moleculară	$M = 452$
Rășini + asfaltene	34,25
Compoziția chimică elementară	C = 85%, H = 14,8%, S = 0,2%
Densitatea	$d_4^{70} = 0{,}8917$
Indice de refracție	$n_D^{70} = 1{,}5189$

Din datele prezentate rezultă că păcura folosită la experimentări a fost de calitate inferioară.

Din figura 2 în care se prezintă schița arzătorului C.P.M. 190, rezultă amplasarea injectorului față de carcasa arzătorului de păcură și modul cum se realizează îmbinarea cu arzătorul de combustibil gazos.

În figura 3, s-au trasat curbele de variație $B = f(p_i')$ pentru valorile presiunii de injecție $p_i = 6{,}7$ și 8 kgf/cm², unde p_i' este presiunea în circuitul de întoarcerea combustibilului de la camera de turbionare a injectorului.

Se constată că pentru aceeași presiune p_i', debitul de păcură B crește o dată cu mărimea presiunii p_i, iar această creștere este cu atît mai mare cu cît p_i' are o valoare mai mare.

Rezistența circuitului de aer la arzătorul de combustibil gazos reprezintă 30% din valoarea corespunzătoare arzătorului de păcură. La sarcina nominală $B = 190$ kg/h, pierderea de presiune pe traseul aerului în arzătorul de păcură a fost $\Delta p_{ap} = 92$ kgf/m² la funcționarea cu aer cald avînd temperatura $t_a \cong 100°$ C și debitul $D_a = 1\,650$ Nm³/h. În consecință, prin orificiile de aer secundar care erau ținute deschis, se aspira, din mediul ambiant, circa 20% din aerul necesar arderii.

În figura 4 se prezintă curbele de variație a pierderilor de presiune pe traseul aerului la arzătorul de gaz (Δp_{ag}) și arzătorul de păcură (Δp_{ap}), funcție de debitul D_a, la $t_a = 30°$ C.

La presiunea $p_i \cong 7$ kgf/cm², variindu-se presiunea de întoarcere p_i' de la 0,5—4kgf/cm², s-au studiat o serie de regimuri caracteristice. Astfel la $B = 110$ kg/h, $p_i' = 0{,}5$ kgf/cm², $t_a = 124°$ C, flacăra vizibilă avea lungimea $l \cong 1{,}8$ m, iar arderea completă a combustibilului avea loc la coeficientul de exces de aer $\alpha = 1{,}1$.

Pentru debitul nominal $B = 190$ kg/h, care se obține la $p_i' = 2{,}9$ kgf/cm², arderea are loc complet la $\alpha = 1{,}06$ dacă $t_a = 102°$C rezultînd $l \cong 2{,}5$ m.

La debite de păcură mai mari, condițiile de ardere se înrăutățesc. Astfel la $B = 230$ kg/h, $p_i' = 4$kgf/cm², $t_a = 100°$ C se obține $l \cong 3$ m iar arderea completă se desfășoară la $\alpha = 1{,}14$.

În figura 5 se prezintă curba de variație a coeficientului de exces α cu debitul de păcură B.

Prin deplasarea registrului *1* (fig. 2) către peretele frontal al carcasei spirale *2*, aerul circulă prin întreaga secțiune liberă de trecere a carcasei cilindrice *3*, obținîndu-se funcționarea pe combustibil gazos.

Gazul combustibil este refulat prin cele șase stuțuri *4*, dispuse radial. În timpul experimentărilor combustibilul gazos natural a avut puterea calorifică inferioară $P_{ci} = 9\,950$ kcal/Nm³ și greutatea specifică $\gamma_g = 0{,}836$ kg/Nm³.

În figura 6 se dă variația pierderii de presiune pe traseul gazului combustibil în arzător, funcție de debitul consumat D_g.

Se remarcă faptul că la debitul nominal de circa 190 Nm³/h, rezistența $\Delta p_g \cong 200$ kgf/m², are o valoare relativ scăzută.

S-au studiat o serie de regimuri de funcționare caracteristice la funcționarea cu aer rece ($t_a = 30°$ C). Astfel la $D_g = 88{,}2$ Nm³/h, arderea

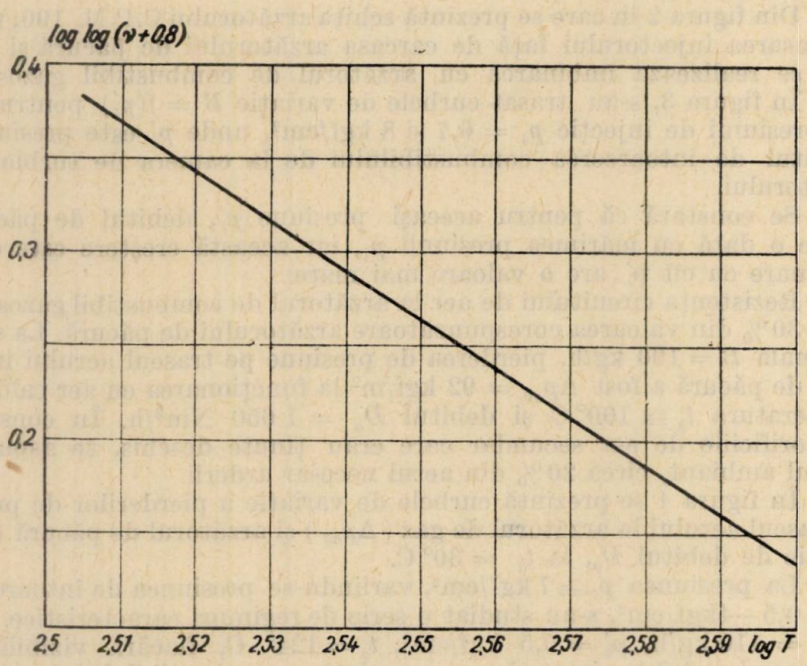


Fig. 1. — Variația vîscozității cu temperatura pentru păcura experimentată.

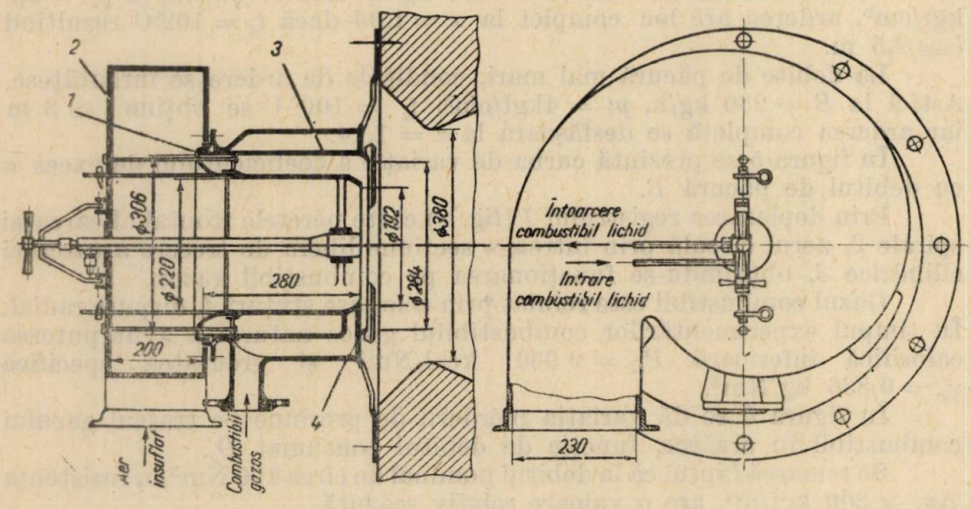


Fig. 2. — Schița arzătorului C.P.M. — 190.

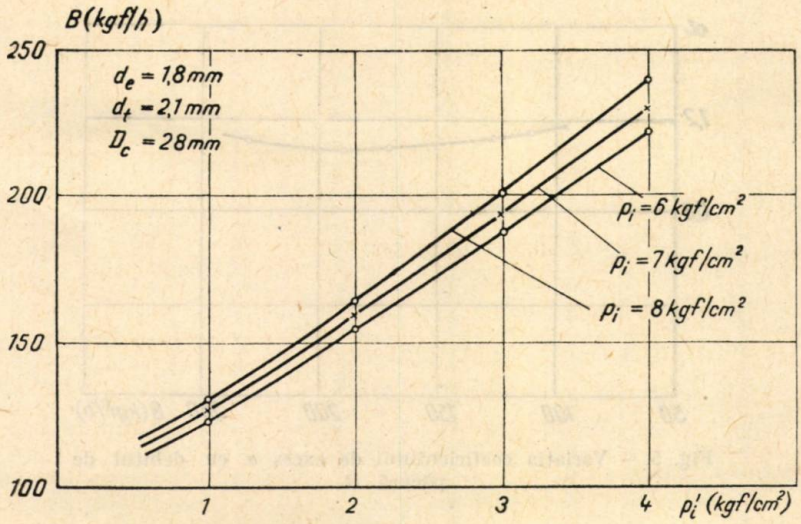


Fig. 3. — Curbele de variație $B = f(p_i')$, pentru $p_i = 6, 7, 8$ kgf/cm².

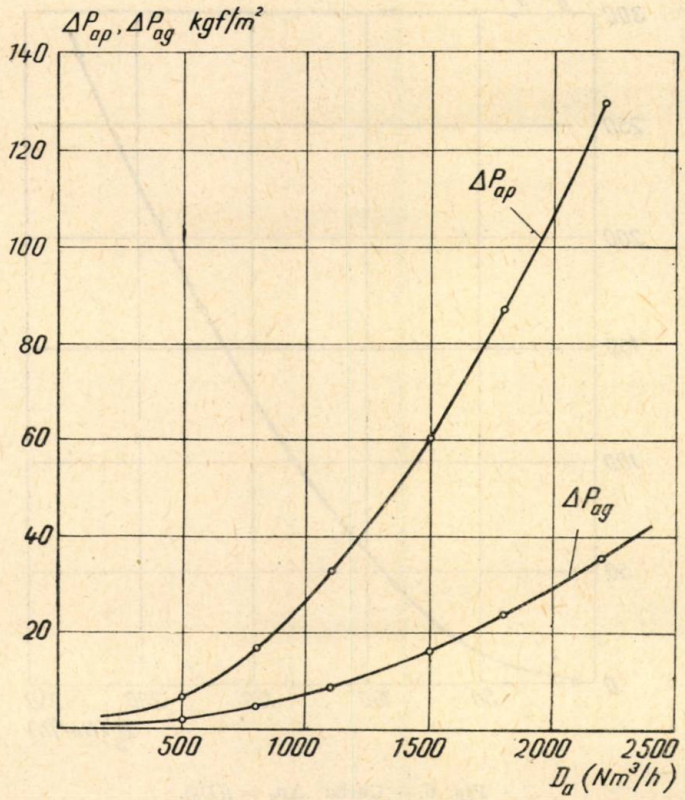


Fig. 4. — Variația rezistenței aerodinamice cu debitul D_a, a arzătoarelor de gaz (Δp_{ag}) și păcură (Δp_{ap}).

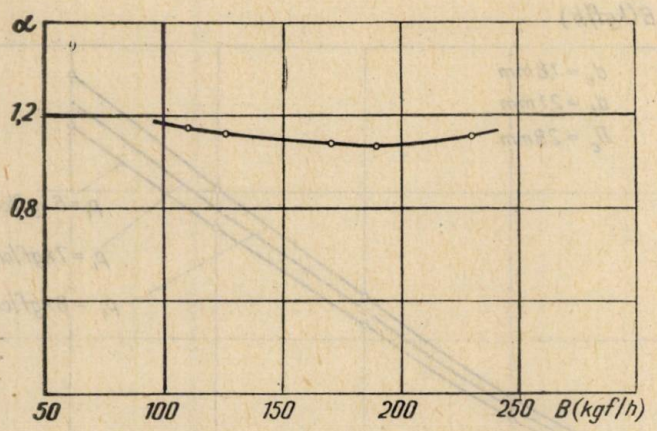


Fig. 5. — Variația coeficientului de exces α cu debitul de păcură B.

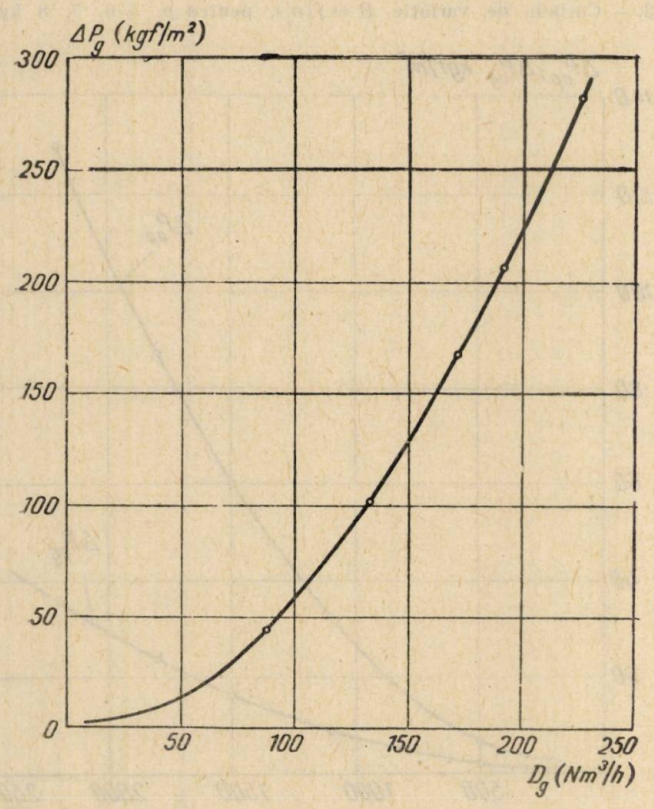


Fig. 6. — Curba $\Delta p_g = f(D_g)$.

completă a combustibilului avea loc la $\alpha = 1{,}09$ iar lungimea vizibilă a flăcării era $l \cong 1{,}5$ m.

Pentru $D_g = 190$ Nm³/h, la arderea completă $\alpha = 1{,}05$ iar $l \cong 2{,}5$ m.

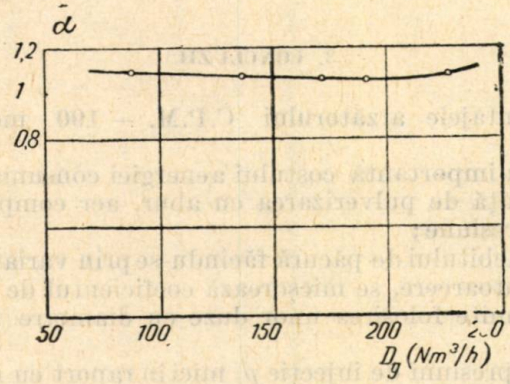


Fig. 7. — Variația coeficientului de exces α cu debitul de gaz D_g.

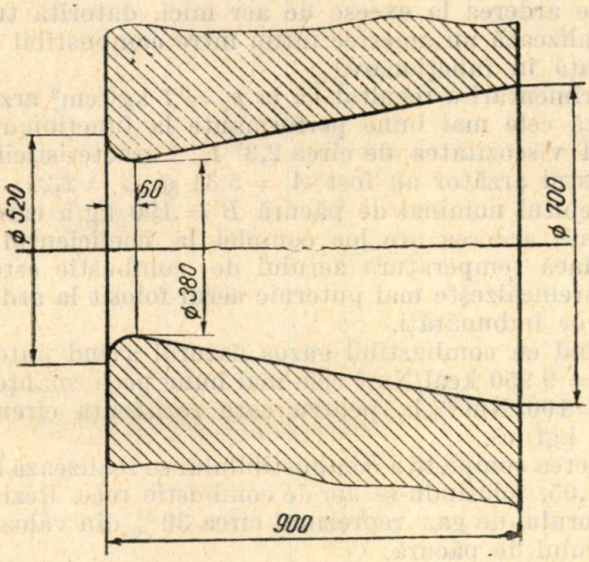


Fig. 8. — Schița ambrazurii.

Mărindu-se debitul de combustibil la $D_g = 227$ Nm³/h, atunci $\alpha = 1{,}07$ iar $l \cong 2{,}8$ m. În figura 7 se prezintă curba de variație a coeficientului de exces α, cu debitul D_g.

La funcționarea pe gaz, este necesar ca injectorul de păcură să fie îndepărtat din carcasa arzătorului, pentru a împiedica cocsarea acestuia.

Aerul aspirat prin orificiile de aer secundar pe lîngă faptul că răcește partea terminală a carcasei, — o dată cu deschiderea clapetei de aspirat

aer fals situată sub arzător — permite funcționarea la sarcini reduse (pe combustibil gazos) în lipsa aerului insuflat.

În figura 8 se dă schița ambrazurii care se va adopta.

3. CONCLUZII

Dintre avantajele arzătorului C.P.M. — 190 menționăm următoarele :

— reducerea importantă costului aenergiei consumate pentru pulverizarea păcurii, față de pulverizarea cu abur, aer comprimat sau numai cu aer de joasă presiune ;

— reglajul debitului de păcură făcîndu-se prin variația presiunii p_i' de pe conducta de întoarcere, se micșorează coeficientul de debit al injectorului ceea ce permite folosirea unor duze cu diametre relativ mari care nu se înfundă ;

— necesită presiuni de injecție p_i mici în raport cu injecția mecanică sub presiune, iar aerul insuflat care activează pulverizarea are o presiune scăzută, față de pulverizarea cu aer de joasă presiune ;

—-permite arderea la excese de aer mici, datorită turbionării puternice care realizează un amestec intim între combustibil și aer ;

— siguranță în funcționare.

Din experimentări a rezultat că la $p_i = 7$ kgf/cm² arzătorul C.P.M. —190 realizează cele mai bune performanțe la funcționarea cu păcura studiată, avînd viscozitatea de circa 2,3° E. Caracteristicile geometrice optime ale acestui arzător au fost $A = 5{,}31$ și $\psi = 2{,}24$.

Pentru debitul nominal de păcură $B = 190$ kg/h care se obține la $p_i' = 2{,}9$ kgf/cm², arderea are loc complet la coeficientul excesului de aer $\alpha = 1{,}06$ dacă temperatura aerului de combustie este $t_a = 102°$ C.

Dacă se preîncălzește mai puternic aerul folosit la ardere, condițiile de ardere se vor îmbunătăți.

Funcționînd cu combustibil gazos natural avînd puterea calorifică inferioară $P_{ci} = 9\,950$ kcal/Nm³ cele mai bune performanțe s-au obținut la debitul $D_g = 190$ Nm³/h, pentru care rezistența circuitului de gaz era $\Delta p_g \cong 200$ kgf/m².

Astfel arderea completă a combustibilului se realizează la coeficientul de exces $\alpha = 1{,}05$, folosindu-se aer de combustie rece. Rezistența aerodinamică a arzătorului de gaz reprezintă circa 30 % din valoarea corespunzătoare arzătorului de păcură.

Performanțele arzătorului prezentate, s-au realizat la funcționarea cu orificiile de aer secundar deschise, aspirîndu-se prin acestea 15—20 % din aerul folosit la ardere.

Primit la redacție la 15 noiembrie 1963

ÎMBUNĂTĂȚIREA PERFORMANȚELOR MOTOARELOR DIESEL CU ANTECAMERĂ PRIN MODIFICAREA DESFĂȘURARII ARDERII

DE

C. A. VASILESCU și B. BARBESCU

Performanțele motoarelor diesel cu antecameră sînt puternic influențate de procesul de ardere, antecamera afectînd în special procesele din prima fază și camera principală pe cele din ultima fază a arderii.

Dacă desfășurarea ultimei faze de ardere se poate rezolva favorabil prin organizarea unei mișcări suficient de intense în camera principală, astfel ca întreg amestecul combustibil insuflat din antecameră să poată fi ars în timp scurt, prima fază ridică probleme mai complexe, deoarece trebuie să se realizeze un optim între mișcare, parametrii de stare ai aerului în antecameră și procesul de injecție. Datorită complexității fenomenelor, problema se rezolvă prin încercări urmărindu-se ca amestecul combustibil să se aprindă în partea superioară a antecamerei, după ce în prealabil s-a realizat gruparea masei principale a combustibilului injectat în regiunea difuzorului. Ordonarea în timp a proceselor premergătoare arderii presupune precizarea momentului aprinderii, prin urmare stăpînirea duratei perioadei de întîrziere la autoaprindere. Aceasta poate fi influențată fie prin varierea avansului la acționarea pompei de injecție fie prin modificarea mișcării gazelor în antecameră, eventual prin aducerea lor în contact cu unele zone fierbinți, ceea ce se realizează prin modificări constructive ale formei antecamerei. În prezenta notă, se arată rezultatele obținute prin încercări pe un motor diesel la care s-au variat pe rînd ambii factori.

1. Motorul încercat este de tipul diesel în patru timpi cu antecameră, cu 6 cilindri dispuși în linie, supraalimentat cu un grup turbocompresor. Diametrul cilindrului este $D = 175$ mm și cursa $S = 205$ mm, turația nominală fiind de $n = 1\,300$ rot/min. Încercările s-au efectuat la un banc de probe standard.

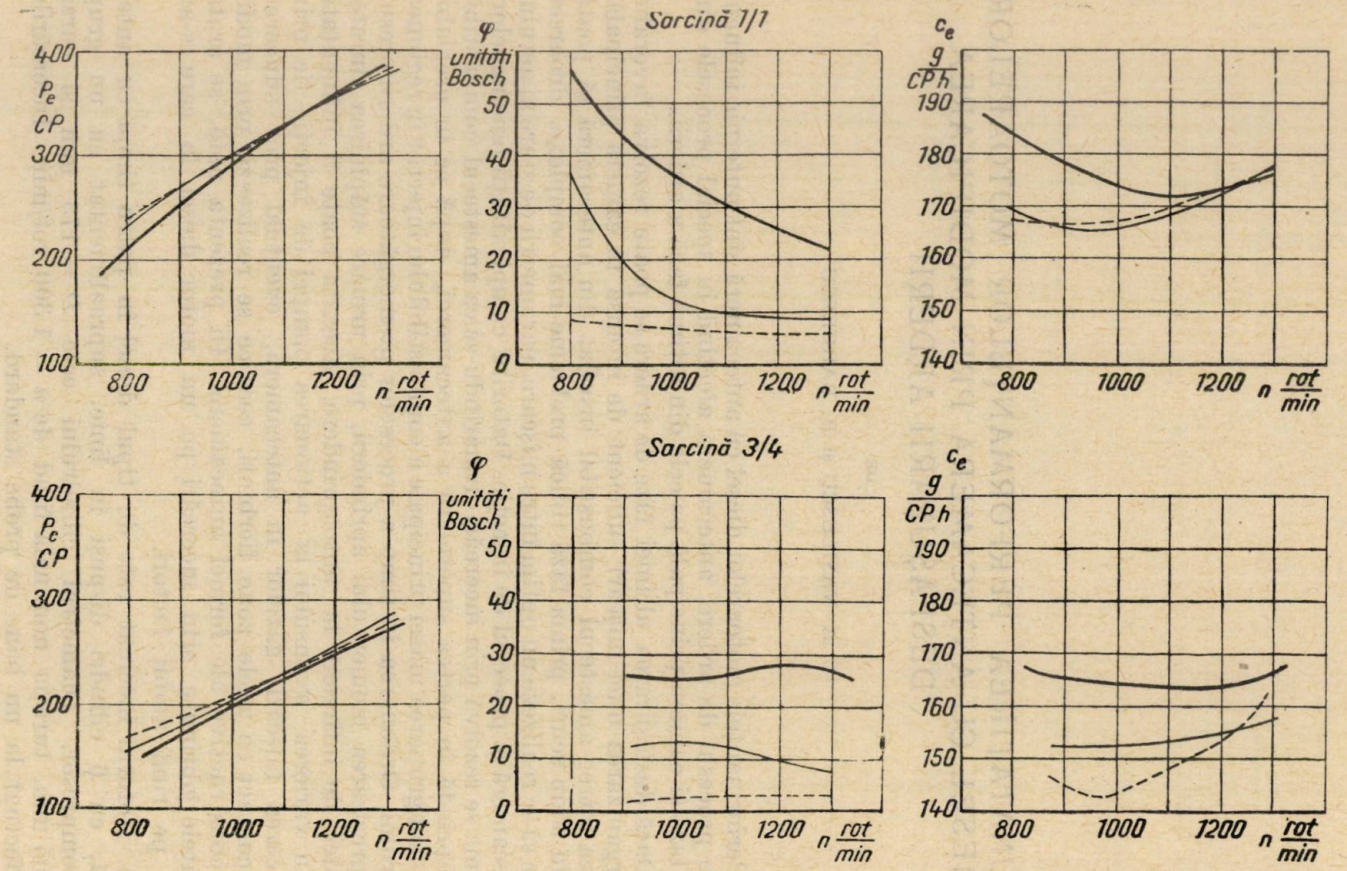


Fig. 1. — Caracteristica de turație a motorului la sarcina 1/1 și 3/4 pentru trei valori ale avansului la acționarea pompei de injecție β_0. P_e — puterea efectivă; φ — gradul de fum; c_e — consumul specific efectiv de combustibil; n — turația, ------ $\beta_0 = 23°$; ——— $= 27°$; ——— $\beta_0 = 31°$.

2. S-a urmărit în primul rînd influența pe care o are avansul la acționarea pompei de injecție. Figura 1 prezintă caracteristica de turație a motorului la plină sarcină și la sarcina 3/4 pentru trei valori ale avansului la acționarea pompei de injecție $\beta_0 = 23°$, $27°$ și $31°$. Se observă că atît puterea P_e cît și consumul specific efectiv de combustibil c_e sînt influențate de valoarea avansului; soluția optimă din punctul de vedere al acoperirii întregului domeniu de turații este dată pentru sarcina 1/1 de valoarea avansului $\beta_0 = 27°$. Acest reglaj conduce, în general, la realizarea puterii maxime și la obținerea consumului specific minim. La turații mai scăzute, avansul la acționarea pompei de injecție mai mic ($\beta_0 = 23°$) este mai corespunzător în timp ce la turații ridicate avansul mare ($\beta_0 = 31°$) duce la rezultate mai bune.

Valoarea optimă a avansului la acționarea pompei de injecție rezultă din necesitatea de a asigura durata corespunzătoare a arderii și gruparea ei în jurul punctului mort interior; ca urmare arderea trebuie să înceapă într-un anumit moment bine precizat. Să presupunem că începutul acționării pompei de injecție este fix (curba α, fig. 2-*a*). Începutul arderii (curba γ, fig, 2-*a*) este determinat de începutul ridicării acului injectorului (curba β, fig. 2-*a*) și de durata perioadei de întîrziere la autoaprindere. Durata, măsurată în grade de unghi de rotație al arborelui cotit, scursă de la începutul pompării și pînă la ridicarea acului crește o dată cu turația.

Măsurători efectuate pe tipul de motor studiat (însă nesupraalimentat) au arătat că durata perioadei de întîrziere la autoaprindere exprimată în grade de unghi de rotație al arborelui cotit, tinde să scadă

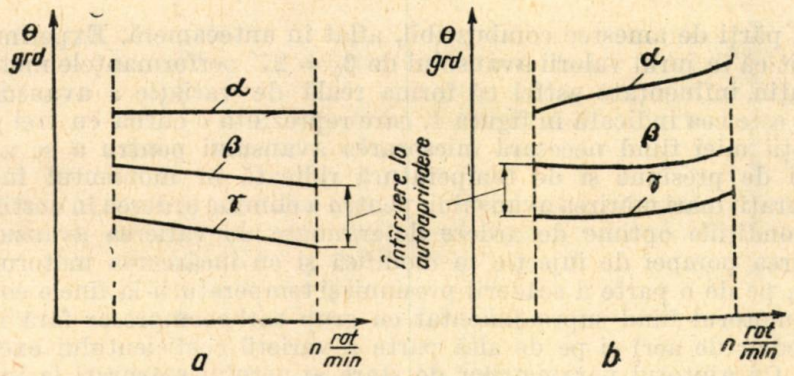


Fig. 2. — Variația începutului acționării pompei de injecție (curba α), a începutului ridicării acului (curbat β) și a începutului arderii (curba γ) în grade de unghi de rotație al arborelui cotit cu turația n a motorului.

a — început de acțiune a pompei de injecție fix;

b — început de ardere optim.

ușor cu turația (fig. 3) [1], aceasta în special datorită măririi regimului termic al pereților antecamerei la turații ridicate. În urma acestor efecte cumulate, momentul începutului arderii în antecameră se realizează din ce în ce mai tîrziu (curba γ, fig. 2-*a*) ceea ce face ca arderea să se

desfășoare mult în destindere, proces defavorabil performanțelor motorului. Ca urmare, căutîndu-se să se realizeze un început al arderii care să creeze un ușor avans o dată cu creșterea turației (curba γ, fig. 2-*b*) — — aceasta pentru a grupa arderea în jurul punctului mort interior — va fi necesar să se modifice avansul la acționarea pompei de injecție, crescîndu-l o dată cu turația (curba α, fig. 2-*a*). Forma reală a variației cu turația a curbei de avans la acționarea pompei de injecție va fi caracteristică fiecărui tip de motor, la motoarele cu antecameră problema complicîndu-se și din necesitatea asigurării unei curgeri suficient de energice a

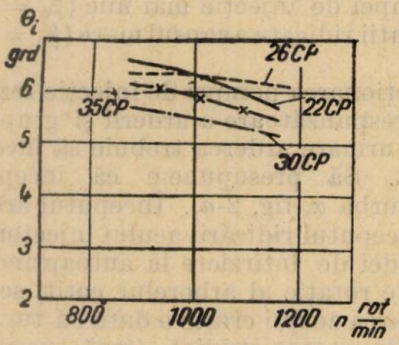


Fig. 3. — Variația duratei perioadei de întîrziere la autoaprindere θ_i — în funcție de turația *n*, pentru diferite sarcini (motor nesupraalimentat).

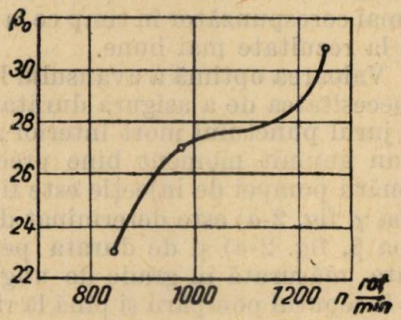


Fig. 4. — Varierea avansului optim la acționarea pompei de injecție β_0 cu turația *n* la plină sarcină.

ultimei părți de amestec combustibil, aflat în antecameră. Experimental, s-a găsit că în jurul valorii avansului de $\beta_0 = 27°$ performanțele motorului sînt puțin influențate astfel că forma reală de variație a avansului cu turația este cea indicată în figura 4, care reprezintă o curbă cu trei pante, la turații mici fiind necesară micșorarea avansului pentru a se asigura condiții de presiune și de temperatură ridicată în momentul injecției iar la turații mari mărirea avansului, pentru a elimina arderea în destindere.

Condițiile optime de ardere determinate de varierea avansului la acționarea pompei de injecție se modifică și cu încărcarea motorului ca urmare, pe de o parte a scăderii presiunii și temperaturii la finele compresiunii (motorul fiind supraalimentat cu grup turbocompresor fără răcitor intermediar de aer) și pe de altă parte a varierii coeficientului excesului de aer. Cu ajutorul parametrilor de stare ai aerului măsurați la intrarea în motor s-a putut calcula variația raportului dintre debitul de aer la 75% sarcină (G_{75}) și la plină sarcină (G_{100}) în funcție de turație. Se constată (fig. 5) că debitul de aer scade cu scăderea sarcinii, dar într-o proporție mai redusă decît scăderea cantității de combustibil injectată, deci coeficientul excesului de aer se mărește.

Mărirea coeficientului excesului de aer are drept efect o imbunătățire a condițiilor de amestecare și prin urmare a arderii, iar micșorarea presiunii și temperaturii aerului pe curba de compresiune conduce la durate mai mari ale întîrzierii la autoaprindere. Prin urmare, valoarea avan-

sului optim la acționarea pompei de injecție se deplasează spre avansuri mai mici (valoarea de 27° ca o limită superioară), diagramele din figura 1 arătînd că la sarcina 3/4 avansul $\beta_0 = 31°$ este exagerat de mare.

După cum se arată în figura 1, micșorarea avansului la acționarea pompei de injecție contribuie la micșorarea sensibilă a limitei de fum. Problema formării fumului în motoarele cu aprindere prin compresiune este destul de inclarificată încă. După părerea noastră în stadiile de după aprinderea combustibilului și pînă la arderea lui completă au loc anumite transformări chimice, care conduc — în cazul în care totul decurge normal—la formarea produșilor arderii complete. În anumite situații, în special în cazul lipsei locale de oxigen, moleculele se pirolizează ajungînd la acetilenă, prin descompunerea căreia apare carbonul care se aglomerează, grafitizîndu-se și dînd particula de fum. O dată formate, particulele de fum ar putea arde în măsura în care au la dispoziție oxigenul și timpul necesar combustiei lor.

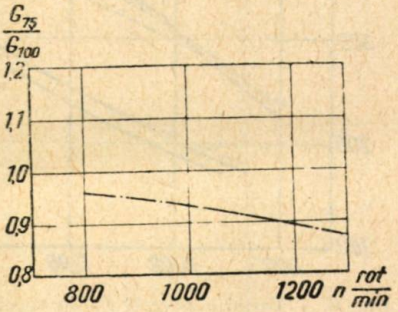


Fig. 5. — Variația raportului dintre debitul de aer la 75% din sarcină și la plină sarcină $\frac{G_{75}}{G_{100}}$ cu turația n.

Ca urmare a proceselor ce au loc în timpul arderii în motoarele cu antecameră, rezultă că fumul se poate forma atît în antecameră cît și în camera principală. Este de bănuit că particulele de fum produse în antecameră vor putea arde în camera principală, astfel că responsabil pentru producerea fumului va rămîne în primul rînd procesul de ardere din camera principală.

Micșorarea pînă la anumite limite a avansului la acționarea pompei de injecție mută expulzarea gazelor din antecameră spre cilindru pe cursa de destindere, cînd se realizează diferențe de presiune apreciabile care conduc la o bună amestecare a produselor expulzate cu aerul din cilindru. Pe de altă parte, mărirea avansului va conduce la crearea unor vîrfuri de presiune în antecameră, în perioada în care presiunea în cilindru este destul de mare pentru a împiedica expulzarea completă a produselor din antecameră, care rămînînd aici în condiții de temperatură ridicată și lipsită de oxigen, vor duce la apariția particulelor de fum. Expulzarea ulterioară a particulelor de fum în camera din cilindru se face în condițiile unei energii reduse ceea ce le împiedică să se amestece bine cu oxigenul și prin urmare să ardă.

3. Experimentări de laborator efectuate pe varianta nesupraalimentată a motorului, arată că în cazul utilizării unei antecamere care dirijează mișcarea aerului se poate scădea durata perioadei de întîrziere la autoaprindere, manifestarea fiind mai evidentă în cazul turațiilor scăzute și a sarcinilor mari [1]. Micșorarea duratei perioadei de întîrziere la autoaprindere are un dublu efect antagonist din punct de vedere al reglajului optim al momentului injecției, unul din efecte urmînd să fie precumpănitor în anumite condiții: — conduce la începerea mai

timpurie a arderii ceea ce ar permite micșorarea avansului la acționarea pompei de injecție; — conduce la autoaprinderea inițială a unei cantități mai reduse de combustibil, avînd drept efect crearea unor presiuni mai mici în antecameră și a unei energii de expulzare mai reduse ceea ce se poate corecta prin mărirea avansului. Figura 6 arată influența pe care o are avansul la acționarea pompei de injecție asupra performanțelor motorului în cazul studiat. Ca urmare a faptului că efectul reducerii perioadei de întîrziere la autoaprindere este mai mic la sarcinile parțiale, acțiunea proceselor din antecamera cu mișcare dirijată a aerului se manifestă mai redus la aceste sarcini asupra performanțelor globale ale motorului.

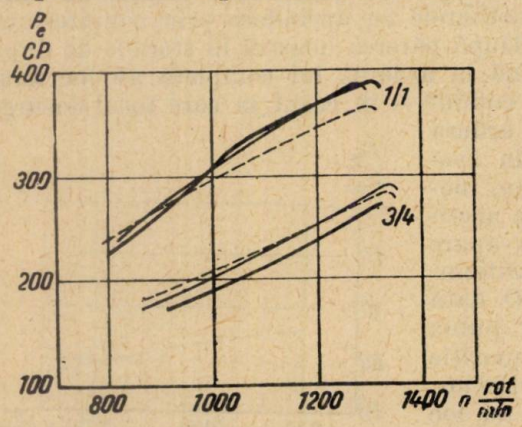


Fig. 6. — Variația puterii P_e cu turația n pentru plină sarcină și 3/4 sarcină; antecameră cu mișcarea dirijată a aerului. (Diferite avansuri β_0 ca în fig. 1)

4. Avantajul stăpînirii perioadei de întîrziere la autoaprindere rezidă în posibilitatea micșorării pînă la o anumită limită a duratei acesteia, ceea ce conduce la economie de energie ce se face în perioada expulzării gazelor din antecameră [2].

Într-adevăr, cantitatea de gaz expulzată din antecameră în camera principală, depinde de secțiunea de curgere și de raportul presiunilor. Cum depășirea raportului critic de presiuni nu conduce la mărirea debitului curs, rezultă că este mai bine ca aceeași cantitate de combustibil să fie arsă în timp decît toată odată, și prin urmare, stăpînirea arderii, chiar în perioada expulzării amestecului din antecameră, este de dorit.

Se remarcă că există un minimum de cantitate de combustibil, corespunzător ridicării presiunii în antecameră, pînă la realizarea raportului critic de presiune, care trebuie ars cît mai rapid și prin urmare este necesar să existe în cazul proceselor de ardere din antecameră o perioadă bine precizată a întîrzierii la autoaprindere.

Primit la redacție la 1 noiembrie 1963

BIBLIOGRAFIE

1. C. A. VASILESCU, B. BARBESCU, *Controlul întîrzierii la autoaprindere în motoarele cu antecameră prin dirijarea mișcării aerului.* St. cerc. energ., *3* B (1963).
2. C. A. VASILESCU, *Considerații termodinamice privind expulzarea gazelor din antecamera motorului cu aprindere prin comprimare.* St. cerc. energ., *4* B. (1963).

ÎN LEGĂTURĂ CU INFLUENȚA SUPAPEI DE REFULARE ASUPRA LEGII DE INJECȚIE

DE

C. MANEA

În explicarea fenomenelor care au loc în timpul procesului de injecție, la motoarele rapide cu aprindere prin compresiune, se neglijează în general influența supapei de refulare asupra legii de injecție, chiar și atunci cînd acest organ este prevăzut cu guler de descărcare.

Această aproximație, deși simplifică analiza și calculul acestor fenomene, nu este admisibilă deoarece prin introducerea unor modificări în construcția acestui organ se obțin variații foarte importante în legea de injecție.

Pentru a demonstra acest lucru s-au folosit trei tipuri de supape de refulare (fig. 1).

Supapa 1-*a*) este cu guler de descărcare și reprezintă tipul cel mai folosit în construcția pompelor de injecție.

Supapa 1-*b*) este tot de tipul de descărcare, cu deosebirea că legătura pentru scurgerea combustibilului refulat de piston spre injector se face prin două orificii circulare de secțiune redusă. În plus, la acest tip de supapă se folosește un resort mult mai puternic.

Supapa 1-*c*) este de tipul supapă corectoare de debit. În acest caz, legătura pentru scurgerea combustibilului se realizează prin două orificii circulare de secțiune mult mai mare. La tipul experimentat, s-a folosit și un orificiu calibrat plasat imediat sub scaunul de așezare.

În vederea experiențelor s-a sortat cîte o supapă de fiecare tip urmărindu-se să se obțină la toate aproximativ același debit.

Rezultatele măsurătorilor volumetrice efectuate la plină sarcină și la o sarcină parțială pentru diferite turații se prezintă în figura 2. Se menționează că în toate cele trei cazuri s-au păstrat neschimbate elementele de reglaj de la pompă și de la injector.

După cum se remarcă la plină sarcină, nu există deosebiri esențiale între caracteristicile de debit ale supapelor 1-*a*) și 1-*b*) în timp ce supapa

1-*c*) prezintă o puternică caracteristică de corectare. La sarcina parțială, există o mică deosebire între caracteristicile de debit a primelor două supape, iar la supapa 1-*c*) se remarcă influența puternică a orificiului calibrat de descărcare la turații reduse.

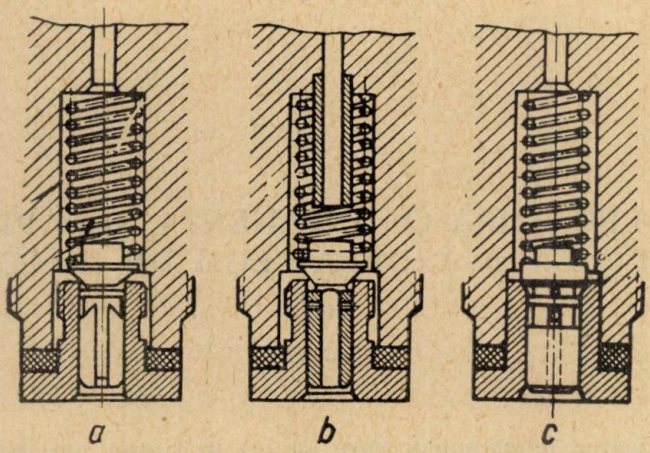


Fig. 1. — Tipurile de supapă experimentate.

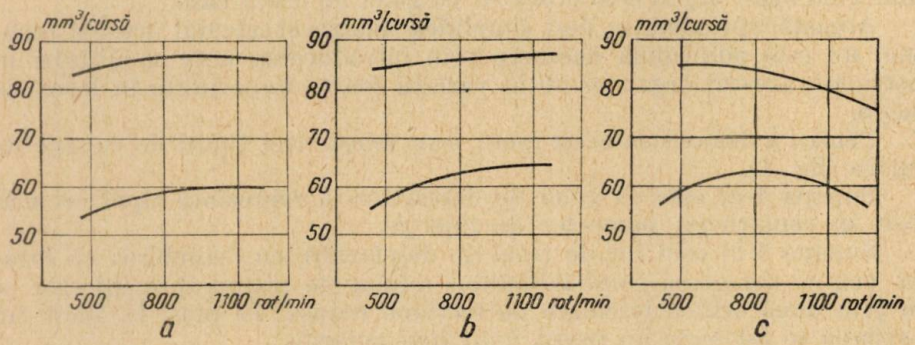


Fig. 2. — Rezultatele măsurătorilor volumetrice.

Cum cele trei tipuri de supapă au caracteristici constructive diferite, rezultă că și legile lor de mișcare pe timpul procesului de injecție vor fi diferite și deci și legile de injecție vor diferi de la o supapă la alta.

Pentru a pune în evidență acest fapt, s-au înregistrat cu ajutorul instalației piezo-electrice legile de variație a presiunii, în conducta de înaltă presiune la pompă și la injector. Înregistrările s-au făcut la sarcina maximă și la turații de 500, 800 și 1 000 rot/min (corespunzător caracteristicilor de debit din fig. 2). Rezultatele acestor înregistrări sînt prezentate în figurile 3, 4 și 5.

Analiza rezultatelor prezentate scoate în evidență că fiecare din cele trei supape conduc la legi de injecții diferite cu toate că reglajul pompei, al injectorului și lungimea conductei nu s-au modificat.

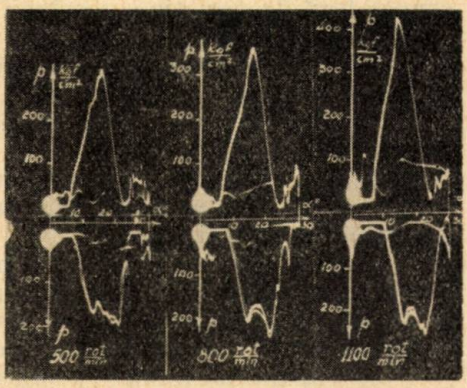


Fig. 3. — Legile de variație a presiunii la pompă (înregistrările de la partea superioară) și la injector (înregistrările de la partea inferioară) obținute cu supapa *1-a*).

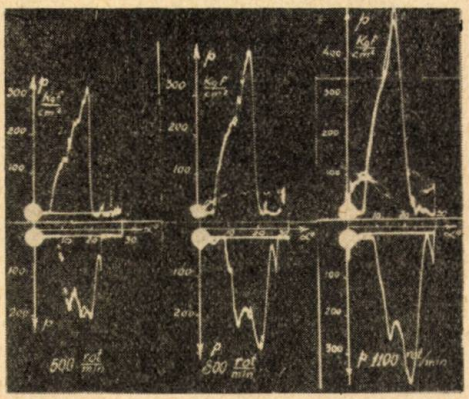


Fig. 4. — Legile de variație a presiunii la pompă (înregistrările de la partea superioară) și la injector (înregistrările de la partea inferioară) obținute cu supapa 1-*b*).

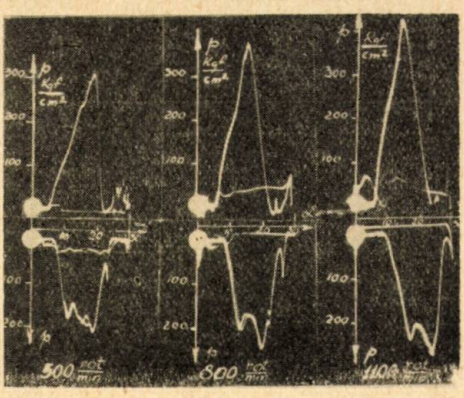


Fig. 5. — Legile de variație a presiunii la pompă (înregistrările de la partea superioară) și la injector (înregistrările de la partea inferioară) obținute cu supapa 1-*c*).

Comparînd rezultatele obținute la primele două supape, rezultă că, deși caracteristicile lor de debit sînt foarte apropiate, legile de injecție diferă foarte mult. Supapa 1-*b*) asigură injectarea aceleiași cantități de

combustibil ca și supapa 1-*a*) însă cu presiuni mult mai mari și cu o durată de injecție mai redusă. Se remarcă de asemenea, sfîrșitul net al procesului de refulare și influența mult mai puternică a variației turației asupra legii de variație a presiunii în cazul supapei 1-*b*).

Legile de variație a presiunii obținute cu supapa 1-*c*) sînt apropiate de cele obținute cu supapa 1-*a*), cu toate că există diferențe foarte mari în caracteristicile de debit.

Pe baza experiențelor prezentate se desprind următoarele observații importante:

1. Nu este admisibilă neglijarea prezenței supapei de refulare în explicarea procesului de injecție în cazul cînd aceasta este prevăzută cu un guler de descărcare.

2. Influența supapei de refulare asupra procesului de injecție se datorește faptului că în perioada în care gulerul de descărcare se mișcă în ghidul său, ea reprezintă un piston intermediar care are caracteristici dinamice proprii și determină procesul de refulare la pompă.

3. Supapa de refulare reprezintă unul din elementele sistemului de injecție cu ajutorul căruia se poate influența ușor și într-o măsură foarte importantă legea de injecție.

Primit la redacție la 2 octombrie 1963

FOCARUL TURBIONAR

DE

N. PĂNOIU

1. CONSTRUCȚIA FOCARULUI TURBIONAR

Realizarea cazanelor de abur de debite foarte mari a fost posibilă numai prin dezvoltarea tehnicii arderii cărbunelui pulverizat într-un sistem foarte elastic capabil să folosească o gamă largă de combustibili la intensități ridicate de ardere.

Focarele de ardere a cărbunelui pulverizat se pot împărți în două tipuri principale cunoscute : cu evacuarea solidă și cu evacuarea lichidă a zgurii. Creșterea conținutului de cenușă la cărbunii actuali și creșterea cerințelor față de curățirea atmosferei, impune constructorilor de cazane găsirea mijloacelor de reducerea emisiunii gazelor nocive și prafului asociate direct arderii combustibililor solizi în stare pulverizată și de manevrare ușoară a zgurii și cenușii, de preferat sub formă utilizabilă. Focarele cu evacuarea lichidă a zgurii, care rezolvă în mare parte aceste probleme, au căpătat în ultimul timp o mare dezvoltare. Dintre acestea, focarul turbionar s-a dovedit a fi una din cele mai reușite construcții. În ultimii ani s-au construit cazane pentru ardere mixtă păcură-cărbune pulverizat în orice proporție. La focarele cu evacuarea solidă a zgurii pulverizarea combustibililor aduce mari dificultăți supraîncălzitorului de bază și intermediar. Focarul turbionar are meritul că remediază simplu această dificultate, suprafețele de schimb de căldură funcționînd corespunzător la arderea mixtă cărbune-păcură-gaze [1].

Prototipul focarului turbionar s-a proiectat ca un mijloc de a rezolva problema ridicată de reținerea cenușii volante. Deși ușurința evacuării cenușii volante reprezintă un factor important, totuși nu este singurul atunci cînd se ia în considerare alegerea unui cazan. O dată însă cu instalarea unui nou cazan într-o centrală existentă cu arderea cărbunelui pulverizat este indicat să se studieze alegerea unui focar cu evacuarea lichidă a zgurii în care să se introducă cenușa colectată de la celelalte cazane. În S.U.A. pentru topirea cenușii volante s-au dezvoltat cazanele de abur

cu focar turbionar. În figura 1 se prezintă un asemenea cazan cu caracteristicile : 130 t/h, 45 kg/cm² şi 350°C.

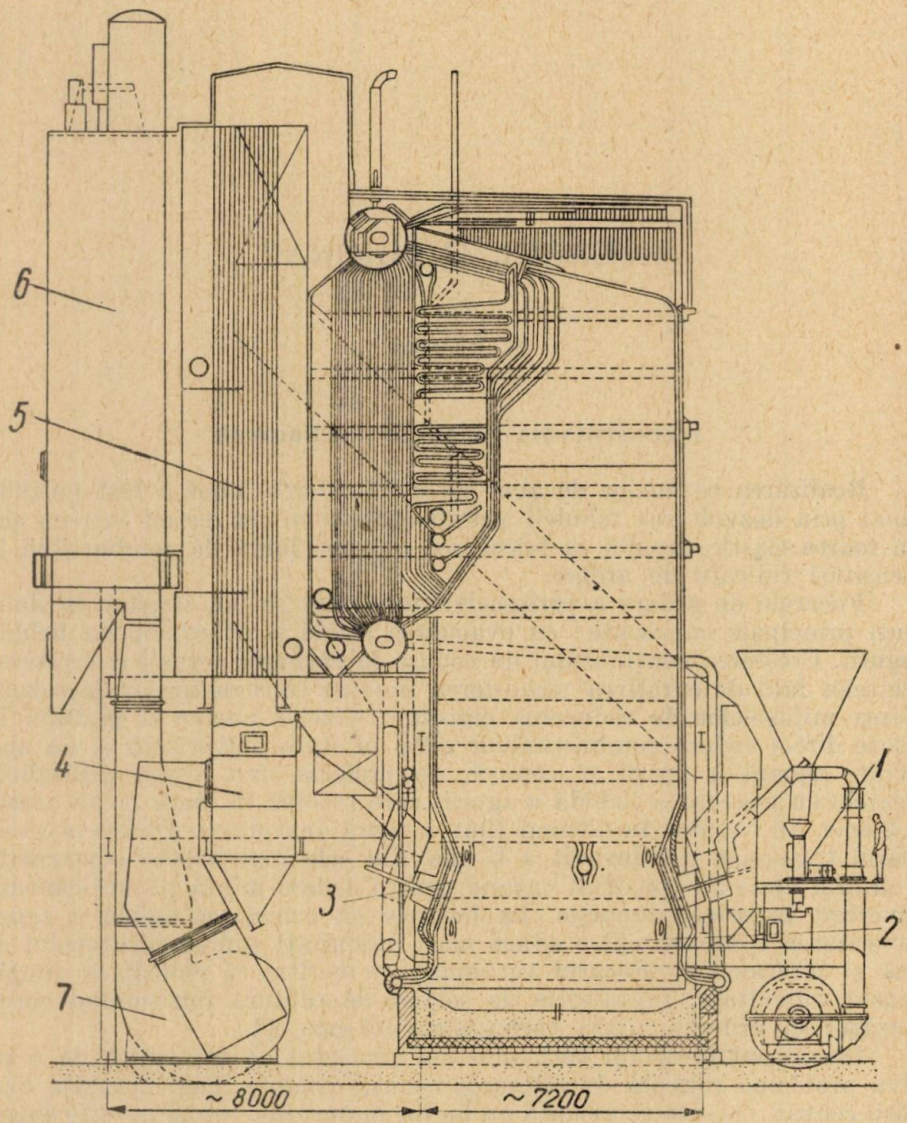


Fig. 1. — Cazan de abur de 130 t/h, 45 kg/cm², 350°C, cu focar turbionar pentru arderea combustibililor solizi.

1 — alimentator de combustibil ; *2* — focar turbionar ; *3* — arzătoare ; *4* — separator de praf ; *5* — preîncălzitor de aer ; *6* — electrofiltru ; *7* — ventilator de aer.

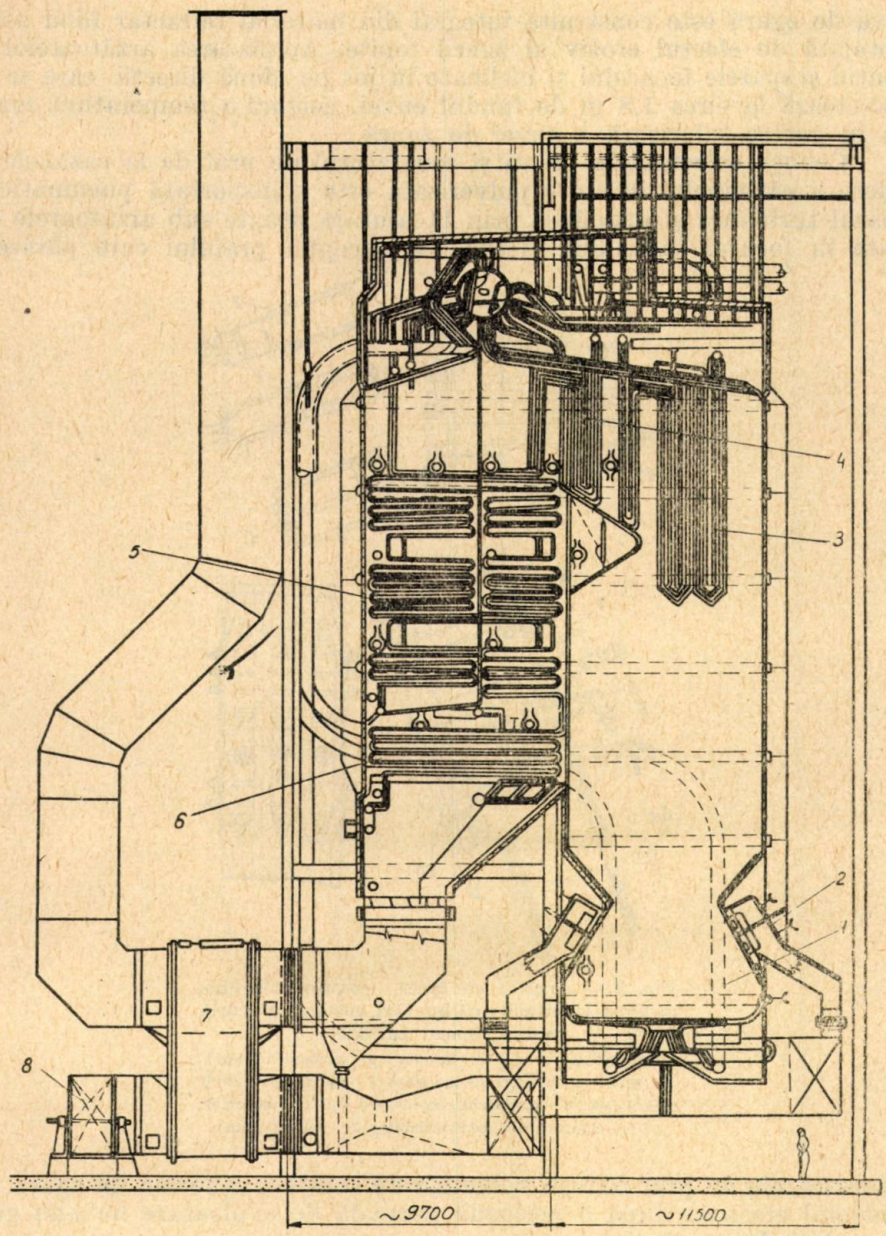


Fig. 2. — Cazan cu focar turbionar pentru arderea simultană a cărbunelui, gazelor și păcurii.
1 — focar turbionar; *2* — arzătoare mixte; *3* — supraîncălzitor de radiație; *4* — supraîncălzitor de convecție; *5* — supraîncălzitor intermediar; *6* — economizor; *7* — preîncălzitor de aer; *8* — ventilator de aer.

Cuva de zgură este construită integral din material refractar fiind astfel protejată de efectul eroziv al zgurii topite. Amplasarea arzătoarelor în frontul și spatele focarului și înclinate în jos pe două direcții care se intersectează la circa 1,8 m de fundul cuvei, asigură o temperatură maximă în partea inferioară a cuvei de zgură.

Cenușa colectată în cazan și separatorul de praf de la cazanele cu ardere a cărbunelui în stare pulverizată este transportată pneumatic în focarul turbionar și introdusă prin 11 ajutaje situate sub arzătoarele din spate în focarul cazanului. Astfel, cu excepția prafului care părăsește

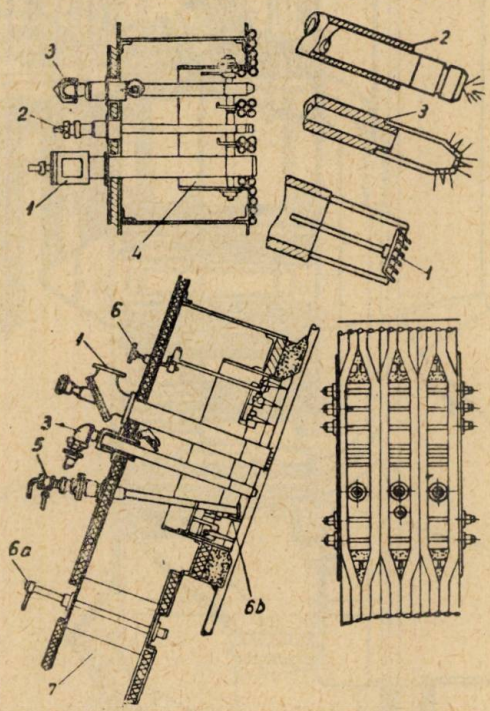


Fig. 3. — Arzător cu fante, combinat pentru arderea simultană a cărbunelui, gazelor și păcurii, pentru focarul turbionar.

1 — aer primar și praf de cărbune; *2* — combustibil lichid; *3* — gaze; *4* — cameră de amestec; *5* — aprinzător electric pentru gaze; *6* — clapetă de control; *6 a* — clapetă de reglaj; *6 b* — clapete direcționale reglabile; *7* — aer secundar.

separatoarele de praf cenușa volantă este topită sub formă de zgură. La controlul efectuat după o perioadă normală de exploatare nu s-au găsit acumulări de zgură.

Arzătoarele fiind amplasate în focar ca perechi opuse creează o turbulență ridicată în centrul porțiunii focarului de sub partea îngustată. Arderea este completă în această zonă, așa că deasupra strangulării nu apar decît gaze invizibile și care fiind comprimate de îngustare sînt îm-

pinse spre partea frontală și posterioară a focarului. În vederea protejării arzătoarelor de temperatura ridicată a gazelor, acestea sînt retrase în exterior. Focarele turbionare au fost dezvoltate pe scară largă pentru arderea simultană a doi sau mai mulți combustibili. În figura 2 se prezintă focarul turbionar pentru arderea simultană a cărbunelui, gazului și păcurii.

O particularitate a acestui focar este răcirea cu apă a cuvei de zgură. Este de semnalat folosirea arzătoarelor basculante cu fante și sistemul de recircularea cenușii volante din cazan, economizor și separatorul de praf.

Din cauza temperaturii ridicate din focar este posibilă funcționarea cu exces redus de aer, nearsele în zgură și cenușă fiind practic imperceptibile. Funcționînd cu exces redus de aer, focarul implică instalații mici de insuflare și tiraj, mărindu-și astfel eficacitatea economică.

Considerăm interesant să prezentăm pe scurt arzătorul mixt pentru acest focar prezentat în figura 3.

Arzătorul este de tipul cu fante reglabil pentru reglajul lungimii și direcției flăcării. Întrucît arzătorul nu are părți ceramice, este ușor de observat și exploatat. În arzător se realizează un amestec intim aer-combustibil fără o turbionare prealabilă a aerului sau combustibilului. Exploatarea îndelungată a focarului a determinat stabilitatea ridicată a flăcării și lipsa completă a depunerilor la gura arzătoarelor. În literatură se menționează montajul unui cazan de 390 t/h cu focar turbionar folosind drept combustibil păcura [2].

2. REZULTATE ÎN EXPLOATAREA FOCARELOR TURBIONARE

În exploatarea focarelor turbionare au fost scoase în evidență două avantaje :

a) Capacitatea de ardere a oricărui combustibil cu aceeași temperatură a gazelor la ieșirea din focar. Acest lucru este posibil datorită cantității mărite de căldură absorbită în focar ca urmare a arderii tuturor combustibililor practic cu aceeași luminozitate. Spre exemplu, în figura 4 se prezintă comparativ temperatura gazelor de ardere la ieșirea din focar funcție de fluxul net de căldură în cazul arderii prafului de cărbune, păcurii și gazelor într-un focar cu cărbune pulverizat și într-un focar turbionar [3], [4].

b) Capacitatea mărită de schimb de căldură în focar care are ca urmare reducerea dimensiunilor focarului deci inclusiv a cazanului. Aceste două caracteristici permit o distribuție mai uniformă a temperaturilor în zona supraîncălzitorului. În figura 5 se prezintă variația relativă a temperaturii funcție de poziția serpentinelor la supraîncălzitorul de bază și cel intermediar la plină sarcină și la jumătate sarcină pentru cazanul de 700 t/h cu focar turbionar [1], [5].

Uniformitatea temperaturii în zona supraîncălzitorului se datorește faptului că arzătoarele și focarul permit arderea completă a combustibilului.

Se menționează pentru focar un coeficient de reținere a zgurii în stare lichidă de peste 65% ceea ce permite o simplificare apreciabilă a

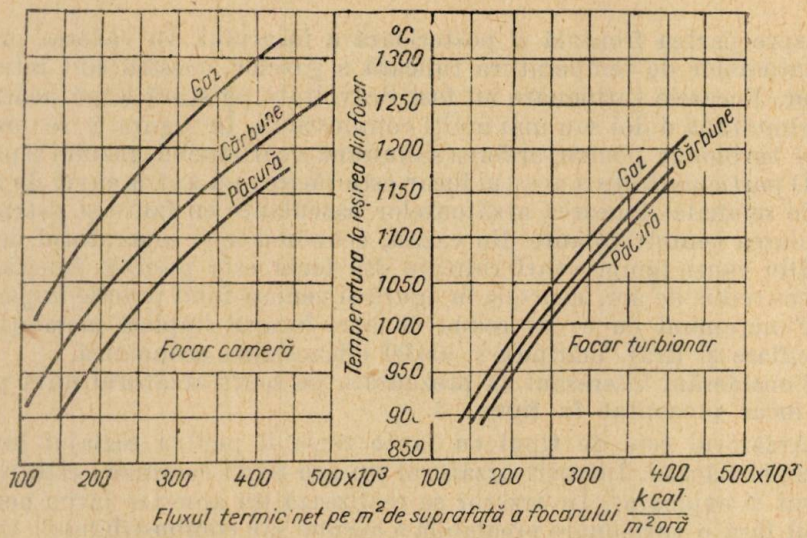


Fig. 4. — Variația temperaturii gazelor de ardere la ieșirea din focar funcție de fluxul termic al suprafeței focarului, la arderea prafului de cărbune, păcurii și gazelor într-un focar clasic comparativ cu un focar turbionar.

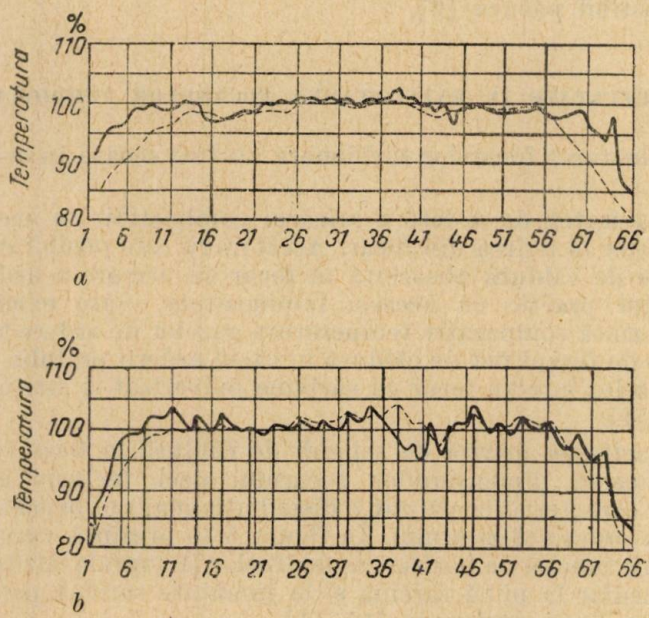


Fig. 5. — Variația relativă a temperaturii funcție de poziția serpentinelor supraîncălzitorului de bază și supraîncălzitorului intermediar la funcționarea la plină sarcină și la jumătate sarcină.

a — supraîncălzitor intermediar; *b* — supraîncălzitor de bază.

——— plină sarcină

– – – jumătate sarcină.

sistemelor de reținerea cenușii volante și a suflătoarelor de funingine. În figura 6 se prezintă variația gradului de reținere a cenușii volante sub formă de zgură topită la diverse tipuri de focare cu ardere intensificată și evacuare lichidă a zgurii.

Se vede că focarele turbionare asigură cele mai bune condiții de intensificarea procesului de ardere, chiar în cazul folosirii unui combustibil cu un conținut ridicat de cenușă.

Focarul turbionar a fost folosit cu succes la arderea reziduurilor solide de la cracarea catalitică a țițeiurilor [1], [5].

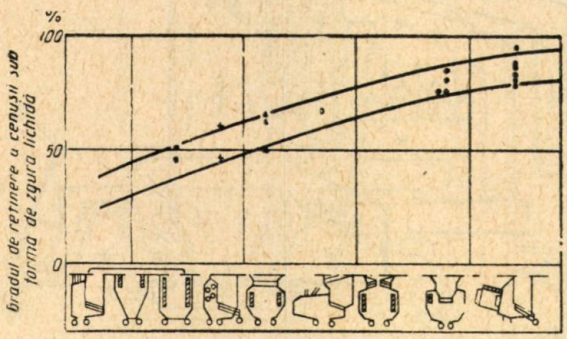


Fig. 6. — Variația gradului de reținere a cenușii, sub formă de zgură topită, funcție de tipul instalației de ardere.

Caracteristicile energetice ale acestui cocs sînt

carbon	90 — 95%,
sulf	4 — 7,5%,
conținut materii volatile	3 — 5%,
cenușă	0,2 — 0,5%,
vanadiu	500 — 600 mg/kg,
nichel	200 mg/kg,
puterea calorifică superioară	7 945 — 8 112 kcal/kg,
unghiul de taluz natural	55 — 65°,
coeficient de măcinabilitate ȚKTI	0,5,
temperatura de topire a zgurii	1 400°C.

Curba granulometrică a materialului se caracterizează prin

R500 microni	10%,
R77 „	91%.

În centrala New Avon (S.U.A.) s-au montat 4 cazane de 226 t/h 99 ata și 488°C cu focare turbionare [1], [5]. Cazanele pot arde cocs de petrol în proporții de 10—90%. Cele 6 arzătoare sînt amplasate frontal și pe peretele posterior la un unghi care face ca flacăra să se întîlnească la 1,8 m de podeaua focarului. În figura 7 se prezintă schema cazanului cu focar turbionar din centrala New Avon.

Cazanul este de tipul cu recirculația cenușii antrenate, fiind prevăzut cu 6 arzătoare și 3 mori. Funcționarea instalației este foarte stabilă, iar în baia de zgură în timp de 6 luni s-a constatat o depunere de cca 150 mm.

Caracteristicile de exploatare ale focarului turbionar şi ale cazanului la arderea păcurii şi cocsului de petrol funcţie de sarcină sînt prezentate în figura 8 [1], [5].

Exploatarea cazanelor cu cocs de petrol a scos în evidenţă stabilitatea ridicată a procesului de ardere în focarul turbionar a combustibilului solid cu conţinut redus de materii volatile.

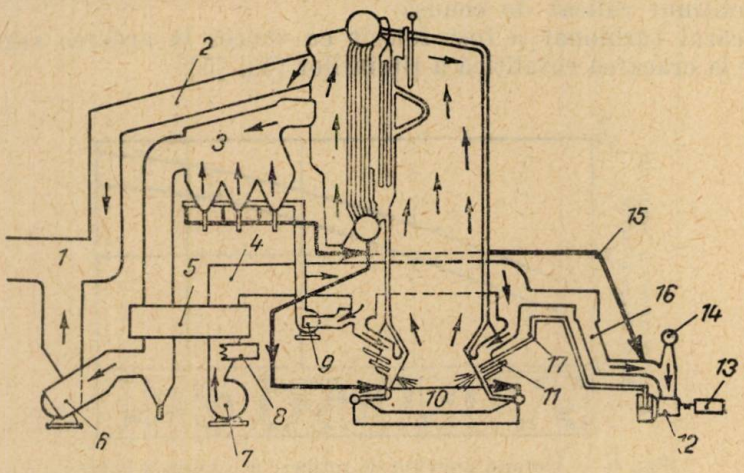


Fig. 7. — Schema agenţilor de lucru la focarul turbionar al cazanului de 226 t/h, 99 ata, 488°C montat în centrala New Avon (S.U.A.) pentru arderea cocsului de petrol.

1 — la coş; *2* — legătura directă la coş; *3* — buncăr de antrenate; *4* — aerul cald; *5* — preîncălzitorul regenerativ de aer (Lyungstrom); *6* — ventilatorul de gaze de ardere; *7* — ventilatorul de aer; *8* — preîncălzitorul de aer cu abur; *9* — ventilatorul de recirculaţia cenuşii volante; *10* — baia de zgură lichidă; *11* — arzător de gaze sau injector de păcură; *12* — moară de cocs; *13* — motor electric; *14* — alimentator de cocs de petrol; *15* — intrarea cenuşii volante în moară; *16* — intrarea aerului cald în moară; *17* — amestec aer praf.

În literatura de specialitate se subliniază următoarele avantaje ale focarului turbionar:

a) Cost de investiţii mai redus prin:

— reducerea dimensiunilor focarului faţă de un focar clasic cu cărbune pulverizat şi evacuarea solidă a zgurii;

— reducerea volumului construit;

— reducerea numărului suflătoarelor de funingine;

— reducerea volumului instalaţiilor de desprăfuire şi manipularea cenuşii volante.

b) Reducerea costului de exploatare prin:

— creşterea randamentului prin reducerea excesului de aer şi a nearselor în zgură şi cenuşă;

— reducerea consumului de abur şi întreţinerii suflătoarelor de funingine;

— reducerea cheltuielilor de evacuare a zgurii;

— reducerea consumului de energie pentru ventilatoare avînd un exces de aer redus.

c) Folosirea zgurii în scopuri utile (construcții de drumuri, cărămizi, blocuri prefabricate etc.).

d) Reducerea impurificării atmosferei.

e) Arderea în condiții economice a tuturor felurilor de combustibili chiar și a celor cu conținut foarte scăzut de materii volatile.

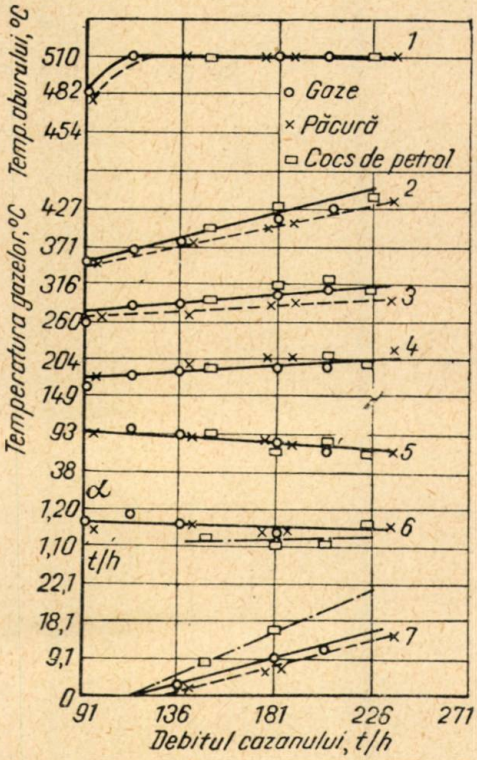


Fig. 8. — Caracteristicile de exploatare ale cazanului de 226 t/h, 99 ata, 488°C cu focar turbionar la arderea cocsului de petrol, gazelor și păcurii funcție de sarcină.

1 — temperatura aburului supraîncălzit; *2* — temperatura gazelor de ardere înainte de preîncălzitorul de aer; *3* — temperatura aerului preîncălzit la ieșirea din preîncălzitorul de aer; *4* — temperatura gazelor după preîncălzitorul de aer; *5* — temperatura aerului la intrare în preîncălzitorul de aer; *6* — excesul de aer înaintea preîncălzitorului de aer; *7* — consumul de apă pentru injecție în regulatorul pentru temperatura aburului.

În condițiile țării noastre, care dispune de resurse diverse de combustibili ce pot interveni diferit în balanța producției de energie electrică, se poate recomanda folosirea focarelor turbionare.

Primit la redacție la 1 noiembrie 1963

BIBLIOGRAFIE

1. О. Х. Дебендети. *Использование сыпучего кокса в качестве основного топлива на электростанции Тайдуотер нефтеперерабатывающего завода Нью Эйвон.* Culegerea: *Промышленные электростанции США.* Госэнергоиздат Москва-Ленинград, 1961, 105—114.
2. D. J. Williams, *The turbofurnace.* Journal of the Institute of fuel, **33**, *234*, iulie, 328—336 (1960).
3. G. F. Knorre, *Perspectivele dezvoltării metodelor de intensificare a proceselor de ardere a combustibililor.* St. cerc. energ., Seria B, **13**, *1*, 17 — 23 (1963).
4. *** *Die Entwicklung der Turbofeuerung in den USA.* BWK, **13**, *5*, mai, 230 (1961).
5. O. H. De Bendetti, *Fluid coke is primary fuel in New-Avon steam plant.* The Power Engineering, **63**, *8*, aug. 68 — 71 (1959).

INSTALAȚII DE FLUIDIZARE PENTRU PRELUCRAREA CĂRBUNILOR

DE

I. HRISTESCU, M. ROSENBERG și I. NISTOR

Tehnica fluidizării aplicată pentru prima dată la gazificarea cărbunilor în gazogene Winkler, a rămas aproape două decenii limitată la această întrebuințare.

Ulterior, cu introducerea pe scară tot mai largă a automatizării, date fiind avantajele pe care le prezintă procesul de fluidizare din acest punct de vedere (continuitate, uniformitate, stabilitate etc.), tehnica fluidizării a fost împrumutată din industria cărbunelui și introdusă succesiv într-o serie de alte ramuri industriale (chimică, metalurgică, petrochimică, și altele). În paralel însă, în industria cărbunelui, dezvoltarea unor noi tehnologii de fabricare a cocsului, impusă de lipsa acută de huile clasice pe glob, a dus la luarea în considerare a semicarbonizării și carbonizării huilelor, în special a celor neaglutinante, în instalații de mare productivitate ușor susceptibile a fi automatizate.

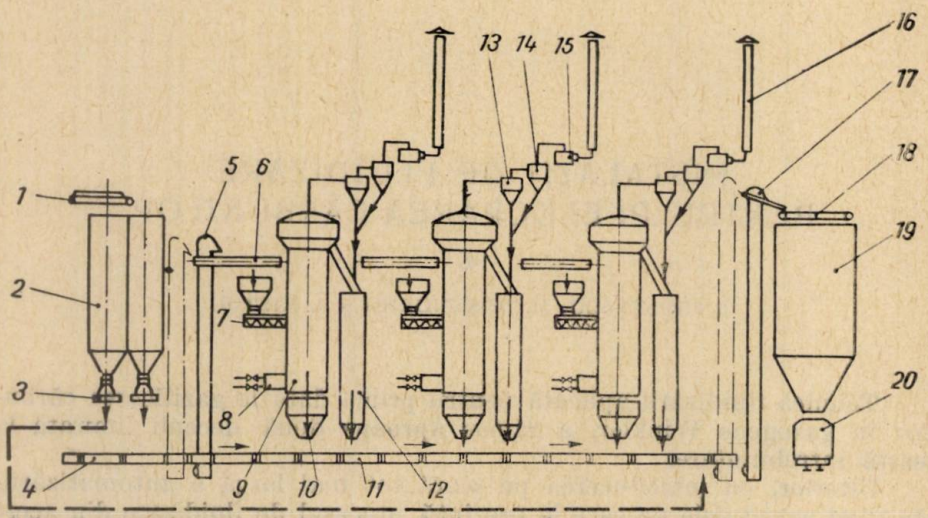
Astfel, procesul de fluidizare s-a extins și în alte domenii de prelucrare a cărbunelui, pentru procese de uscare, oxidare, semicarbonizare, desulfurare etc.

În R.P.R., pentru acoperirea necesarului mereu crescînd de semicocs folosit la fabricarea cocsului metalurgic, s-a proiectat și realizat în anul 1957 o instalație de semicarbonizare a cărbunilor PALV [1]) care lucrează pe principiul fluidizării. Instalația funcționează deocamdată fără recuperarea subproduselor rezultate și la o temperatură de 550 $\pm$ 20°C folosind drept agent de fluidizare un amestec format din gaze arse provenite din combustia gazului de furnal și aer [1], [2], [3].

Cantitatea de căldură necesară semicarbonizării a fost de 600 kcal/kg semicocs respectiv circa 400 kcal/kg cărbune și a fost furnizată atît de căl-

[1]) Amestec de cărbuni de Petrila, Aninoasa, Lonea și Vulcan.

dura sensibilă a gazelor arse cît și de arderea unei părți din substanța cărbunoasă. Granulația materialului folosit a fost de 0—10 mm cu circa 80% sub 6 mm, umiditatea 2—3%, cenușa 8—10% și materiile volatile 38—40%. Semicocsul obținut a avut în medie 13—14% cenușă, greutate în vrac circa 250—280 kg/m³ și materii volatile 13—16%. Schema instalației Carbofluid este arătată în figurile 1 și 2.



1 Bandă alimentare siloz; 2 Silozi bruți 0-10mm; 3 Dezintegrator; 4 Transportor cu raclete; 5 Elevatori mărunți; 6 Transportor cu raclete; 7 Șnec alimentare cuptor, 8 Focar, gaz furnal, aer; 9 Cuptor; 10 Buncăr pat căzut; 11 Transportor cu raclete pentru semicocs; 12 Buncăr semicocs; 13 Ciclon I; 14 Ciclon II; 15 Recuperare minimă barilet; 16 Coș pentru evacuarea supraproduselor (gaz, gudron, vapori); 17 Elevator semicocs; 18 Transportor cu raclete pentru egalizare, 19 Siloz semicocs; 20 CFN

Fig. 1. — Fluxul tehnologic al instalației pentru fabricarea semicocsului prin fluidizare Carbofluid.

O instalație asemănătoare folosită pentru uscarea lignitului mărunt în vederea brichetării sale funcționează la Căpeni-Baraolt.

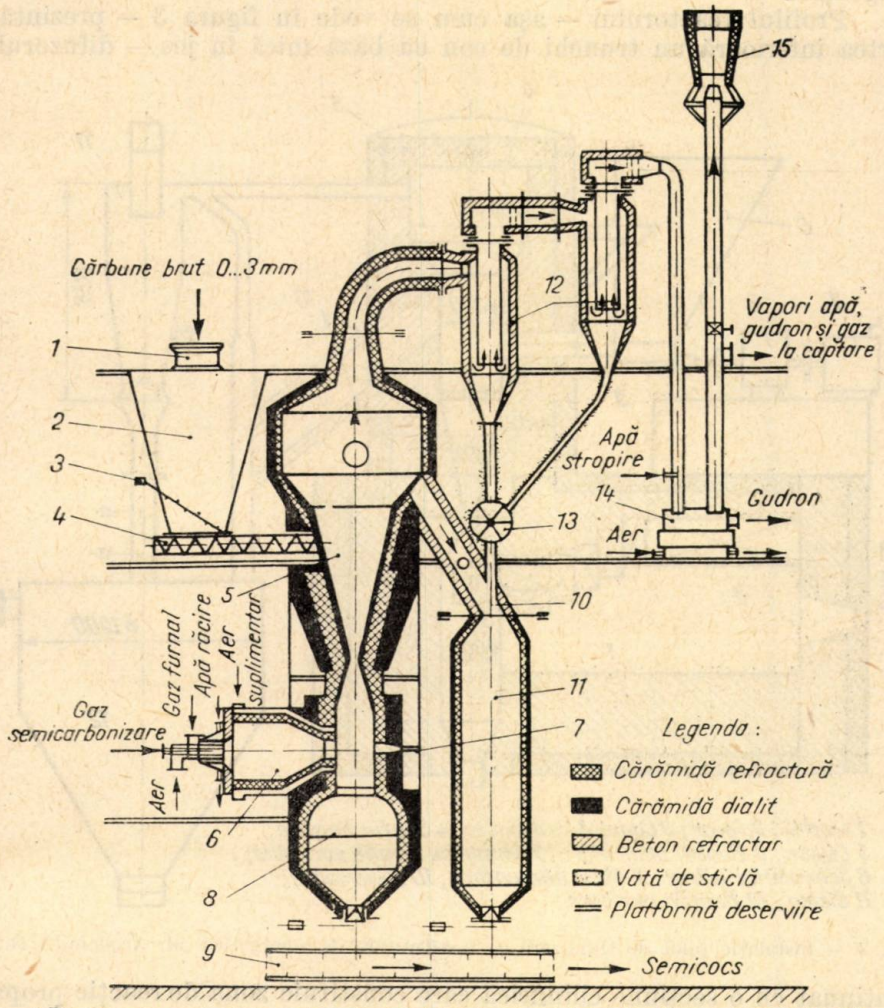
Agentul de fluidizare — gaze arse calde — se obține prin arderea prafului fin de cărbune captat în cicloanele fluidizorului.

În cadrul Institutului de energetică al Academiei R.P.R. s-a construit o instalație pilot de fluidizare a cărbunelui în scopul studierii posibilităților de desulfurare în pat fluid folosind drept agent de fluidizare un amestec de abur-aer-gaze arse. Schema instalației se vede în figura 3.

Instalația a fost astfel proiectată încît să ofere posibilitatea modificării pe o gamă largă a parametrilor principali de funcționare.

Astfel, la această instalație, sistemul de alimentare format din motor cu turație variabilă, schimbător de viteză și melc cu pas variabil per-

mite atît obținerea unei variații a debitului între 5—200 kg cărbune pe oră cît și modificarea nivelului la care se face alimentarea în strat.



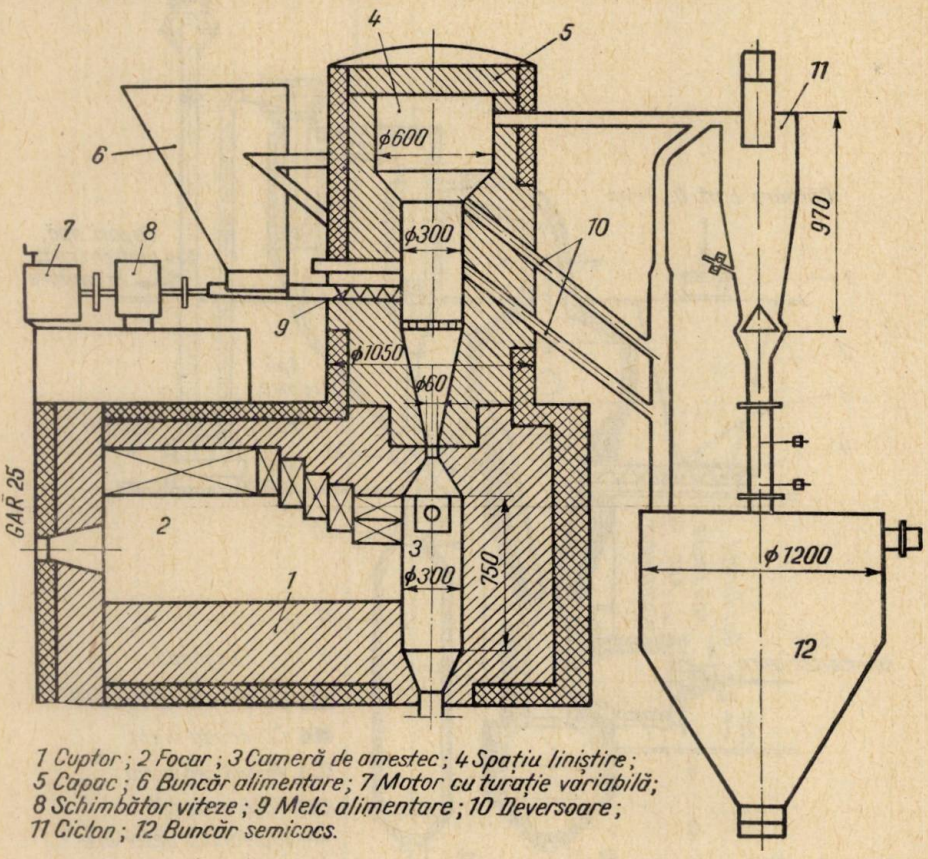
1 Transportor cu raclete, 2 Buncăr pentru cărbune măcinat; 3 Dispozitiv antiboltă; 4 Transportor elicoidal; 5 Cuptor pentru semicarbonizare; 6 Focar; 7 Vizor; 8 Buncăr; 9 Transportor cu raclete pentru semicocs; 10 Deversor pentru semicocs; 11 Buncăr pentru semicocs; 12 Cicloane; 13 Sas pentru praful de la cicloane; 14 Barilet; 15 Arzător pentru gazele de semicarbonizare.

Fig. 2. — Carbofluid : cuptorul și anexele de deservire.

Instalația este prevăzută cu două deversoare, primul așezat deasupra grătarului la o distanță egală cu diametrul reactorului ; iar al doilea la o distanță dublă. Deversoarele pot fi obturate alternativ cu flanșe oarbe.

Gazele arse şi aerul în exces se amestecă, cu aburul supraîncălzit în camera de amestec unde intrarea aburului se face printr-un orificiu tangenţial.

Profilul reactorului — aşa cum se vede în figura 3 — prezintă la partea inferioară un trunchi de con cu baza mică în jos — difuzorul —



1 Cuptor; 2 Focar; 3 Cameră de amestec; 4 Spaţiu liniştire; 5 Capac; 6 Buncăr alimentare; 7 Motor cu turaţie variabilă; 8 Schimbător viteze; 9 Melc alimentare; 10 Deversoare; 11 Ciclon; 12 Buncăr semicoc.

Fig. 3. — Instalaţie pilot de fluidizare a Institutului de energetică al Academiei R.P.R.

continuat cu o secţiune cilindrică care constituie zona de reacţie propriu-zisă şi care susţine la partea superioară un alt trunchi de con, care face trecerea la un cilindru cu diametrul mai mare, ce îndeplineşte rolul de spaţiu de liniştire. Grătarul se poate pune pe un umăr circular, la baza mare a primului con.

Fluidizorul este închis la partea de sus cu ajutorul unui capac metalic care se sprijină pe un cuţit circular împlîntat într-un şanţ cu nisip. În acest mod închiderea este etanşă, iar capacul joacă rol şi de clapetă de explozie.

Alegerea acestui profil s-a făcut în scopul de a se studia influenţa variaţiei vitezei agentului de fluidizare în reactoare cu secţiune constantă,

la funcționarea cu și fără grătar. În cazul funcționării fără grătar, elementul de distribuție îl constituie difuzorul situat deasupra camerei de amestec.

Majoritatea încercărilor s-au efectuat cu grătar, obținîndu-se în acest caz un mers mai uniform, la o viteză a agentului de fluidizare de circa 80 cm pe secundă, pentru o granulație de 0—3 mm.

Sistemul de desprăfuire a gazelor este alcătuit dintr-un ciclon ale cărui dimensiuni se pot vedea în figură și dintr-un scruber în care se face spălarea și răcirea gazelor fierbinți, prin stropire cu apă. Ciclonul este prevăzut la partea inferioară cu un con mobil care permite închiderea sa parțială sau totală. În piciorul ciclonului sînt prevăzute două clapete cu contra greutate care mențin permanent închiderea necesară.

În aceste condiții s-a obținut o funcționare normală a instalației, praful separat de ciclon avînd următoarea compoziție granulometrică:

>0,75 mm	0,7%
0,5 — 0,75 mm	0,5%
0,3 — 0,5 mm	0,5%
<0,3 mm	97,7%
pierderi	0,6%
	100,0%

Materialul reținut de ciclon reprezintă circa 3% din cărbunele introdus.

Încercările de desulfurare executate constituie o trecere la scară pilot a lucrărilor de desulfurare executate în laborator în cadrul aceluiași institut.

Primele încercări efectuate au permis să se tragă următoarele concluzii:

1. Desulfurarea cărbunilor de PALV este posibilă în condițiile fluidizării cu agent oxidant;

2. Încercările la scară pilot au arătat necesitatea unor modificări a tehnologiei în raport cu cele stabilite anterior în lucrările de laborator;

3. Folosirea aburului în compoziția agentului de fluidizare duce atît la îmbunătățirea procesului de desulfurare cît și la ameliorarea calității subproduselor rezultate.

4. Experimentarea condițiilor de lucru au arătat necesitatea unor modificări constructive a instalației, modificări ce sînt în curs de executare.

5. Procesul de semicarbonizare prin pat fluid devine cu atît mai rentabil cu cît are o valorificare mai completă; datorită specificului subproduselor rezultate, valorificarea energetică a acestor este cea mai rațională.

Aceasta impune, în general respectarea unor condiții tehnologice riguroase atît pentru obținerea unui semicocs de bună calitate cît și a unor gaze combustibile ușor valorificabile.

Primit la redacție la 1 noiembrie 1963

BIBLIOGRAFIE

1. M. IONESCU, V. ANGHEL, Metalurgia și construcția de mașini, **12**, *19* (1957).
2. — Rev. Minelor, *2*, 98 (1957).
3. D. IONESCU, V. ANGHEL, A. PARTENE, A. PĂUN, Metalurgia și construcția de mașini, *8*, 660 (1959).
4. I. BLUM, I. NISTOR, V. GÎNDEA, C. IONESCU, St. cerc. energ. seria B *1*, 133 (1963).

M. BERCOVICI şi A. ARIE, *Reţele electrice — calculul mecanic*, **519 p., 472 fig., 82 tab.**

În literatura tehnică romînească se putea constata, pînă în prezent, un gol : nu exista o lucrare amplă care să prezinte sistematic şi la un nivel superior problemele de calcul mecanic şi construcţia liniilor electrice aeriene. De altfel, aprecierea de mai sus este potrivită şi pentru literatura tehnică mondială în care numărul lucrărilor complete, consacrate acestor probleme este mic.

Cartea *Reţele electrice-calculul mecanic* de acad. M. Bercovici şi conf. A. Arie umple acest gol şi răspunde unor necesităţi imperioase pe care le ridică dezvoltarea economiei naţionale şi, în particular, a sistemului energetic. Ea reprezintă un ajutor preţios pentru inginerii şi tehnicienii care proiectează, construiesc şi exploatează liniile electrice aeriene de transport şi distribuţie, precum şi pentru studenţii din această specialitate.

Alături de părţile clasice sau cunoscute, cartea conţine numeroase elemente moderne şi originale ca de exemplu : stabilirea experimentală a datelor de calcul, erori în calculul eforturilor şi al săgeţii — din cauza variaţiei neliniare a modulului de elasticitate — metoda lucrului mecanic folosită la calculul mecanic al conductoarelor, folosirea maşinilor de calcul numerice şi analogice etc. Pe lîngă tratarea teoretică riguroasă, cartea se distinge prin prezentarea a numeroase procedee de calcul practice — abace, nomograme, tabele.

Lucrarea este tipărită în condiţii grafice superioare, conţine 519 pagini, 472 figuri, 82 tabele. Fiecare capitol se încheie cu o listă bibliografică de 16 — 79 poziţii. La sfîrşitul cărţii se prezintă o bibliografie generală cu 12 poziţii. Conţinutul este ordonat în 9 capitole.

Primul capitol este consacrat conductoarelor liniilor electrice aeriene şi tratează despre material, tipuri constructive, forţe exterioare, calculul mecanic, încheindu-se cu un subcapitol privind comparaţia între conductoarele fabricate din materiale diferite. Pe lîngă teoria clasică a calculului mecanic al conductoarelor liniilor electrice în diferite ipoteze de lucru, completată cu elementele originale amintite mai sus, acest prim capitol conţine numeroase grafice, tabele, prescripţii şi norme din ţara noastră şi din alte ţări, privind proiectarea liniilor electrice. În acelaşi sens, se remarcă paragraful privind metodele practice de determinare a săgeţii şi a eforturilor în care, după prezentarea metodelor clasice — metoda riglei de calcul, diagramele Szilas, Trukxa, Blondel, Besser, nomogramele Denisiuk — se expun succint metodele moderne bazate pe utilizarea calculatoarelor cifrice şi a modelelor mecanice.

În capitolul doi, consacrat izolatoarelor, se tratează despre proprietățile materialelor din care se confecționează izolatoarele, tipurile constructive, proprietățile electrice ale lanțului de izolatoare, contaminarea izolatoarelor. În afara părții descriptive, acest capitol conține informațiile necesare (tabele, grafice, formule) pentru alegerea izolatoarelor, recomandate prin prescripții interne sau internaționale.

Se prezintă cele mai noi realizări în construcția izolatoarelor din țara noastră și din alte țări. Un spațiu mai redus este rezervat problemelor privind încercarea izolatoarelor.

Capitolul trei este rezervat armăturilor și clemelor. La fel ca și în capitolul precedent, descrierea este îmbinată cu prezentarea recomandațiilor și a formulelor necesare proiectanților pentru alegerea acestor piese. Un paragraf special este închinat unei probleme de mare actualitate — accesoriilor pentru amortizarea vibrațiilor.

Capitolul patru, deși redus ca volum, prezintă interes prin caracterul său de generalitate. Aici se expun principiile și normele de dimensionare a stîlpilor folosiți pe liniile aeriene de energie electrică, indiferent de materialul din care aceștia sînt confecționați.

Capitolele cinci, șase și șapte, consacrate proiectării stîlpilor, împreună cu capitolul unu — consacrat conductoarelor — reprezintă partea cea mai importantă, mai dificilă și mai reușită a cărții.

Capitolul cinci consacrat stîlpilor de lemn, tratează despre materialul folosit la construcția stîlpilor de lemn, impregnarea lemnului, tipuri constructive, calculul și dimensionarea stîlpilor de lemn, îmbinarea acestora și verificarea lor în exploatare. Autorii au folosit cu succes experiența sovietică pe care au completat-o cu experiența bogată, acumulată în acest domeniu în țara noastră.

În capitolul șase, consacrat stîlpilor metalici, se analizează elementele constructive, determinarea eforturilor în stîlp și în piesele componente, dimensionarea elementelor constructive, și a unor stîlpi speciali, metode de îmbinare. Se remarcă faptul că, în comparație cu puținele cărți în care se expun aceleași probleme, de exemplu în comparație cu cartea lui Girkmann și Königshofer, autorii au reușit ca, într-un spațiu mult mai restrîns, să trateze, sub o formă teoretică riguroasă și totodată accesibilă, problemele pe care le ridică proiectarea structurilor stîlpilor metalici.

Capitolul șapte, consacrat stîlpilor de beton armat, constituie una dintre cele mai complete tratări existente în literatura de specialitate din acest domeniu. El reflectă atît efortul de sintetizare al autorilor cît și succesele obținute de specialiștii din țara noastră în proiectarea, construcția și utilizarea stîlpilor de beton armat. Menționăm paragraful privind verificarea stîlpilor de beton armat în exploatare și la manipulare, ca fiind deosebit de util în practica exploatării.

Neîndoielnic, capitolul opt, va trezi interesul proiectanților și al constructorilor de linii electrice aeriene. În acest capitol se analizează o problemă mai puțin dezbătută în literatura de specialitate și anume problema fundațiilor : tipuri de fundații, norme și prescripții, noțiuni privind împingerea și rezistența pămîntului, principii de calcul, metode de calcul, progrese recente în studiul fundațiilor.

Cartea se încheie cu capitolul nouă, privind problemele generale ale proiectării liniilor electrice aeriene : alegerea și pichetarea traseului, amplasarea stîlpilor pe traseu, stabilirea deschiderii optime, considerații asupra economicității liniilor aeriene.

În afara celor nouă capitole, cartea conține o introducere în care se face un scurt istoric al construcției liniilor electrice aeriene în țara noastră și se arată succesele obținute în anii puterii populare.

Ar fi de dorit ca la o nouă ediție autorii să completeze materialul cu exemple de calcul la capitolele sau paragrafele mai importante. Aceste exemple, puține la număr și cu caracter

ilustrativ, vor uşura însuşirea rapidă a materialului de către un cerc de cititori mai larg. Ele vor fi utile chiar dacă — aşa cum se arată în prefaţă — exemplele de calcul, desigur numeroase, vor constitui obiectul unei alte lucrări.

Tot într-o nouă ediţie şi-ar putea găsi locul şi unele probleme netratate din cauza, probabil, a lipsei de spaţiu : dispozitive şi metode de luptă împotriva chiciurei, întocmirea şi conţinutul devizului, problemele constructive legate de transpoziţia conductoarelor şi mai ales de tipizarea stîlpilor. Ar mai putea fi prezentate, în fotografii sau desene cu cote, cîteva exemple, dintre cele mai reprezentative, privind tipurile de stîlpi folosiţi curent în ţara noastră.

S-a menţionat la început că literatura domeniului din care face parte cartea recenzată, cel puţin în ce priveşte numărul lucrărilor complete, nu este bogată. Acest lucru se explică, între altele, prin faptul că teoria şi practica construcţiei liniilor electrice este un domeniu în care se împletesc specialităţi foarte diferite : electrotehnica, rezistenţa materialelor, tehnologia construcţiilor, ştiinţa ceramicii etc. O carte despre calculul mecanic şi construcţia liniilor electrice poate să satisfacă cerinţele numai dacă îmbină armonios cunoştinţele şi metodele proprii tuturor specialităţilor menţionate. În acest sens, cartea recenzată este un exemplu fericit — rezultatul unei experienţe didactice îndelungate a autorilor la Institutul politehnic din Bucureşti şi al legăturii lor strînse cu practica electrificării ţării noastre.

C. Guţu

Záhladní problémy ve stavbě spalovacích turbin (Problemele de bază ale turbinelor cu gaze). Nakladatelstvi Československé akademie věd, Praga, 1962.

Lucrarea *Problemele de bază ale turbinelor cu gaze* editată sub redacţia prof. dr. Jan Jerie, membru corespondent al Academiei de Ştiinţe a R.S.C.S., sintetizează rezultatele muncii de cercetare, realizare şi experimentare a turbinelor de gaze, fabricate în R. S. Cehoslovacă. După prezentarea aspectelor constructive şi a parametrilor instalaţiilor realizate de uzinele V. I. Lenin din Pilzen şi de uzina constructoare de maşini nr. 1 din Brno, în capitolul consacrat ciclului turbinelor cu gaze sînt atacate unele aspecte termodinamice deosebit de interesante din acest domeniu. Astfel în analiza ciclurilor prin evaluarea gradului lor de ireversibilitate se scot în relief posibilităţile acestei metode de a caracteriza şi aprecia mai bine diversele soluţii constructive.

Studiul instalaţiilor mixte turbine cu abur şi gaze, existente în exploatare, permite aprecierea căilor lor viitoare de dezvoltare şi a rezultatelor ce se vor obţine. O atenţie deosebită este acordată funcţionării cazanelor cu combustibil solid de 75 t/h ce se construiesc în R.S.C.S., arătîndu-se că în acest caz se obţine o mărire a randamentului întregii instalaţii cu 10 — 15%.

Posibilitatea măririi randamentului ciclului turbinei cu gaze prin utilizarea căldurii fluidului de lucru în urma comprimării este analizată de ing. J. Punčochář, care prezintă cîteva soluţii constructive, interesante pentru anumite cazuri particulare de funcţionare. Analiza posibilităţilor utilizării turbinelor cu gaze în industrie relevă numeroase direcţii de aplicare, datorită îmbunătăţirii procesului tehnologic şi măririi randamentului instalaţiilor. Ar fi fost interesant să se precizeze preocupările din R.S.C.S. în acest domeniu. Prof. dr. J. Jerie studiază problemele legate de realizarea turbinelor cu gaze de mare putere, preocupîndu-se de modul în care trebuie determinaţi gradul de comprimare şi temperatura maximă a ciclului, soluţia de

profilare a paletelor compresorului şi turbinei, legate şi de satisfacerea condiţiilor de rezistenţă. În continuare, se prezintă modul de calcul al recuperatoarelor de căldură din gazele de ardere evacuate din turbină, răcirea interioară a paletelor turbinei şi realizarea ei constructivă, influenţa răcirii intermediare şi a arderii în trepte asupra performanţelor ciclului.

Partea a doua a lucrării prezintă rezultatele cercetărilor legate de realizarea materialelor necesare construirii şi funcţionării turbinelor cu gaze. Sînt prezentate caracteristicile oţelurilor cehoslovace, rezistente la temperaturi ridicate, greutăţile întîmpinate în realizarea lor şi modul lor de înlăturare. Combustibilii utilizaţi sînt studiaţi în special din punct de vedere al conţinutului compuşilor de vanadiu, legaţi de acţiunea corosivă şi erozivă din turbină şi camere de ardere ; o atenţie mai mică este acordată influenţei compoziţiei combustibilului asupra arderii.

Partea a treia, consacrată aerodinamicii turbinelor cu gaze şi compresoarelor, concentrează rezultatele obţinute la realizarea compresoarelor axiale şi a canalizaţiei la admisie în regim subsonic. Sînt instructive datele experimentale prezentate care, comparate cu cele existente în literatura de specialitate, permit aprecierea rezultatelor obţinute. După prezentarea compresoarelor axiale realizate, partea a cincia prezintă studiul arderii în camerele turbinelor cu gaze studiate şi soluţiile constructive adoptate. Se remarcă analiza matematică a fenomenului şi tendinţa stabilirii unei corelaţii între procesul arderii şi arhitectura camerei de ardere.

Lucrarea, prin multiplele aspecte studiate, permite să se aprecieze importantul efort făcut în R.S.C.S. în vederea realizării turbinelor cu gaze, multiplele aspecte cercetate şi rezultatele obţinute.

Victor Pimsner

ASPECTE DE LA CEL DE-AL IX-LEA CONGRES DE ENERGIE DIN R.D.G.

(Markkleberg 26—27 septembrie 1963)

Cel de-al IX-lea Congres de Energie din R.D.G. a fost organizat de asociația Brennstofftechnische Gesellschaft. În cadrul dezbaterilor s-au prezentat șase comunicări axate pe problemele actuale ale energeticii Republicii Democrate Germane.

În cuvîntul său de deschidere prof. dr. ing. Kurt Hofmann, președintele asociației, a făcut o succintă trecere în revistă a succeselor obținute de energetica R.D.G. după cel de-al doilea război mondial. Expunerea, bazată pe un bogat material documentar, a pus în evidență ritmul rapid de dezvoltare a energeticii R.D.G. în comparație cu cel înregistrat în R.F.G.

Prima comunicare, făcută de dipl. ec. Erwin Malms, s-a axat pe măsurile luate în scopul îmbunătățirii planificării de perspectivă a producției și consumului de energie electrică, ca urmare a hotărîrilor celui de-al VI-lea Congres al P.S.U.G. Pe baza acestor hotărîri, Institutele de energetică au pus la punct o metodă de lucru unificată atît pentru planificarea de perspectivă, cît și pentru conducerea operativă a alimentării cu energie. Această metodă științifică de planificare a fost experimentată cu succes în întreprinderile industriei siderurgice și miniere din regiunea Halle. Metoda ține seama de specificul fiecărei ramuri industriale, contribuind prin aceasta la ridicarea nivelului științific al planificării de energie.

Dr. ing. Werner Rademacher, autorul celei de a doua comunicări, a pus în discuție unele probleme legate de economicitatea transportului și distribuției de energie. În cadrul expunerii au fost luați în considerare următorii factori :

— necesarul regional de energie după cantitatea și natura ei, și

— anvergura transportului și distribuției regionale (comunale) de energie.

Autorul propune drept criterii economice : valoarea specifică a investițiilor, manopera și pierderi prin transport.

În cea de a treia comunicare, autor ing. Hermann Koppe, s-au prezentat rezultatele cercetării problemelor ridicate de asigurarea cu energie electrică a industriei și sectorului casnic. Se arată că numai alimentarea cu căldură a locuințelor reclamă circa 20% din producția de brichete a R.D.G., iar dacă sînt luate în considerație și instituțiile social-culturale (teatre, spitale, școli etc.) această cifră se ridică la 25%. Autorul face o comparație a diverselor tipuri de alimentare cu energie calorică pentru a pune în evidență economicitatea ridicată a centralelor electrice de termoficare.

După comunicarea făcută de Reinhord Fleischer asupra tendințelor noi în exploatarea la zi a cărbunelui brun și a utilajelor adecvate acesteia, dr. ing. Hans Kiesel a prezentat o interesantă expunere asupra problemelor ridicate de începerea producției de gaz la Combinatul Schwarze Pumpe. Pornind de la bilanțul de gaz din R.D.G., lucrarea se ocupă de dezvoltarea magistralelor de gaz și acumularea subterană a acestuia necesară la Schwarze Pumpe.

În ultima comunicare dr. rer. ec. Horst Winterhoff și ing. ec. Peter Seidelmann au prezentat rezultatele cercetării asupra economicității explo ării geologice a cărbunilor în R.D.G. Sînt analizate criteriile delimitării cercetării de explorare, se propune includerea cheltuielilor pentru acestea în prețul produsului marfă și se fac unele precizări asupra calculării rentabilității exploatărilor miniere.

Discuțiile purtate de participanții la Congres, pe marginea comunicărilor prezentate, au scos în evidență interesul și preocuparea deosebită față de dezvoltarea unei baze energetice moderne și economice.

Ion Carabogdan

LUCRĂRI APĂRUTE ÎN EDITURA ACADEMIEI R.P.R.

CĂLIN ADRIAN VASILESCU, PERICLE SVORONOS şi VICTOR PIMSNER. *Exploatarea raţională a gazelor naturale*, 367 p. + 7 pl., 26,40 lei.

TRAIAN SĂLĂGEAN, *Fenomene fizice şi metalurgice la sudarea cu arcul electric a oţelurilor*, 219 p., 12,10 lei.

A. MORARU, *Amplidina (maşina electrică amplificatoare de curent continuu cu cîmp transversal)*, 328 p. + 2 pl., 14,90 lei.

GH. CARTIANU, *Modulaţia de frecvenţă* (în limba rusă), 579 p. + 7 pl., 39,10 lei.

GR. C. MOISIL, *Circuite cu tranzistori*, vol. I, 142 p., 8,25 lei; vol II, 156 p., 8,55 lei.

T. OROVEANU, *Scurgerea fluidelor prin medii poroase neomogene*, 329 p., 16,30 lei.

V. N. CONSTANTINESCU, *Lubrificaţia cu gaze*, 635 p., 31 lei.

C. PENESCU, *Automatica şi telemecanica sistemelor energetice*, vol. III, 417 p., + 9 pl., 30,20 lei.

N. TIPEI, V. N. CONSTANTINESCU, AL. NICA şi O. BIŢĂ, *Lagăre cu alunecare (calcul, proiectare, ungere)*, 436 p., 23,70 lei.

P. P. TEODORESCU, *Probleme plane în teoria elasticităţii*, vol. I, 996 p., 6 pl., 42,80 lei.

E. ZAHARESCU, *Contribuţii la studiul capacităţii portante a fundaţiilor*, 300 p. + 4 pl., 16,40 lei.

V. VISARION, *Elemente pentru calculul plăcilor curbe subţiri elastice*, 385 p., 16,80 lei.

M. SOARE, *Application des équations aux différences finies au calcul des coques*, 460 p. + 8 pl., 33,80 lei.

* * * *Tehnica nucleară în sprijinul producţiei. Unele realizări al Institutului de fizică atomică al Academiei R.P.R.*, 253 p. + 1 pl., 14,30 lei.

* * * *Sesiunea ştiinţifică jubiliară a Institutului de mecanică aplicată „Traian Vuia" al Academiei R.P.R.*, 445 p. + 1 pl., 23,30 lei.

VASILE MARCU, *Metalizarea prin pulverizare*, 340 p., 21 lei.

SUZANA GÎDEA, M. PROTOPOPESCU, D. DRIMER, *Metalurgia fizică a semiconductorilor*, 501 p. + 4 pl., 31 lei.

1965 JUL 9

Revista apare de 4 ori pe an.

Preţul unui abonament este de 72 lei pe an.

În ţară abonamentele se fac la oficiile poştale, agenţiile poştale, factorii şi difuzorii voluntari din întreprinderi şi instituţii.

Orice comandă din străinătate (numere izolate sau abonamente) se fac prin

CARTIMEX

Căsuţa poştală 134—135

Bucureşti

R. P. Romînă

sau prin reprezentanţii săi din străinătate

I. P. „Informaţia" — c. 181

43 821

Lei 18.

1736

REFERÁLVA

R

STUDII ŞI CERCETĂRI DE ENERGETICĂ ŞI ELECTROTEHNICĂ

2

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
St. cerc. energ. electr. Tom. 14 Nr. 2 p. 253—462 Bucureşti 1964

COMITETUL DE REDACȚIE

Acad. REMUS RĂDULEȚ — *redactor responsabil* ;
Prof. G. BĂRĂNESCU, membru corespondent al Academiei R.P.R. — *redactor responsabil adjunct* ;
Acad. A. AVRAMESCU,
Prof. M. MARINESCU, membru corespondent al Academiei R.P.R. ;
V. M. POPOV, membru corespondent al Academiei R.P.R. ;
Prof. C. ARAMĂ, membru corespondent al Academiei R.P.R. ;
Prof. T. IONESCU, membru corespondent al Academiei R.P.R. ;
Prof. ST. GHEORGHIU, membru corespondent al Academiei R.P.R. ;
Ing. C. APETREI ;
Ing. CS. NAGY ;
Ing. V. PIMSNER ;
Ing. C. A. VASILESCU ;
Ing. ECATERINA ARIE — *secretar de redacție*

Revista apare de 4 ori pe an.

Prețul unui abonament este de 72 lei.

În țară abonamentele se fac la oficiile poștale, agențiile poștale, factorii și difuzorii voluntari din întreprinderi și instituții.

Orice comandă din străinătate (numere izolate sau abonamente) se face prin: CARTIMEX.

Căsuța poștală 134 — 135 București R. P. Romînă sau prin reprezentanții săi din străinătate.

Manuscrisele, cărțile și revistele pentru schimb, precum și orice altă corespondență se trimit la Comitetul de redacție, pe adresa:
BUCUREȘTI, Șos. Vitan, nr. 236

F 1736

A. SUCI, C. GUȚU, M. PETCU 621.311.153.22.015.11/12

Evaluarea efectelor variațiilor de tensiune

Articolul aduce completări metodei, elaborată anterior de autori, pentru evaluarea daunelor provocate întreprinderilor industriale de variațiile tensiunii de alimentare, completări ivite cu ocazia aplicării acesteia în cazul concret al unei uzine de laminat țevi fără sudură, și prezintă principalele rezultate numerice obținute în cazul analizat.

St. cerc. energ. electr., Tom. 14, Nr. 2, 1964, p. 255

VICTOR CARACUDOVICI, CSABA NAGY 621.311.154 :643.336

Evoluția consumului de energie în gospodăriile casnice

Se expun pe scurt metodele care au stat la baza predeterminării necesarului de energie pe forme și purtători de energie în gospodăriile casnice și considerațiile care au determinat alegerea mărimii și variației indicilor de consum casnic în viitor.

În încheiere se dă mărimea prevalată acestui consum în 1980 și variația structurii consumului casnic pe purtători de energie.

St. cerc. energ. electr., Tom. 14, Nr. 2, 1964, p. 273

REMUS RĂDULET, PAUL DIMO 621.372.6.052.4 : 537.313

Teoria celor mai simple scheme complete, echivalente cu rețelele electrice liniare în raport cu o latură a lor (I)

Se demonstrează că există numai două scheme simple echivalente cu o rețea electrică liniară în raport cu o latură a ei, analizată, care conservă fie tensiunile electromotoare, fie curenții de scurtcircuit ai generatoarelor din rețeaua-original · schema-derivație, cu generatoare de tensiune, în care toate aceste generatoare, cu tensiunile electromotoare reale ale generatoarelor corespunzătoare din rețeaua-original împreună cu o latură pasivă, sînt legate în paralel pe latura analizată, și schema-serie, cu generatoare de curent, în care toate aceste generatoare, avînd curenții de scurtcircuit reali ai generatoarelor corespunzătoare din rețeaua-original, împreună cu o latură pasivă, sînt legate în serie cu latura analizată. Se calculează admitanțele, respectiv admitanțele pe care trebuie să le aibă generatoarele de tensiune, respectiv de curent spre a asigura echivalența, cu relevarea cazurilor particulare în care, în rețeaua-original, toate laturile cu tensiuni electromotoare sînt conectate într-o stea, respectiv într-un ochi de rețea.

St. cerc. energ. electr., Tom. 14, Nr. 2, 1964, p. 283

STUDII ŞI CERCETĂRI
DE
ENERGETICĂ
ŞI
ELECTROTEHNICĂ

Tomul 14, nr. 2 1964

SUMAR

Energetică generală

Pag.

A. SOCI, C. GUŢU şi M. PETCU, Evaluarea efectelor variaţiilor de tensiune . . 255

VICTOR CARACUDOVICI şi CSABA NAGY, Evoluţia consumului de energie în gospodăriile casnice 273

Electroenergetică şi electrotehnică

REMUS RĂDULEŢ şi PAUL DIMO, Teoria celor mai simple scheme complete, echivalente cu reţelele electrice liniare în raport cu o latură a lor (I) . . 283

MATEI MARINESCU, Indicii tehnici-economici pentru studiul comparativ al motoarelor parametrice 311

A. AVRAMESCU, G. DRĂGAN, I. ADĂMUŢ şi M. PETCU, Studiul supratensiunilor ce apar la declanşarea liniilor în gol cu ajutorul calculatoarelor analogice 319

E. ARIE, M. POMÎRLEANU şi P. NICOLAE, Analiza factorilor ce determină repartiţia economică a puterilor între centralele unui sistem electroenergetic 337

CORNELIU PENESCU şi MIHAI CEAPÎRU, Element de cuadrare cu diode fără amplificator operaţional sumator 357

CORNELIU PENESCU şi PETRE DIMO, Convertor analog-numeric complet tranzistorizat 369

Termoenergetică şi termotehnică

CĂLIN ADRIAN VASILESCU şi VICTOR PIMSNER, Diagrama entropică cu axe curbe pentru 1 kg de substanţă 385

I. TEOREANU, Contribuţii la studiul transferului de căldură fluid-particule în sisteme gazo-disperse (cu aplicaţii la industria cimentului) 391

M. NĂSTASE, AL. DĂNESCU şi N. BLEZU, Influenţa temperaturii pereţilor antecamerei asupra proceselor de ardere din motoarele Diesel în regim de turaţie variabil 401

VICTOR V. GHIA, Metoda de calcul al arzătoarelor cu amestec prealabil funcţionînd cu gaze recirculate 413

Pag.

BERTHOLD GRÜNWALD, Un model fizic nou privind arderea combustibilului în motorul cu aprindere prin scînteie 425

Comunicări

MATEI MARINESCU, Despre principiul „transformării extremale a energiei" în sisteme electromecanice cuplate electromagnetic 439

Note

V. PIMSNER, Cercetări experimentale asupra turbocompresoarelor de supraalimentare a motoarelor cu ardere internă 443

N. PĂNOIU şi L. MAGHIAR, Consideraţii privind arderea ligniţilor din R.P.R. pe grătarul Jungk 449

Recenzii 461

St. cerc. energ. electr. Tom 14 Nr. 2 p. 253—462 Bucureşti 1964

EVALUAREA EFECTELOR VARIAȚIILOR DE TENSIUNE

DE

A. SOCI, C. GUȚU și M. PETCU

621.311.153.22.015.11/12

Într-o lucrare anterioară [1] s-a expus o metodă pentru evaluarea daunelor provocate întreprinderilor industriale de variațiile tensiunii de alimentare. Articolul de față aduce unele completări metodei, ivite cu ocazia aplicării acesteia în cazul concret al unei uzine de laminat țevi fără sudură, și prezintă principalele rezultate numerice obținute în cazul analizat.

Conform metodei de evaluare a daunelor citate, pornind de la studiul influenței variațiilor de tensiune asupra procesului tehnologic, se determină: micșorarea producției, scăderea calității producției, rebuturile și consumurile suplimentare de materii prime sau de energie, uzurile suplimentare, avariile și deranjamentele utilajului în regimuri de funcționare cu tensiune nenominală. Calculul fiecărei componente a daunei prezintă particularități în funcție de tipul utilajului și de natura procesului tehnologic respectiv. În articol se examinează mai detaliat cîteva cazuri tipice, care permit o generalizare a rezultatelor.

1. SCĂDEREA PRODUCȚIEI

Examinînd influența variațiilor de tensiune asupra procesului tehnologic, se pot localiza agregatele (punctele) de strangulare, determinante pentru variația productivității întreprinderii, precum și valoarea minimă u_{op} a tensiunii la care procesul tehnologic nu mai poate continua, deoarece agregatele se opresc. În cele mai multe cazuri, punctele de strangulare sînt utilaje antrenate de motoare asincrone.

La uzina de laminat țevi analizată există două linii tehnologice ale căror locuri de strangulare sînt laminorul duo și cremaliera laminorului împingător,

St. cerc. energ. electr. Tom. 14 Nr. 2 p. 255—271 București 1964

ambele antrenate de motoare asincrone cu alunecare mărită artificial ; de aceea s-a studiat variația cu tensiunea a turației motoarelor asincrone [1]).

La scăderea tensiunii de alimentare, alunecarea motoarelor asincrone crește, producînd o micșorare a vitezelor medii ale mecanismelor acționate și deci o scădere a productivității.

Cunoscînd că timpul de succesiune t_s al operațiilor de prelucrare se compune din timpul de mașină t_m (cît durează prelucrarea propriu-zisă) și un timp auxiliar t_a, se are în vedere că variația vitezei de antrenare a utilajului afectează în mod direct numai timpul t_m și, prin intermediul acestuia, timpul de succesiune t_s și deci productivitatea.

Variația vitezei motorului asincron, δn, ca urmare a variației de tensiune, se determină plecînd de la alunecarea nominală s_n — la tensiunea relativă $u_* = 1$ și cuplul relativ, $\mu_* = 1$, — alunecarea medie s — în regimul de funcționare dat, la tensiune $u_* \neq 1$

$$\delta n = n_{u_*=1} - n_{u_*\neq 1} = n_s s_m \left(\frac{s}{s_m} - 1 \right),$$

rezultînd variația relativă a vitezei motorului

$$\nu = \frac{\delta n}{n_{u_*=1}} = \frac{s_m}{1 - s_m} \left(\frac{s}{s_m} - 1 \right).$$

Cunoscînd variația relativă de turație ν, se poate calcula noul timp de mașină $t_{m\nu}$, $t_{m\nu} = \dfrac{t_m}{1 - \nu}$ și scăderea relativă de productivitate, Δp_*

$$\Delta p_* = \frac{p - p_\nu}{p} = \frac{\dfrac{1}{t_s} - \dfrac{1}{t_{s\nu}}}{\dfrac{1}{t_s}} = \frac{\nu}{1 + \beta (1 - \nu)},$$

unde $\beta = \dfrac{t_a}{t_m}$.

Raportul $\dfrac{s}{s_n}$ care intervine în expresia lui ν se poate lua din figura 1, în care s-au reprezentat pentru motorul asincron curbele de variație ale lui $\dfrac{s}{s_n}$ în

[1]) E. Arie, S. Ionescu, P. Nicolaie, T. Miclescu și St. Kovács, *Influența variațiilor de tensiune asupra productivității la uzinele „23 August" și „Republica"*. Biblioteca I. E., 1960.
C. Guțu, M. Petcu și A. Soci, *Efectele variațiilor de tensiune și ale întreruperilor electrice asupra procesului de laminare a țevilor*. Biblioteca I. E., 1963.

funcție de diverse încărcări μ_* și tensiuni u_*, calculate cu expresia

$$\frac{s}{s_n} = \frac{b_n + \sqrt{b_n^2 - 1}}{b_n \frac{u_*^2}{\mu_*} + \sqrt{\left(b_n \frac{u_*^2}{\mu_*}\right)^2 - 1}},$$

pentru $b_n = \frac{M_{max}}{M_n} = 2$.

Pentru folosirea curbelor din figura 1 este necesară cunoașterea diagrame de sarcină a mașinii. În figura 2*a* și 2*b* s-au reprezentat pentru $u_* = 1$ diagramele de variație ale curentului relativ I_* și cuplului relativ μ_* al motorului asincron de antrenare a laminorului duo, avînd următoarele caracteristici : 740 kW, 6 kV, 89 A, $\cos \varphi_n = 0{,}86$, 590 rot/min. Folosind curbele din figura 1, s-a dedus din diagrama figurii 2 *b* diagrama alunecării relative $\frac{s}{s_n}$, reprezentată în figura 2 *c*, pentru $u_* = 1$. Procedînd în mod similar și pentru alte valori ale tensiunii, se pot deduce valorile $\frac{s}{s_n}$ din tabela 1 și, prin integrarea curbelor $\frac{s}{s_n}(t)$, se calculează $\left(\frac{s}{s_n}\right)_{med}$.

În timpul desfășurării unui ciclu de laminare la tensiunea nominală a rețelei, s-a măsurat turația minimă $n_{min} = 410$ rot/min, rezultînd alunecarea maximă $s_{max} = 0{,}317$. Cum din tabela 1 pentru $u_* = 1$ rezultă $\left(\frac{s}{s_n}\right)_{max} = 1{,}075$, se deduce $s_n = \frac{0{,}317}{1{,}075} = 0{,}295$.

s_m se deduce tot din tabela 1, din raportul $\left(\frac{s}{s_n}\right)_{med \text{ la } u_* = 1} = \frac{s_m}{s_n} = 0{,}4565$; rezultă $s_m = 0{,}4565 \times 0{,}295 = 0{,}1346$ și $\frac{s_m}{1 - s_m} = 0{,}1555$. Calculul celorlalte coloane din tabela 1 se efectuează conform relațiilor stabilite mai sus.

În figura 3 s-a reprezentat scăderea productivității în funcție de tensiune, Δp_1 și Δp_2 pentru cele două linii de laminare, în unități fizice (notate cu L_1 pentru laminorul duo și cu L_2 pentru laminorul împingător).

Daunele provocate de micșorarea producției se calculează precum urmează : dacă productivitatea nominală a secției studiate este p_n în unitatea de timp (t/h), iar productivitatea la tensiunea u_* este $p(u)$, atunci daunele pe unitatea de timp corespunzătoare alimentării la tensiunea u_* sînt

$$d_p(u) = [p_n - p(u)](c_a + c_s + b) = \Delta p(u)(c_a + c_s + b), \quad \text{lei/h}$$

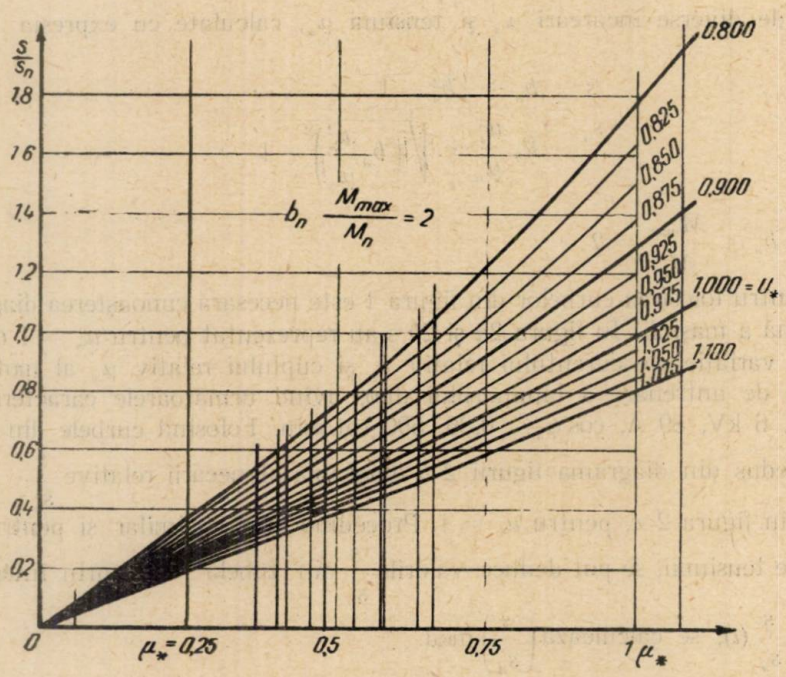


Fig. 1. — Curbele $\frac{s}{s_n}(\mu_*)$ pentru diverse valori ale lui u_*.

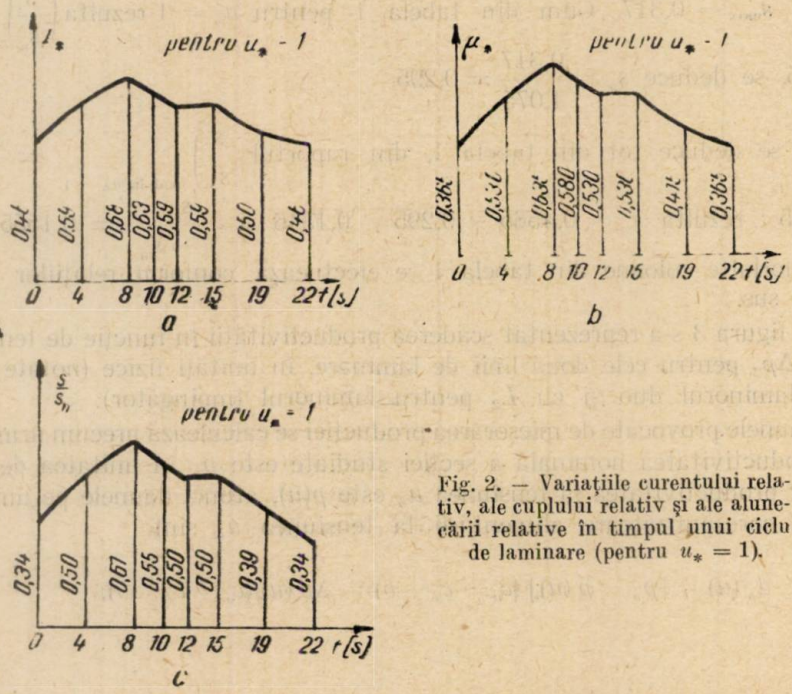


Fig. 2. — Variațiile curentului relativ, ale cuplului relativ și ale alunecării relative în timpul unui ciclu de laminare (pentru $u_* = 1$).

Tabela 1

Calculul productivității relative a unui laminor la variația tensiunii ($\beta = 0{,}417$)

μ_* pentru $u_* = 1$	0,06	0,40	0,455	0,48	0,575	0,66	1,075	$\left(\frac{s}{s_n}\right)_{med}$	$\frac{s}{s_m}$	ν	Δp_*	$\frac{\Delta p_1}{[t/h]}$	$\frac{\Delta p_1}{[lei/h]}$
u_*	s/s_n												
1,1	0,04	0,3	0,345	0,36	0,44	0,515	0,875	0,3425	0,75	−0,0389	−0,0271	+0,350	− 369
1,0	0,055	0,38	0,43	0,45	0,545	0,64	1,075	0,4565	1	0	0	0	0
0,9	0,065	0,47	0,54	0,575	0,69	0,805	1,41	0,5825	1,275	0,0428	0,0306	0,395	417
0,8	0,09	0,6	0,69	0,73	0,88	1,04	1,965	0,769	1,685	0,1065	0,0775	1,000	1 055,72

unde c_a reprezintă componenta amortizărilor și cheltuielilor generale în prețul de cost al produsului (lei/t), c_s reprezintă componenta salariilor în prețul de cost al produsului (lei/t), iar b reprezintă beneficiul (egal cu diferența între

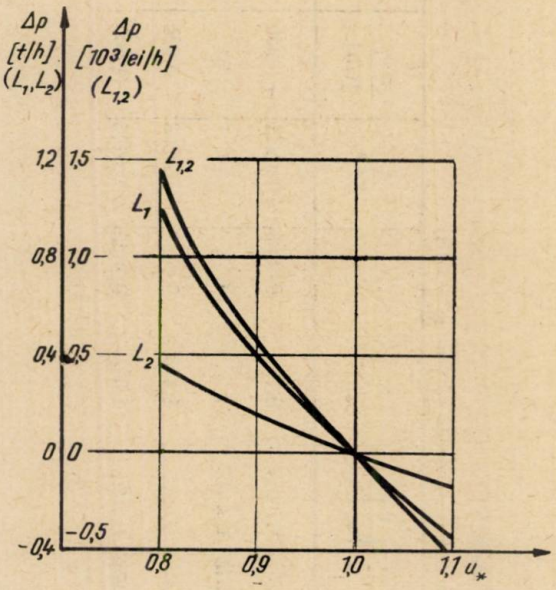


Fig. 3. — Variația scăderii productivității în funcție de tensiunea de alimentare a motoarelor de antrenare.

prețul de livrare și prețul de cost al produsului). Componentele c_a, c_s și b sînt cele corespunzătoare funcționării normale a instalației la $u_* = 1$.

Pentru întreprinderea studiată :

$$d_p(u) = 1\,055{,}62\ \Delta p\ (u),$$

$$\Delta p = \Delta p_1 + \Delta p_2.$$

Cu aceasta relație s-a trasat în figura 3 scăderea valorică a producției orare, notată cu $L_{1,2}$.

2. UZURI SUPLIMENTARE

Calculul daunelor provocate de uzurile suplimentare ale instalațiilor și utilajelor electrice supuse variațiilor de tensiune s-a dovedit a fi destul de laborios, datorită, pe de o parte, numărului mare de receptoare electrice, fiecare cu regimul său de consum electric, și, pe de altă parte, modului diferit în care se calculează uzura la fiecare tip de receptor.

Notînd cu a cota de amortizare a investițiilor utilajului sau instalației electrice j, cu δ_{*ij} uzura relativă în regimul i și cu t_{*ij} durata relativă de func-

ționare în regimul i, daunele medii în perioada de timp examinată au expresia

$$d_{\delta j} = a_j \sum_i \delta_{*ij} t_{*ij} - a_j,$$

dacă cota de amortizare a_j se referă la perioada calendaristică, indiferent dacă utilajul este folosit sau nu, și

$$d_{zj} = a_j \sum_i (\delta_{*ij} - 1) t_{*ij},$$

unde $\Sigma t_{*ij} = 1$, dacă a_j se referă la durata de funcționare efectivă a utilajului (de ex. lămpi cu incandescență).

Pentru a putea calcula aceste daune provocate de variația de tensiune, este necesar a se stabili uzurile suplimentare pentru principalele tipuri de utilaje.

O atenție deosebită trebuie acordată calculului uzurii motoarelor asincrone, întrucît acestea reprezintă receptoare cu largă răspîndire în industrie, cu pondere ridicată în consumul industrial, și la calculul uzurii cărora se ridică probleme dificile. În cele ce urmează se prezintă o metodă completă și simplă de calculul uzurii motoarelor asincrone.

Considerînd, conform [2], că încălzirea mașinii este proporțională cu pătratul curentului relativ, trebuie exprimată valoarea curentului în funcție de tensiunea de alimentare, cuplul de sarcină și parametrii mașinii. În acest scop se pleacă de la următoarele expresii simplificate, cunoscute din teoria mașinii asincrone [3]:

$$\frac{I_1}{I_k} = \sqrt{\frac{\left(\frac{\tau}{1+\tau}\right)^2 + \left(\frac{s}{s_k}\right)^2}{1 + \left(\frac{s}{s_k}\right)^2}}$$

$$\frac{M}{M_k} = \frac{2}{\frac{s}{s_k} + \frac{s_k}{s}}$$

în care

I_1 – curentul de alimentare de la rețea;
I_k – curentul ideal de scurtcircuit;
τ – factorul de scăpări;
s – alunecarea;
s_k – alunecarea critică (corespunzătoare cuplului maxim);
M – cuplul mașinii;
M_k – cuplul maxim (critic) al mașinii.

Trecînd la mărimile relative

$$\frac{I}{I_n} = I_*, \quad \frac{U}{U_n} = u_*, \quad \frac{M}{M_n} = \mu_*$$

(I_n, U_n și M_n fiind valorile nominale ale curentului, tensiunii și cuplului) și cunoscînd că alunecarea s_n corespunde la $I_* = u_* = \mu_* = 1$, se deduc următoarele relații :

$$I_*^2 = u_*^2 \frac{\left(\frac{\tau}{1+\tau}\right)^2 + \left(\frac{s}{s_k}\right)^2}{\left(\frac{\tau}{1+\tau}\right)^2 + \left(\frac{s_n}{s_k}\right)^2} \times \frac{1 + \left(\frac{s_n}{s_k}\right)^2}{1 + \left(\frac{s}{s_k}\right)^2},$$

$$\mu_* = u_*^2 \frac{2\mu_{*k}}{\frac{s}{s_k} + \frac{s_k}{s}}$$

(μ_{*k} fiind cuplul maxim relativ).

Eliminînd pe $\frac{s}{s_k}$ între cele două expresii și neglijînd termenii mici, se deduce o relație de forma

$$I_*^2 = d\,u_*^2 + (1-d)\left(\frac{\mu_*}{u_*}\right)^2,$$

în care

$$d = \frac{1}{1 + \left(\frac{1+\tau}{2\tau\mu_{*k}}\right)^2}.$$

În sfîrșit, între factorul de scăpări τ și factorul de putere maxim al mașinii există relația cunoscută din teoria mașinii asincrone

$$\tau \cong \frac{1 - \cos\varphi_{max}}{2\cos\varphi_{max}}.$$

Utilizînd relația de mai sus, relația factorului d devine

$$d = \frac{1}{1 + \left(\frac{1+\cos\varphi_{max}}{1-\cos\varphi_{max}} \times \frac{1}{2\mu_k}\right)^2}.$$

În mod normal, $\cos\varphi_{max} \cong \cos\varphi_n$ și $\mu_k \cong 2$. În figura 4 s-a construit familia de curbe $I_*^2 = f(\mu_*, u_*, d)$, cu μ_* și d ca parametru, pentru următoarele valori :

$$u_* = \left|\begin{matrix} 1{,}1 \\ 1 \\ 0{,}9 \\ 0{,}8 \end{matrix}\right| \qquad d = \left|\begin{matrix} 0{,}05 \\ 0{,}1 \\ 0{,}15 \end{matrix}\right| \qquad \mu_* = 2.$$

Parametrul d urmează a se stabili în fiecare caz, în funcție de parametrii mașinii.

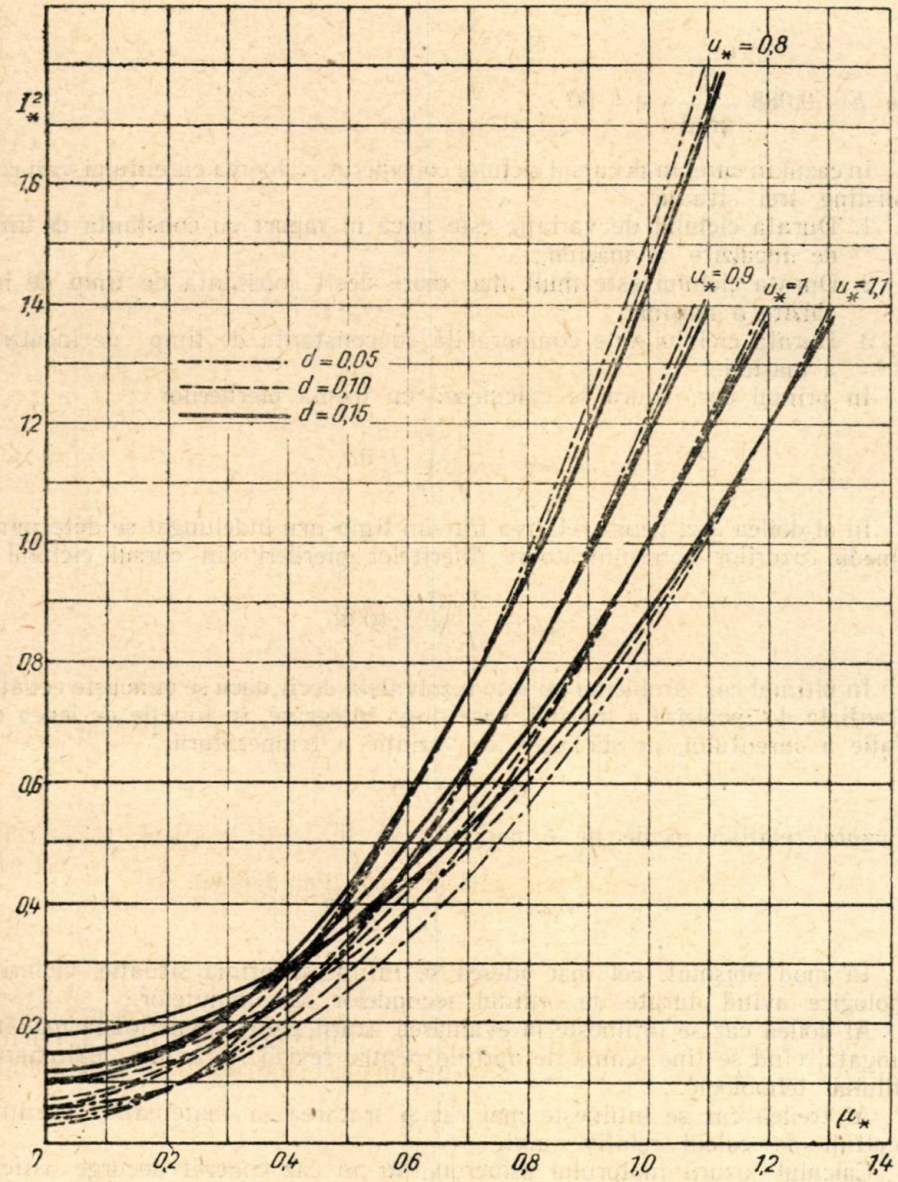


Fig. 4. — Variația pierderilor relative în motorul asincron în funcție de cuplul relativ și tensiunea relativă.

Considerînd ca unitate uzura izolației mașinii la încălzirea nominală (60°C), uzura relativă, δ_*, va fi [2]

$$\delta_* = e^{hq\,(I_*^2 - 1)},$$

unde $h = 0{,}088 \dfrac{1}{\text{grad}}$, $q = 60°$.

În cazul în care, în decursul ciclului considerat, valoarea curentului variază, se disting trei situații :

1. Durata ciclului de variație este mică în raport cu constanta de timp de încălzire a mașinii ;
2. Durata ciclului este mult mai mare decît constanta de timp de încălzire a mașinii ;
3. Durata ciclului este comparabilă cu constanta de timp de încălzire a mașinii.

În primul caz, uzura se calculează cu media pierderilor

$$I_{*\,\text{med}}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T I_*^2\,dt.$$

În al doilea caz, uzura relativă într-un timp mai îndelungat se determină ca media uzurilor corespunzătoare diferitelor pierderi din cursul ciclului

$$\delta_{*\,\text{med}} = \frac{1}{T}\int_0^T \delta_*(t)\,dt.$$

În ultimul caz, problema nu este rezolvabilă decît dacă se cunoaște ecuația diferențială de încălzire a mașinii, care după integrare, în funcție de legea de variație a curentului, ne dă legea de variație a temperaturii

$$Q = f(I_*^2, t),$$

iar uzura relativă medie pe o perioadă va fi

$$\delta_{*\,\text{med}} = \frac{1}{T}\int_0^T e^{hQ(t)}\,dt.$$

În mod obișnuit, cel mai adesea se întîlnește prima situație, ciclurile tehnologice avînd durate de ordinul secundelor sau minutelor.

Al doilea caz se întîlnește la evaluarea uzurii pentru o perioadă mai îndelungată, cînd se ține seama de opririle pentru revizii, sărbători, schimbarea profilului tehnologic.

Al treilea caz se întîlnește mai rar și tratarea sa matematică prezintă dificultăți de calcul relativ mari.

Calculul uzurii motorului asincron într-un caz concret decurge astfel : plecînd de la caracteristicile motorului, se calculează factorul d și apoi, cunoscînd diagrama cuplului de sarcină $\mu_* = f(t)$, se deduce diagrama variației curentului motorului $I_*(t)$ — cu ajutorul familiei de curbe din figura 4, care servește apoi la calculul uzurii, cum s-a arătat mai sus.

Un alt caz caracteristic este acela în care se cunoaște, din ridicări experimentale, diagrama de curent a unui ciclu tehnologic pentru o anumită tensiune (fig. 5 *a*) și se cere să se deducă diagramele curentului pentru alte tensiuni la același ciclu tehnologic. Plecînd de la valoarea calculată a parametrului *d* și

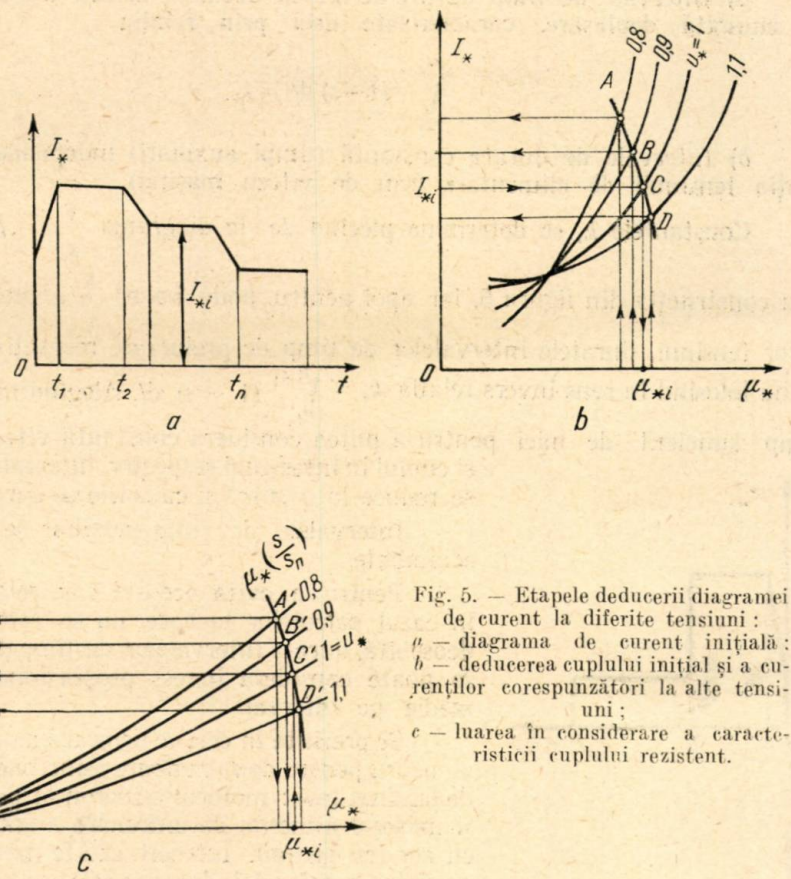


Fig. 5. — Etapele deducerii diagramei de curent la diferite tensiuni :
a — diagrama de curent inițială ;
b — deducerea cuplului inițial și a curenților corespunzători la alte tensiuni ;
c — luarea în considerare a caracteristicii cuplului rezistent.

de la o valoare de curent I_{*_i} (fig. 5 *a*), se găsește în figura 4 punctul de funcționare la ordonata I_{*_i} pe curba $u_* = \text{const.}$ (fig. 5 *b*) (de exemplu punctul *c* în fig. 5 *b* pentru $u_* = 1$), rezultînd valoarea cuplului relativ μ_{*_i}.

Folosind diagrama 1 și caracteristica cuplului rezistent $\mu_* \left(\frac{s}{s_n}\right)$, se determină pentru regimul respectiv caracteristica $\mu_* = f(u_*)$ și $s = f(u_*)$, ca în figura 5 *c* (punctele *A'*, *B'*, *C'*, *D'*).

La abscisele μ_*, intersectate în figura 5 *b* cu curbele $u_* = \text{const.}$, se determină noile puncte de funcționare (punctele *A*, *B*, *D*), cărora le corespund noile valori ale curentului în aceeași poziție a mecanismului acționat.

Menționăm că cele două diagrame din figura 5 (*b* și *c*) se pot combina într-o nomogramă, în două cadrane, ceea ce ușurează calculul grafic.

Pentru determinarea modului cum se dilată sau se contractă diferiții timpi de lucru ai motorului, se împarte ciclul tehnologic în două grupe de intervale de timp :

a) Intervale de timp de prelucrare în decursul cărora trebuie realizată o anumită deplasare, caracterizate deci prin relația

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} (1-s)\,dt = k_i.$$

b) Intervale de durată constantă (timpi auxiliari) independentă de variația tensiunii de alimentare (sau de viteza mașinii).

Constantele k_i se determină plecînd de la diagrama $\frac{s}{s_n} = f(t)$ dedusă din construcția din figura 5, iar apoi pentru noile valori $\frac{s}{s_n}$, corespunzătoare altor tensiuni, duratele intervalelor de timp de prelucrare respective se determină folosind în sens invers relația $k_i = \int_{t_i}^{t_{i+1}} (1 - s)\,dt$. Alegînd intervalele de timp suficient de mici pentru a putea considera constantă viteza, curentul și cuplul în intervalul respectiv, integrala de mai sus se reduce la o sumă și calculele se simplifică mult.

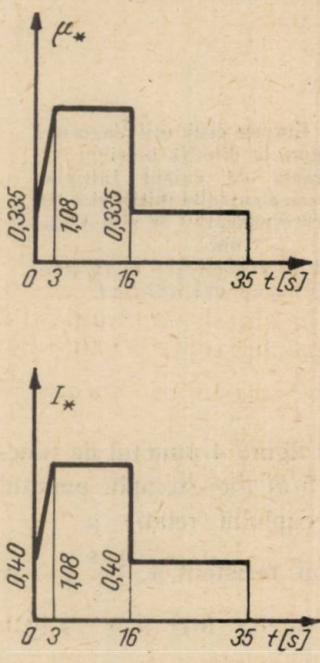


Fig. 6. — Diagrama $I_*(t)$ și $\mu_*(t)$ pentru motorul asincron al perforatorului.

Intervalele de timp auxiliar se mențin neschimbate.

Pentru a evita această cale relativ greoaie, în cazul calculelor la care nu se cere o precizie deosebită, durata intervalelor de timp de prelucrare se poate considera invers proporțională cu viteza medie pe interval.

Se prezintă în cele ce urmează modul de calcul al uzurii pentru două motoare asincrone de la uzina de laminat țevi : motorul asincron al perforatorului și motorul asincron de antrenare a unui compresor cu aer (cu piston). Întrucît aceste motoare au alunecări nominale mici, duratele relative ale diferitelor faze de funcționare se pot considera practic independente de tensiune.

Motorul asincron al perforatorului laminorului are parametrii : 1 500 kW, 6 kV, 190 A, cos $\varphi_n = 0{,}81$, $n = 295$ rot/min.

Se calculează cu $d \cong 0{,}05$.

Diagrama variației curentului perforatorului de-a lungul unui ciclu de funcționare, ridicată experimental, este reprezentată grafic în figura 6, împreună cu variația încărcării în funcție de timp.

Se întocmește tabela 2 în care

Tabela 2

$^{*}u_{*}=1$ / u_{*}	0,40	0,74	1,08	I^{2}_{*m}	δ_{*}
	I^{2}_{*}				
1,1	0,145	0,475	0,975	0,484	0,0657
1,0	0,16	0,548	1,166	0,558	0,0970
0,9	0,175	0,67	1,41	0,678	0,183
0,8	0,195	0,825	1,75		
μ_{*}	0,335	0,73	1,08		

δ_{*} — $1<0$, daunele rezultă negative și nu se iau în considerație.

Motorul asincron de antrenare a compresorului de aer are parametrii: 456 kW, 6 kV, $n = 210$ rot/min. Motorul funcționează în sarcină $I_{*} = 0,97 =$ = const. Se calculează cu $d = 0,1$, $a = 10\,000$ de lei/an, $t_{*} = 1$.

Tabela 3

μ_{*}	I^{2}_{*}	δ_{*}	lei/an
1,1	0,815	0,377	−6 230
1,0	0,94	0,917	− 830
0,9	1,115	1,83	8 300
0,8	1,365	6,87	58 700
μ_{*}	0,965		

În cazul motoarelor asincrone neîncărcate la valoarea nominală, uzurile sînt mai mici decît cele nominale ($\delta_{*} = 1$). După cum se precizează în literatură [4], abia la încărcări $\mu_{*} > 0,85$ se obțin, pentru $\mu_{*} < 1$, valori ale uzurii relative $\delta_{*} > 1$. În cazul uzurilor $\delta_{*} < 1$, ar rezulta lungiri ale vieții utilajelor, respectiv „economii" în loc de daune. Însă viața utilajului poate fi influențată numai în sensul scurtării ei — amortizarea mașinii curge tot cu cota $a_j = \frac{I_j}{T_j}$ (investiția împărțită la durata de timp în care se uzează la parametrii nominali) —, deci nu se iau în considerație uzurile relative subunitare.

Pentru cabluri, uzura relativă s-a calculat cu relația

$$\delta_{*} = e^{hq\left[\left(\frac{I}{I_{adm}}\right)^{2}-1\right]}$$

în care I_{adm} se ia din literatură (în funcție de locul și modul de pozare a cablului respectiv), iar I rezultă conform repartiției de curenți din schema de alimentare electrică.

Pentru a calcula uzura transformatoarelor trebuie determinate caracteristicile sarcinii consumatorului :

$$\frac{\frac{P-P_n}{P_n}}{\frac{U-U_n}{U_n}} \text{ și } \frac{\frac{Q-Q_n}{Q_n}}{\frac{U-U_n}{U_n}},$$ uzura rezultînd din tabelele calculate în [2].

Pentru lămpile cu incandescență se consideră $\delta_* = u^{14}$, conform [2], și daunele se calculează cu relația $at_* (\delta_* - 1)$.

Pentru puterea instalată de 500 kW în lămpi de 200 — 300 W la o durată medie de viață de 2 000 h, rezultă

$$a = \frac{65 \text{ lei/kW} \times 500 \text{ kW}}{2\,000 \text{ h}} = 16{,}25 \text{ lei/h} = 140\,500 \text{ de lei/an}.$$

Tabela 4

μ_*	δ_*	lei/an	lei/an corectat
1,1	3,75	225 000	225 000
1,0	1,0	0	0
0,9	0,227	— 63 500	0
0,8	0,0436	— 78 500	0

Întrucît la $u_* < 1$ lămpile luminează nesatisfăcător, nu se poate lua în considerație „economia" care rezultă din calcule, fapt pentru care aceste economii nu se iau în considerație și astfel se obține coloana de daune corectată.

Însumînd, pentru fiecare valoare a tensiunii, daunele datorite uzurii suplimentare a utilajelor, interpretate după cum s-a arătat mai sus, se poate trasa curba $d_\delta (u_*)$.

3. CONSUMURI SUPLIMENTARE

Pentru evaluarea variației consumurilor suplimentare de energie cu variația tensiunii nu se pot da scheme de calcul generale, deoarece acestea depind foarte mult de particularitățile procesului tehnologic, de sistemul de organizare a producției, de ponderea diferiților agenți energetici, de gradul mecanizării și automatizării etc.

Pentru cazul particular al întreprinderii studiate s-a folosit relația

$$d_s(u) = \Sigma c_s(u)\, w_s = \frac{\Delta p_*(u)}{1 - \Delta p_*(u)}\, w_s,$$

unde w_s este costul consumului orar de energie, $d_s(u)$ fiind reprezentată în figura 7.

4. EFECTUL ECONOMIC AL VARIAȚIILOR DE TENSIUNE

După cum s-a indicat în [1], daunele în unitatea de timp corespunzătoare menținerii unei anumite valori a tensiunii $u_* > u_{*cp}$ sînt

$$d(u_*) = \Sigma_i d_i(u_*),$$

unde indicele i se referă la componentele daunelor examinate mai sus.

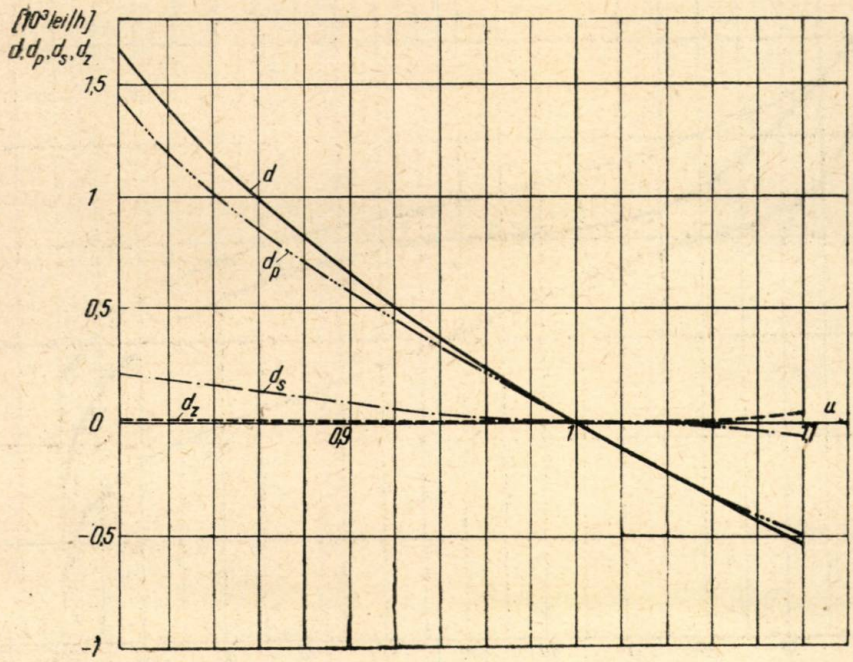


Fig. 7. — Componentele $d_p(u)$, $d_z(u)$, $d_s(u)$ și dauna totală $d(u)$ pentru procesul de laminare.

Cunoscînd curba variației daunelor în unitatea de timp în funcție de tensiune, $d(u)$, și notînd $u_*(\tau_*)$ curba clasată a tensiunilor în raport cu durata relativă, dauna pe perioada τ_* se determină prin integrala

$$D = \int_0^{\tau} d\,[u_*(d\tau_*)]\,\mathrm{d}\tau_*.$$

În cazul concret studiat al unei uzine de laminat țevi, pentru care calculul componentelor $d_i(u_*)$ este urmărit în paralel cu problemele generale la punctele 1, 2, 3 și în figura 7, se prezintă variația componentelor și dauna totală pe unitatea de timp în funcție de variațiile tensiunii. Se observă că ponderea cea mai mare revine componentei care rezultă din variația producției ca urmare a variațiilor de tensiune. Urmează, în ordinea descrescătoare a mărimii, componenta rezultată din consumurile suplimentare. Ponderea neînsemnată

a daunei provocate de uzurile utilajelor se explică prin slaba încărcare a acestora, prin supradimensionarea lor.

Pentru întreprinderea analizată s-au studiat parametrii alimentării cu energie electrică pentru trei perioade distincte, caracteristice (avînd durata

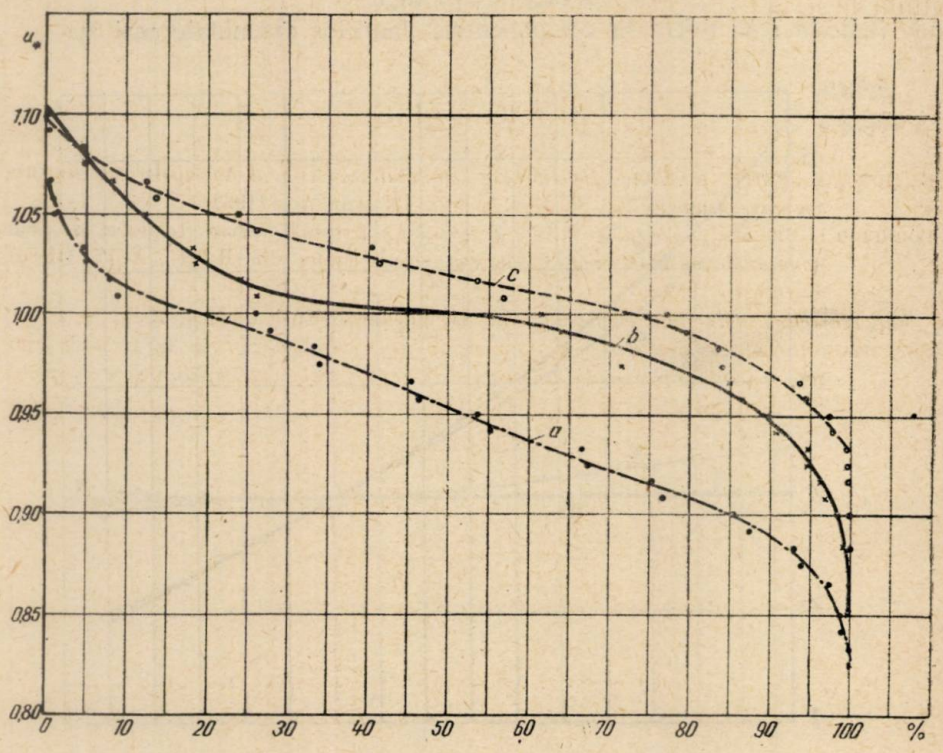


Fig. 8. — Curbe clasate ale tensiunii pentru trei perioade (a, b și c).

o lună fiecare). Prima perioadă (a) se caracterizează printr-un nivel al tensiunilor mai scăzut ($\bar{u}_* = 95{,}4\%$) și prin diferențe foarte mari de tensiune în cursul aceleiași zile (15 — 25%). Cea de-a doua perioadă luată în considerare (b) prezintă o situație a nivelului tensiunii îmbunătățită față de cazul (a) ($\bar{u}_* = 99{,}9\%$). În sfîrșit, regimul (c) prezintă tensiuni mult mai ridicate, în 75% din timp funcționîndu-se la $u_* > 1$.

În urma prelucrării laborioase a înregistrărilor de tensiune efectuate în aceste trei perioade de timp, s-au obținut curbele clasate ale tensiunii pentru perioadele respective. Acestea au fost reprezentate grafic în figura 8.

Pentru facilitarea obținerii curbelor clasate se poate instala pe durata perioadei de studiu τ, la intrarea fiderilor în întreprindere, un aparat special care ridică direct curba clasată a tensiunilor pentru perioada respectivă.

Pentru regimurile de tensiuni prezentate s-au obținut următoarele valori ale daunelor lunare : pentru regimul a 245 000 de lei, pentru regimul b 20 400

de lei, pentru regimul c 58 400 de lei. Ultima valoare a rezultat negativă, deoarece tensiunile au fost foarte mari și productivitatea, care în cazul întreprinderii studiate dictează mărimea daunei orare $d(u_*)$, crește la $u_* > 1$. Componenta $d_3(u_*)$, singura care are valori pozitive și pentru $u_* > 1$, are în cazul întreprinderii analizate valori prea mici pentru a contracara creșterea productivității la $u_* > 1$.

Primit la redacție la 10 februarie 1964.

BIBLIOGRAFIE

1. C. Gutu, M. Petcu, A. Soci, *Determinarea efectului economic al variațiilor de tensiune asupra consumatorilor*. St. cerc. energ., **13**, seria A, *4* (1963).
2. Corneliu I. Penescu, *Efectul variațiilor de tensiune și frecvență asupra regimului de funcționare al consumatorilor*. Conferința electricienilor din R.P.R., ASIT, OPED, București, 1957.
3. . * . *Manualul inginerului electrician*, vol. II. București, Edit. tehnică, 1954.
4. Sebastian Ionescu, *Caracteristici de funcționare ale motorului asincron la tensiuni aplicate variabile și frecvență constantă pentru anumite valori ale cuplului electromagnetic*. St. cerc. energ., **9**, *2*, 337–347 (1959).

EVOLUȚIA CONSUMULUI DE ENERGIE ÎN GOSPODĂRIILE CASNICE

DE

VICTOR CARACUDOVICI și CSABA NAGY

621.311.154 : 643.336

1. CONSIDERAȚII PRELIMINARE

În lucrările executate de Institutul de energetică, prin consum de energie pentru utilizările casnice sau consum casnic de energie s-a înțeles, spre deosebire de unele materiale publicate în acest domeniu, numai consumul de energie care se efectuează în interiorul gospodăriilor casnice pentru activitățile lor curente și pentru asigurarea condițiilor de locuit. În felul acesta nu se includ în consumul casnic cantitățile de energie destinate transportului cu automobile particulare, cele destinate cultivării terenurilor agricole și prelucrări primare a produselor agricole în gospodăriile din mediul rural, cele destinate pentru asigurarea gospodăriilor cu apă potabilă, căldură, radioficare etc., care au fost considerate ca aparținînd de alte sectoare de consum ; se include însă consumul de energie pentru utilizările comune din blocurile de locuit, pentru ascensoare, hidrofoare, centrale termice de bloc, iluminat etc., care aparține de fapt gospodăriilor casnice, fiind administrate de către locatari.

Drept forme și purtători de energie pentru alimentarea gospodăriilor casnice au fost considerate :

- energia electrică preluată din sistemul electroenergetic;
- aburul și apa caldă din rețelele de termoficare;
- combustibili gazoși, lichizi și solizi destinați consumului casnic și distribuiți prin fondul pieței (gaze naturale, gaze lichefiate, petrol lampant, combustibil de calorifer, cărbuni și lemne de foc).

Nu au fost deci considerate deșeurile combustibile provenite din agricultură și din exploatările forestiere sau alte materiale combustibile provenite din resursele interne ale gospodăriilor care nu sînt evidențiate în statisticile

St. cerc. energ. electr. Tom. 14 Nr. 2 p.273 — 282 București 1964

privind desfacerea mărfurilor către populație, energia apei sub presiune, care în cadrul gospodăriilor casnice nu are o utilizare energetică, energia din pilele electrice sau din bateriile de acumulatori etc.

Pentru analiză, consumul de energie pentru gospodăriile casnice a fost clasificat atît după utilizările casnice în scopul cărora s-a consumat energia, cît și după formele și purtătorii de energie care au fost luați în considerare.

În ceea ce privește clasificarea în raport cu utilizările casnice, s-a căutat să se scoată în evidență acele utilizări care conduc la un consum mai important de energie (încălzirea locuinței, încălzirea apei pentru scopuri menajere, prepararea hranei, iluminat, recepție radio, televiziune, producerea frigului necesar păstrării alimentelor, spălatul și călcatul rufelor și aspirator de praf) și să se grupeze cele cu un consum mic de energie în cîteva categorii : mici aparate de forță motrică utilizate în gospodării (ventilatoare, mașini de cusut, mașini pentru bucătării etc.) și aparate mai mari de consum pentru forța motrică de utilitate comună în blocurile de locuit.

2. METODE FOLOSITE PENTRU DETERMINAREA EVOLUȚIEI NECESITĂȚILOR DE ENERGIE ÎN GOSPODĂRIILE CASNICE

Determinarea modului probabil în care va evolua consumul de energie pentru ansamblul gospodăriilor casnice din țara noastră s-a făcut prin două metode :

— o metodă analitică, bazată pe determinarea evoluției consumului de energie pentru fiecare utilizare și pe fiecare formă de energie, și

— o metodă globală, bazată pe extrapolarea evoluției consumului de energie pentru sectorul casnic pe o perioadă trecută sau pe corelațiile existente între consumul casnic de energie și indicii economici sintetici care caracterizează nivelul de trai.

Esența metodei analitice folosite a fost expusă într-unul din articolele precedente [1] și nu se consideră necesar să se revină asupra ei decît sub aspectul unor considerații suplimentare legate de aplicarea în practică, considerații care vor face obiectul paragrafului următor.

În ceea ce privește metodele globale, ele fiind în general bazate pe o extrapolare, se admite ipoteza că anumite tendințe care s-au manifestat în trecut se mențin în linii generale și în viitor, atunci cînd condițiile economice și sociale de dezvoltare nu suferă schimbări esențiale. În raport cu metoda analitică, care necesită un volum mare de informații atît asupra perioadelor trecute, cît și asupra celor de perspectivă, metodele globale sînt mai expeditive, necesită un volum mai mic de date inițiale, însă nu permit o analiză detaliată asupra formelor și purtătorilor de energie, care intervin și asupra modului în care este influențat consumul casnic de energie de unii dintre factorii economici și sociali. Ele dau numai posibilitatea să se analizeze statistic datele din trecut și să se aprecieze dezvoltarea în viitor, ținînd seama de unele elemente generale prevăzute pentru viitor și de evoluția consumului casnic de energie în alte țări. Predeterminarea necesarului de energie pe cale globală oferă, în general, o precizie mai scăzută, aceasta fiind în raport direct cu lungimea intervalului de bază considerat, cu numărul și calitatea datelor existente pentru acest interval ;

volumul mare de date mărește probabilitatea ca elementele accidentale care au intervenit în perioada analizată să nu influențeze în mod esențial rezultatele ce se vor obține prin extrapolare și permite eventuala eliminare a perioadelor nesemnificative din intervalul de bază considerat.

Extrapolarea directă a seriilor de timp constă în stabilirea unor funcții care descriu evoluția consumului casnic de energie în perioada analizată și considerarea acestora ca valabile și în viitor. Funcția pe baza căreia se face extrapolarea se precizează cu atît mai bine, cu cît intervalul de bază este mai lung. În practica lucrărilor de acest gen se utilizează următoarele tipuri de funcții : funcția exponențială ($W = W_0 q^t$), polinomul de gradul 1 ($W = c_0 + c_1 t$), polinomul de gradul 2 ($W = c_0 + c_1 t + c_2 t^2$) și curba probabilistică de forma

$$W = a[1 - 10^{-\alpha (t - t_0)^2}]. \qquad (1)$$

Ultima ipoteză s-a admis ținînd seama de faptul că, cel puțin pentru unele dintre utilizările casnice existente într-o perioadă îndepărtată, consumul de energie tinde către o plafonare determinată de limite fiziologice (iluminat, încălzit) sau de atingerea unui nivel de comoditate optimă. Funcția exponențială și polinomul de gradul II sînt valabile în special pentru prognoza consumului casnic de energie electrică, care are o tendință mai rapidă de creștere decît consumul de energie în general, utilizarea energiei electrice în gospodăria casnică mărind mult comoditatea vieții.

Stabilirea unor corelații între consumul casnic de energie și factorii economici care exprimă nivelul de dezvoltare economică și nivelul de trai permite predeterminarea necesarului de energie prin extrapolarea acestor corelații pe baza cunoașterii modului în care urmează să evolueze indicatorii economici sintetici considerați. Drept indici economici sintetici pentru caracterizarea nivelului de trai au fost considerați venitul național, salariul real și indicele producției industriale.

În ceea ce privește caracterul funcției de corelație se ține seama de coeficientul de corelație sau de indicele de corelație și de abaterea standard, elemente care dau în același timp și indicații asupra preciziei prognozei. Pentru corelația dintre consumul casnic de energie și indicii economici sintetici se consideră suficientă analiza funcțiilor reprezentate prin polinoame de gradul 1 și 2, ultimul fiind, în general, valabil pentru corelarea consumului de energie electrică, ca și în cazul precedent.

Prognozele bazate pe corelații între consumul de energie și indicii economici sintetici nu pot fi folosite pentru intervale mai mari de 5 — 10 ani. Independent de lungimea intervalului de bază considerat, de numărul și de calitatea datelor care stau la dispoziție, valorile indicilor economici sintetici nu pot fi obținute pe intervale mai mari, întrucît se stabilesc prin planurile de perspectivă, care, după experiența de pînă acum a societății socialiste, se alcătuiesc pentru perioade de 5 — 7 ani.

Aplicarea acestor metode globale în determinarea evoluției consumului de energie pentru sectorul casnic, pentru situația concretă din țara noastră din etapa actuală, nu a dat rezultate satisfăcătoare bazîndu-se pe o perioadă prea scurtă și pe o evidență incompletă a mărimilor analizate ; s-a putut lua în considerare numai intervalul 1955—1962, pentru care au existat datele necesare.

După cum s-a arătat, precizia rezultatelor crește o dată cu lungimea intervalului de bază și deci ele vor duce la rezultate mai bune în etapele de planificare următoare.

Rezultatele concrete care s-au obținut în etapa actuală s-au bazat în special pe metoda analitică, aceasta conducînd la o precizie mai mare. Cu titlu informativ, au fost analizate și valorile obținute prin extrapolarea dinamicii consumului casnic de energie pe cap de locuitor și prin evaluarea ponderii consumului casnic de energie în consumul total în comparație cu nivelul atins de unele țări dezvoltate din Europa.

3. CONSIDERAȚII LEGATE DE APLICAREA METODEI ANALITICE PENTRU PREDETERMINAREA EVOLUȚIEI CONSUMULUI DE ENERGIE ÎN GOSPODĂRIILE CASNICE

După cum s-a arătat într-un articol precedent [1], aplicarea metodei analitice pentru predeterminarea consumului de energie în sectorul casnic, pe baza studierii consumului pentru fiecare utilizare casnică și pentru fiecare formă sau purtător de energie, este legată de cunoașterea evoluției în timp a trei categorii de mărimi:

– mărimi generale, care nu depind nici de utilizarea casnică respectivă, nici de forma de energie care vine în considerare;

– mărimi care depind de utilizarea casnică respectivă, dar sînt independente din punctul de vedere al formei de energie;

– mărimi care depind atît de utilizarea casnică considerată, cît și de forma de energie întrebuințată, dintre care se evidențiază separat consumurile specifice de energie pentru fiecare utilizare și formă de energie considerată.

În cele din urmă se vor analiza fiecare dintre aceste categorii, prezentîndu-se elementele care au servit la stabilirea evoluției mărimilor respective în timp.

Drept mărimi generale au fost considerate acelea care determină consumul de energie pe ansamblul sectorului casnic, independent de faptul că se ia în considerare numai o singură utilizare sau toate utilizările la un loc, numai o singură formă de energie sau toate formele și purtătorii de energie folosiți în gospodăriile casnice. Pe baza unei analize detaliate asupra fiecăreia dintre utilizările casnice, s-a stabilit că pe ansamblul sectorului casnic consumul de energie depinde în principal de numărul de locuitori încadrați în gospodăriile casnice (N'), de suprafața totală a locuințelor (S) și de numărul gospodăriilor casnice (G).

Evoluția numărului de locuitori încadrați în gospodăriile casnice s-a determinat pe baza evoluției populației totale (N) și a cotei din această populație care, locuind în așezăminte social-culturale, nu se încadrează în gospodăriile casnice. Pentru evoluția populației s-a admis un spor natural constant ($\alpha\%$), determinat din analiza statisticilor demografice pentru intervalul 1930 – 1960, din care s-a eliminat perioada celui de-al doilea război mondial și cea imediat următoare, considerate ca nesemnificative. În acest fel, populația într-un an oarecare t s-a determinat, față de anul de bază t_0, cu relația

$$N_t = N_{t_0}\left(1 + \frac{\alpha}{1\,000}\right)^t. \qquad (2)$$

Cota din populație care beneficiază de așezămintele social-culturale la un moment dat a fost determinată, pentru verificare, în două moduri :

– pe baza statisticilor referitoare la categoriile de persoane neîncadrate în gospodării casnice (azile, cămine, spitale etc.) și

– pe baza statisticii referitoare la situația gospodăriilor casnice, statistică efectuată cu ocazia recensămintelor.

În ceea ce privește evoluția acestei cote, s-a admis, pe baza unei analize atente a datelor statistice privind așăzămintele social-culturale, a tendințelor manifestate în această direcție de societatea socialistă și a prevederilor din documentele de partid și de stat, o creștere liniară a coeficientului k, $\left(k = \frac{N'}{N}\right)$.

Față de numărul de gospodării rezultat cu ocazia recensămintelor, analizînd tendința manifestată în variația numărului de persoane pe gospodărie pînă în prezent și ținînd seama de efectul trecerii unei cote din ce în ce mai mari a populației din cadrul gospodăriilor casnice în cadrul așăzămintelor social-culturale și de alți factori sociali, s-a admis pentru numărul mediu de locuitori încadrați într-o gospodărie casnică (N') o ușoară tendință de scădere, reprezentată aproximativ tot sub forma unei variații liniare. Cunoscînd modul în care evoluează numărul total de locuitori, coeficientul k și numărul mediu de locuitori pe gospodărie (N'), s-a determinat evoluția populației încadrate în gospodării și a numărului de gospodării casnice, elemente care au intervenit direct în determinarea consumului casnic de energie.

Întrucît pentru unele utilizări casnice, consumul de energie diferă mult de la mediul urban la cel rural, a fost necesar să se determine și evoluția structurii populației pe cele două medii. Analizînd evoluția structurii populației în ultimii ani și considerînd că tendința de a se șterge treptat deosebirile esențiale dintre sat și oraș, manifestată în construcția societății, va grăbi creșterea ponderii mediului urban (p_u) față de ansamblu în ipoteza triplării ritmului de creștere a ponderii mediului urban în următorii 20 de ani față de situația actuală, ipoteză stabilită prin comparație cu celelalte state socialiste, schimbarea structurii populației s-a determinat cu relația

$$p_u(\%) = \frac{N_u}{N} 100 = p_{u_{1960}} \prod_{t=1}^{n} \left(1 + \frac{0{,}9380 + 0{,}1655\, t}{100}\right) \qquad (3)$$

pentru anul 1960, considerat ca an de bază, în care N_u este numărul populației urbane.

În ceea ce privește evoluția fondului de locuințe s-a admis ipoteza variației suprafeței specifice pe cap de locuitor după o curbă probabilistică de tipul (1), ținînd seama de tendința de plafonare care se va manifesta probabil o dată cu satisfacerea necesităților de locuințe și cu asigurarea gradului de confort. Admițînd ca asimptotă valoarea de 20 m²/loc. și ținînd seama de situația actuală a locuințelor atît în mediul urban, cît și în mediul rural, de scăderea aproximativă a fondului de locuințe prin uzura fizică a construcțiilor și prin demolările impuse de sistematizarea localităților, precum și de prevederile Directivelor Congresului al III-lea al P.M.R. pentru dezvoltarea fondului de locuințe, s-au putut determina coeficienții curbei probabilistice care s-a admis

pentru evoluția suprafeței specifice pe cap de locuitor și cu care s-a determinat apoi evoluția fondului total de locuințe.

Dintre mărimile care nu depind decît de utilizarea casnică au fost considerate numai acelea care se referă la gradul de răspîndire al unei anumite utilizări sau al unei anumite categorii de aparate care satisfac o anumită folosință casnică, prezentate sub forma unor coeficienți care exprimă raportul dintre populația sau numărul de gospodării care beneficiază de o anumită utilizare casnică a energiei și populația totală încadrată în gospodăriile casnice, respectiv numărul total de gospodării $k_i = \frac{N_i}{N} = \frac{G_i}{G}$.

Pentru a se determina mărimea coeficientului k_i și evoluția acestuia în timp, a fost deci necesar să se analizeze în detaliu, pentru fiecare utilizare în parte, categoriile de persoane sau de gospodării care beneficiază de utilizarea respectivă, ținîndu-se seama de situațiile concrete în fiecare etapă și de influența factorilor economici și sociali care le determină, sau, cînd a fost posibil, să se analizeze direct gradul de răspîndire al unei anumite categorii de aparate care corespund la o anumită utilizare casnică, de exemplu televizor, frigider etc. În aprecierea evoluției acestor mărimi s-a căutat să se utilizeze funcții exprimate analitic, ceea ce a ușurat mult efectuarea calculelor. Astfel, de exemplu, pentru determinarea răspîndirii unei anumite categorii de aparate (aparate de radio, televizoare, frigidere, mașini de spălat rufe, aspiratoare de praf etc.) s-au utilizat tot curbele probabilistice de forma (1), ținînd seama de caracterul lor de răspîndire și de tendința de plafonare manifestată o dată cu saturarea gospodăriilor cu aparate de acest gen.

De remarcat că, neexistînd date directe asupra răspîndirii anumitor categorii de aparate de uz casnic, date care pot fi procurate numai din anchete organizate special pentru acest scop, s-au utilizat datele referitoare la desfacerea mărfurilor sau alte surse indirecte de date ; cu această ocazie s-a subliniat importanța și necesitatea organizării unei anchete pentru precizarea elementelor de care are nevoie aplicarea unei metode analitice pentru predeterminarea necesarului de energie în sectorul casnic.

În ceea ce privește mărimile care depind și de utilizarea casnică considerată, și de forma de energie cu care se satisface aceasta, s-au analizat coeficienții de structură, care reprezintă raportul dintre numărul de locuitori sau de gospodării ce folosesc pentru o utilizare anumită (i) o formă sau un purtător de energie (j) și numărul total de locuitori încadrați în gospodăriile casnice, respectiv numărul total de gospodării care beneficiază de utilizarea respectivă $k_{ij} = \frac{N_{ij}}{N_i} = \frac{G_{ij}}{G_i}$. Pentru stabilirea acestor coeficienți s-a plecat de la analiza structurii consumului casnic total, structură rezultată din bilanțul energetic general cu cîteva precizări suplimentare introduse de unele date furnizate de o anchetă sumară organizată de Institutul de studii și proiectări energetice în 1962. Evoluția acestor mărimi s-a bazat pe o serie de calcule tehnice-economice în care s-au comparat diferitele variante de alimentare cu forme și purtători de energie a utilizărilor casnice principale și a aparatelor casnice care vin în considerare, precum și pe liniile directoare de politică energetică

rezultate din Documentele Congresului al III-lea al P.M.R. și din cercetările întreprinse pînă acum în domeniul bilanțului energetic de perspectivă.

Consumurile specifice de energie pe cap de locuitor sau pe gospodărie medie pentru fiecare utilizare în parte s-au determinat pe baza unor experimentări efectuate de către laboratorul specializat al Direcției generale pentru metrologie, standarde și invenții, pe bază de calcule cu formule aproximative și pe baza indicațiilor din literatura de specialitate sau din anchetele sumare organizate în acest scop. De remarcat că pentru acele utilizări casnice la care au venit în considerare mai multe forme sau purtători de energie s-a determinat consumul specific de energie utilă necesară gospodăriilor casnice, pe baza căruia, considerînd randamentele medii ale diferitelor instalații funcționînd cu diferiți combustibili, s-au determinat și consumurile specifice de energie utilizată în gospodăriile casnice.

În precizarea evoluției acestor mărimi s-a ținut seama, în măsura posibilităților, de evoluția tehnicii în acest domeniu și de schimbările care au loc în structura vieții sociale.

4. REZULTATE OBȚINUTE

După cum s-a arătat mai sus, rezultatele ce se vor prezenta se bazează numai pe aplicarea metodei analitice, metodele globale neputînd da în etapa actuală rezultate satisfăcătoare.

Pornind de la considerațiile și ipotezele admise, prezentate la punctul 3, s-a obținut pentru anul 1980 valorile înscrise în tabela 1.

Consumul total de energie pentru sectorul casnic va manifesta față de situația actuală o creștere de peste 3 ori, structura acestuia suferind schimbări esențiale (tabela 2) în sensul creșterii ponderii cu care intervin cărbunii, gazele naturale, energia electrică și termoficarea și scăderea ponderii lemnelor de foc, petrolului și gazelor lichefiate. Schimbări mari intervin și în structura consumului total pe utilizări casnice (tabela 3), energia folosită pentru încălzitul locuințelor și iluminat urmînd a avea o pondere din ce în ce mai mică o dată cu creșterea masivă a consumului de energie pentru celelalte utilizări casnice, sau în structura consumului de energie electrică, unde se observă mai pregnant creșterea ponderii unor utilizări noi, care sînt o reflectare a ridicării nivelului de trai.

5. CONCLUZII

Modul în care au fost organizate lucrările pentru studiul perspectivelor consumului casnic de energie permite :

— în primul rînd, furnizarea de date de bază pentru lucrările de întocmire a bilanțurilor energetice de perspectivă, prin aceea că s-au analizat și consumurile utile de energie necesare sectorului gospodăriilor casnice, urmînd ca struc-

Tabela 1

Consumul casnic de energie predeterminat pentru anul 1980

Forma sau purtătorul de energie / Utilizarea casnică	Cărbuni	Lemne de foc	Petrol lampant	Combustibil de calorifer	Gaze naturale 10^6 Nm^3	Gaze lichefiate 10^3 tone	Căldură din termoficare 10^3 kcal	Energie electrică 10^6 kWh
	10^3 tone							
Iluminat	—	—	22,9	—	—	—	—	1 966,8
Radio	—	—	—	—	—	—	—	233,2
Televiziune	—	—	—	—	—	—	—	626,1
Încălzire locuințe	3 838,8	2 805,0	109,2	149,5	2 634,2	—	4 880,0	449,9
Încălzire apă	699,0	600,9	75,5	65,6	1 019,5	28,2	2 005,4	647,5
Prepararea hranei	290,7	183,4	97,9	—	440,8	113,0	—	998,5
Frig	—	—	—	—	—	—	—	727,1
Spălatul rufelor	—	—	—	—	—	—	—	511,0
Călcatul rufelor	—	—	—	—	—	—	—	582,8
Aspirator	—	—	—	—	—	—	—	102,3
Mici aparate forță motrică	—	—	—	—	—	—	—	206,3
Mici aparate de încălzit	—	—	—	—	—	—	—	196,2
Forță motrică comună (bloc)	—	—	—	—	—	—	—	312,2
Total : unități naturale	4 828,5	3 589,3	305,5	215,1	4 094,5	141,2	6 885,4	7 559,9
Total : 10^9 kcal	16 900	8 973	3 116	2 194	36 851	1 440	6 885	6 502
Putere calorifică (kcal/unități naturale)	3 500	2 500	10 200	10 200	9 000	10 200	—	—

Tabela 2

Schimbarea structurii consumului casnic de energie pe forme și purtători de energie în anul 1980 față de anul 1960

Perioada considerată	Forma sau purtătorul de energie	Cărbuni	Lemne de foc	Petrol lampant	Combustibil de calorifer	Gaze naturale	Gaze lichefiate	Căldură din termoficare	Energie electrică
Anul 1960	%	6,6	39,3	9,2	1,9	37,4	3,4	0,5	1,7
Anul 1980	%	20,4	10,9	3,5	2,7	44,6	1,7	8,3	7,9

Tabela 3

Schimbarea structurii consumului casnic de energie pe utilizări casnice în anul 1980 față de 1960

Perioada considerată / Utilizarea casnică		Iluminat	Radio și televiziune	Încălzit locuință	Încălzit apă	Preparare hrană	Frigider	Spălat și călcat rufe	Mici aparate de forță motrică	Mici aparate de încălzit	Forța motrică comună (bloc)
Consum total de energie	Anul 1960 %	4,13	0,40	69,73	5,74	19,58	0,06	0,30	0,00	0,02	0,04
	Anul 1980 %	2,32	0,89	62,84	21,02	10,20	0,75	1,13	0,32	0,20	0,33
Consum de energie electrică	Anul 1960 %	50,9	23,8	0,0	0,0	0,0	3,5	17,6	0,5	1,2	2,5
	Anul 1980 %	26,0	11,4	6,0	8,6	13,1	9,6	14,4	4,1	2,6	4,2

tura acestui consum să fie rezolvată o dată cu structura întregului bilanț în calculele de optimizare ;

– în al doilea rînd, utilizarea imediată a rezultatelor obținute în lucrările de planificare ce se întocmesc pentru acest domeniu sau pentru domeniile conexe, prin faptul că s-a analizat, la nivelul cunoștințelor actuale și al directivelor de politică energetică, și structura probabilă a consumului casnic.

Primit la redacție la 1 februarie 1964.

BIBLIOGRAFIE

1. V. CARACUDOVICI, CS. NAGY, *Contribuții asupra metodelor pentru predeterminarea consumului de energie în sectorul casnic.* St. cerc. energ., **13**, 2 A (1963).
2. E. O. STEINGAUS, *Problemele alimentării cu energie în proiectarea orașelor*, București, Edit. energetică de stat, 1954.
3. M. WEISS, V. CARACUDOVICI, *Consumul de energie în gospodăriile casnice pentru radio și televiziune.* St. cerc. energ., **14**, 1 (1964).
4. M. PETCU, CS. NAGY, S. MANEA, *Prognoza necesarului de putere și energie electrică.* St. cerc. energ., **XII**, 3 A (1962).

TEORIA CELOR MAI SIMPLE SCHEME COMPLETE, ECHIVALENTE CU REȚELELE ELECTRICE LINEARE ÎN RAPORT CU O LATURĂ A LOR (I)

DE

ACADEMICIAN REMUS RĂDULEȚ

și

PAUL DIMO

MEMBRU CORESPONDENT AL ACADEMIEI R.P.R.

621.372.6.052.4 : 537.313

1. CELE MAI SIMPLE SCHEME COMPLETE, ECHIVALENTE CU REȚELELE ELECTRICE LINIARE

Orice rețea electrică liniară și conținînd nemodificată o latură a unei rețele electrice original, care în rest este liniară (sau liniarizată), se numește schemă echivalentă a acesteia în raport cu latura considerată dacă, la aceiași parametri ai acesteia, o pun în aceleași stări electrice ca și rețeaua-original. Latura analizată, față de care se consideră schema echivalentă a restului rețelei-original, poate avea caracteristică liniară sau (în unele cazuri) neliniară.

Pentru a fi *utilă* în analiza tuturor serviciilor posibile ale rețelei-original, trebuie ca o schemă echivalentă cu ea în raport cu o latură a ei să rețină în adevărata lor valoare acelea dintre mărimile electrice caracteristice tuturor generatoarelor și acceselor rețelei-original care, putînd varia independent în rețeaua-original, adică fiind de origine externă, determină diferitele stări electromagnetice ale laturii considerate. Cele mai caracteristice mărimi electrice de acest fel sînt fie tensiunile electromotoare ale generatoarelor electrice ale rețelei-original, împreună cu tensiunile electrice aplicate acceselor, fie curenții de scurtcircuit, corespunzători, ai generatoarelor (fie curenții reali debitați de generatoare în rețea, despre care tratează partea a doua a articolului). O schemă echivalentă care reține în adevărata lor valoare toate mărimile uneia din aceste clase de mărimi (sau tot atîtea mărimi ce nu-și corespund una alteia în cele două clase) va fi numită schemă echivalentă *completă*. Altfel, schema va fi numită incompletă. Schemele din teoremele lui Helmholtz-Thévenin și Norton sînt deci incomplete în această accepțiune.

St. cerc. energ. electr. Tom. 14 Nr. 2 p. 283 – 309 București, 1964

Schemele echivalente complete care reţin în adevărata lor valoare tensiunile electromotoare ale generatoarelor reţelei-original vor conţine deci generatoare de tensiune, care pot reţine simplu astfel de tensiuni, iar cele care reţin în adevărata lor valoare curenţii de scurtcircuit ai acestor generatoare vor conţine generatoare de curent, care pot reţine simplu astfel de curenţi.

Pentru a fi şi *eficientă* în analiza diferitelor servicii ale reţelei-original, trebuie ca o schemă echivalentă cu ea în raport cu o latură a ei să fie şi *cît mai simplă*, spre a permite o orientare imediată a specialistului asupra reacţiunilor posibile ale reţelei la schimbarea fie a acelor mărimi electrice independente, fie a parametrilor laturilor, fie chiar şi a structurii reţelei-original. Cele mai simple scheme de legături în raport cu o latură sînt însă cele care conţin legături derivaţie şi serie pe acea latură ale unor generatoare de tensiune, respectiv de curent, singure sau — dacă cere echivalenţa cu reţeaua original — împreună cu numărul minim de laturi pasive lineare, necesare în acest scop.

Ar fi deci eventual posibile patru scheme complete şi echivalente ale unei reţele electrice lineare în raport cu o latură a ei, care sînt şi cele mai simple : două scheme care conţin numai generatoare de tensiune, în paralel, respectiv în serie cu latura analizată, care eventual ar putea reţine în adevărata lor valoare tensiunile electromotoare ale generatoarelor respective din reţeaua-original, şi două scheme care conţin numai generatoare de curent, în paralel, respectiv în serie cu latura analizată, care eventual ar putea reţine în adevărata lor valoare curenţii de scurtciruit ai generatoarelor respective din reţeaua-original (scheme cu tensiuni reale şi curenţi reali se tratează în partea a doua). Analiza care urmează arată că numai două dintre aceste scheme echivalente simple sînt şi complete, şi anume schema derivaţie cu generatoare de tensiune şi schema serie cu generatoare de curent. Ea arată că pentru asigurarea echivalenţei prima schemă are nevoie şi de o latură pasivă în paralel cu generatoarele de tensiune, iar schema a doua are nevoie şi de o latură pasivă în serie cu generatoarele de curent. Se dezvoltă mai jos teoria acestor două scheme complete şi simple, echivalente în raport cu o latură, cu o reţea original lineară, împreună cu calculul parametrilor lor în funcţie de parametrii reţelei-original.

Cele mai simple scheme echivalente complete prezintă interes deosebit pentru două clase disjuncte de reţele original. Reţelele uneia dintre cele două clase prezintă particularitatea că în ele se găseşte un *nod* de reţea în care *concură toate* laturile care au tensiuni electromotoare externe. Sistemele electroenergetice fac parte din această clasă, punctul respectiv fiind neutrul lor, respectiv pămîntul. Reţelele celeilalte dintre cele două clase prezintă particularitatea că în ele se găseşte un *ochi* simplu din reţea (adică un parcurs închis care nu trece de mai multe ori de-a lungul nici uneia dintre laturile pe care le conţine), astfel încît acest ochi conţine *în serie toate* laturile care au tensiuni electromotoare externe.

În cazul unui sistem electroenergetic, latura lui, analizată, poate fi o *fază* a unei sarcini sau a unui generator dintr-un *nod de sistem* sau o *fază* a unei *linii* a sistemului. În serviciile cu simetrie se pot considera schemele echivalente trifazate şi se obţin astfel direct fie analiza unei sarcini trifazate sau a unui generator trifazat dintr-un nod de sistem, fie analiza unei linii trifazate a sistemului. În serviciile cu nesimetrii se poate opera cu schemele în monofazat, de succesiune omopolară, directă şi inversă, obţinîndu-se astfel direct

analiza fie a comportării unei sarcini trifazate sau a unui generator trifazat dintr-un nod de sistem, fie a comportării unei linii trifazate, în privința componentelor simetrice omopolară, directă, respectiv inversă, ale tensiunilor și curenților.

Abia o analiză amănunțită poate arăta măsura în care cele două scheme echivalente simple și complete; respectiv schemele care reții curenții reali și tensiunele reale și vor fi prezentate în partea a doua a lucrării, — sînt adecvate pentru rezolvarea diferitelor probleme.

Se dezvoltă întîi teoria schemei complete derivație, echivalentă cu o rețea electrică original lineară, în raport cu una oarecare dintre *laturile* ei — față de care i se analizează comportarea — și în care toate generatoarele sistemului apar reprezentate în mod primar ca *generatoare de tensiune* legate în paralel pe latura analizată, fiecare dintre aceste generatoare avînd în adevărata ei valoare *tensiunea electromotoare* a generatorului din rețeaua original pe care-l reprezintă, admitanțele lor interioare, în serie pe aceste tensiuni din schemă, fiind în general diferite de admitanțele interioare ale generatoarelor din rețeaua original, însă independente de tensiuni și curenți.

În lucrări anterioare [1], [2] s-a dezvoltat o metodă de analiză adaptată special *sistemelor electroenergetice* lineare sau linearizate și în regim armonic, numită *analiză nodală*, ale cărei baze au fost publicate prima oară în revista „Electrotehnica" (1961 nr. 4, p. 43). În analiza nodală se folosește o schemă echivalentă în raport cu unul dintre *nodurile de sistem* față de care se analizează comportarea acestuia, numită *echivalentul radial independent* (REI) al sistemului. În această schemă, toate generatoarele sistemului apar în mod primar ca generatoare de tensiune legate în derivație pe latura analizată și păstrînd în adevărata lor valoare tensiunile electromotoare ale generatoarelor respective din sistem. Rezultă că echivalentul radial independent folosit pentru a analiza sistemele electroenergetice din numeroase puncte de vedere și cu mari avantaje față de alte metode de analiză este o schemă echivalentă completă de tipul derivație și cu generatoare de tensiune, adaptată cazului special al rețelelor care au un nod în care concură toate laturile cu tensiuni electromotoare externe, iar latura analizată e confundată cu o fază, respectiv cu o sarcină sau un generator, dintr-un nod de sistem, (și cu particularitatea că operează și cu nodurile dintre partea cu tensiune electromotoare și partea cu admitanță a generatoarelor de tensiune din schema echivalentă de tipul derivație). Utilitatea extinderii lucrărilor privitoare la analiza nodală a condus la constituirea teoriei prezente a schemei complete echivalente derivație, iar în cursul acestei cercetări a fost descoperită și schema completă de tipul serie.

Se dezvoltă apoi teoria schemei complete serie, echivalentă cu o rețea electrică original lineară, în raport cu una oarecare dintre *laturile* ei — față de care i se analizează comportarea — și în care toate generatoarele sistemului apar reprezentate în mod primar ca *generatoare de curent* legate *în serie* pe latura analizată, fiecare dintre laturile active ale acestor generatoare debitînd în adevărata ei valoare *curentul de scurtcircuit* al generatorului din rețeaua original pe care-l reprezintă, impedanțele interioare ale acestor generatoare, în derivație pe laturile lor active, fiind diferite de impedanțele interioare ale generatoarelor corespunzătoare din rețeaua original, însă *independente* de tensiuni și curenți.

Teoria celor două scheme — duale una față de cealaltă — va fi urmată de calculul parametrilor lor în funcție de parametrii laturilor rețelei original. Se vor prezenta separat posibilitățile celor două tipuri de scheme, cum și căile de analiză a fenomenelor din sistemele electroenergetice pe baza echivalentului REI, care s-au desprins din practica de pînă acum a lucrărilor efectuate în Republica Populară Romînă pe baza lucrărilor amintite privitoare la analiza nodală.

Teoria celor mai simple scheme echivalente și complete, de tipurile derivație și serie, ale rețelelor electrice poate fi întemeiată pe două teoreme, valabile atît în serviciul armonic permanent, cît și în serviciul liber al rețelelor, și deci și în regimul lor tranzitoriu. Dacă R_i, C_i și L_i sînt rezistența, capacitatea și inductivitatea laturii i a unei rețele care are r laturi, iar L_{ik} este inductivitatea mutuală dintre laturile i și k, mărimile $Z_{ii} = R_i + j\omega L_i + \frac{1}{j\omega C_i}$ și $Z_{ik} = j\omega L_{ik}$, cu $j = \sqrt{-1}$, sînt impedanțele în complex proprii și mutuale privind laturile ei în serviciul armonic permanent și de pulsație ω, iar $Z_{ii}(p) = R_i + pL_i + \frac{1}{pC_i}$ și $Z_{ik}(p) = pL_{ik}$ sînt impedanțele operaționale proprii și mutuale, cu parametrul complex p, privind laturile ei în serviciul liber al rețelei. Tensiunile electromotoare e_i din laturi, tensiunile u_{bi} la bornele acestora și curenții i_i care trec prin laturi au în serviciul armonic permanent imaginile în complex E_i, U_{bi}, respectiv I_i, iar în serviciul liber imaginile Laplace $E_i(p)$, $U_{bi}(p)$, respectv $I_i(p)$. Relațiile deduse fiind valabile atît în serviciile armonice permanente, cît și în cele libere, se va suprima scrierea barelor sub simbolurile în complex, cum și indicarea parametrului complex p în impedanțele operaționale, respectiv în imaginile Laplace ale tensiunilor și curenților și se va opera cu mărimi notate cu Z_{ii}, Z_{ik}, E_i, U_{bi}, I_i etc. fără alte specificări.

2. TEORIA CELEI MAI SIMPLE SCHEME ECHIVALENTE COMPLETE DE TIPUL DERIVAȚIE

Teoria celei mai simple scheme echivalente de tipul derivație poate fi întemeiată pe următoarea teoremă: pentru orice rețea electrică activă, liniară sau linearizată, există o schemă echivalentă cu ea în raport cu o *latură* a sa, analizată, care are următoarea structură: conține un număr de *generatoare de tensiune* egal cu numărul de generatoare din restul rețelei original și avînd fiecare, în adevărata ei valoare, tensiunea electromotoare a generatorului din rețea pe care-l reprezintă, legate toate, împreună cu o latură pasivă, în *paralel* cu latura analizată, admitanța — în complex, respectiv operațională — a fiecărui generator de tensiune (în serie cu partea lui activă) fiind independentă de tensiuni și de curenți și egală cu admitanța de transfer — în complex, respectiv operațională —, în scurtcircuitul laturii analizate, dintre latura rețelei în care se găsește generatorul și latura analizată; latura pasivă are o admitanță egală

cu diferența dintre admitanța echivalentă a rețelei original pasivizate, în raport cu bornele laturii analizate, și suma admitanțelor de transfer din laturile ocupate de părțile active ale generatoarelor de tensiune din schema echivalentă.

În adevăr, conform teoremei lui Helmholtz-Thévenin, o rețea electrică lineară sau linearizată (fig. 1*a*) este echivalentă, în raport cu o latură $q = 1, 2, \ldots, r$ a sa, de imagine Z_{qq} a impedanței și fără impedanțe mutuale cu celelalte laturi, cu un generator de tensiune (fig. 1*b*) care are tensiunea electromotoare E_{0q} egală cu tensiunea care s-ar stabili în rețea la bornele laturii q, dacă aceasta ar fi întreruptă, și o impedanță „interioară" Z_{0q} egală cu impedanța echivalentă a rețelei pasivizate, în raport cu bornele laturii q, presupusă întreruptă. Deci curentul I_q, care trece prin latura q, are expresia următoare, care reprezintă prima formă a teoremei lui Helmholtz-Thévenin

$$I_q = \frac{E_{0q}}{Z_{0q} + Z_{qq}} \; ; \; q = 1,2, \ldots, r. \qquad (1)$$

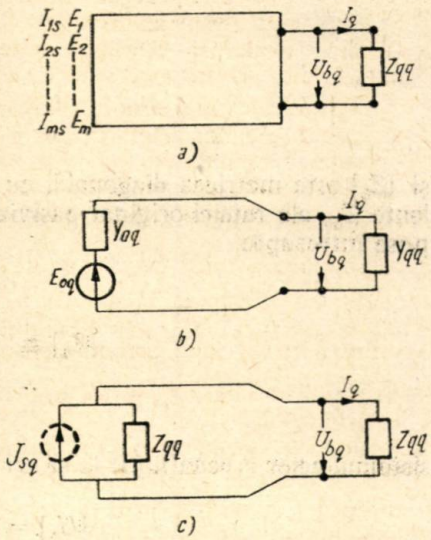


Fig. 1. — Rețea electrică cu o latură de analizat (1*a*), cu generatorul ei echivalent de tensiune (1*b*), respectiv de curent (1*c*).

Fiindcă tensiunea la bornele laturii q are expresia

$$U_{bq} = Z_{qq} I_q \; ; \quad q = 1, 2, \ldots, r, \qquad (2)$$

există și relația următoare, care reprezintă cea de-a doua formă a teoremei lui Helmholtz-Thévenin :

$$U_{bq} = E_{0q} - Z_{0q} I_q \; ; \; q = 1, 2, \ldots, r. \qquad (3)$$

Dacă $[U_b]$ este matricea unicoloană și cu r linii a tensiunilor U_{bq} la bornele laturilor rețelei original

$$[U_b] \equiv \begin{vmatrix} U_{b1} \\ U_{b2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ U_{br} \end{vmatrix}, \qquad (4)$$

dacă $[E_0]$ este matricea unicoloană și cu r linii a tensiunilor E_{0q} care s-ar stabili la bornele diferitelor laturi ale rețelei original dacă ele ar fi întrerupte (în gol)

$$[E_0] \equiv \begin{vmatrix} E_{01} \\ E_{02} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ E_{0r} \end{vmatrix}, \qquad (5)$$

dacă $[I]$ este matricea unicoloană de asemenea cu r linii a curenților I_q care trec prin laturile q ale rețelei

$$[I] \equiv \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ . \\ . \\ I_r \end{bmatrix} \tag{6}$$

și $[Z_0]$ este matricea diagonală, cu r linii și r coloane, a impedanțelor echivalente Z_{0q} ale rețelei-original pasivizate în raport cu bornele laturilor q, presupuse întrerupte

$$[Z_0] \equiv \begin{bmatrix} Z_{01} & Z_{01} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & Z_{02} & & \dots & 0 \\ . & . & & & . \\ . & . & & & . \\ 0 & 0 & \dots & & Z_{0r} \end{bmatrix}, \tag{7}$$

sistemul celor r ecuații (3) ia și următoarea formă matricială :

$$[U_b] = [E_0] - [Z_0]\,[I]. \tag{3a}$$

Curenții J_{sq} care trec prin laturile q presupuse scurtcircuitate au expresiile

$$J_{sq} = \frac{E_{0q}}{Z_{0q}} \; ; \; q = 1,2, \dots, r. \tag{3b}$$

Dacă

$$[J_s] \equiv \begin{bmatrix} J_{s1} \\ J_{s2} \\ . \\ . \\ J_{sr} \end{bmatrix} \tag{8}$$

este matricea unicoloană a curenților J_{sq}, sistemul celor r ecuații (3a) ia și următoarea formă matricială :

$$[E_0] = [Z_0]\,[J_s]. \tag{8a}$$

Din relațiile (3) și (3b) rezultă relația următoare, care reprezintă cea de-a treia formă a teoremei lui Helmholtz-Thévenin, în care Y_{0q} sînt admitanțele corespunzătoare impedanțelor Z_{0q}

$$J_{sq} = I_q + Y_{0q}\,U_{bq} \; ; \; q = 1,2, \dots, r. \tag{9}$$

Dacă $[I]$ este matricea unicoloană și cu r linii a curenților I_q din laturile q, iar

$$[Y_0] \equiv \begin{pmatrix} Y_{01} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & Y_{02} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & Y_{0r} \end{pmatrix} = [Z_0]^{-1} \tag{10}$$

este matricea diagonală a r linii și coloane a admitanțelor Y_{0q}, sistemul celor r ecuații (9) ia și următoarea formă matricială

$$[J_s] = [I] + [Y_0]\,[U_b]. \tag{11}$$

Prima și cea de-a doua formă a teoremei lui Helmholtz-Thévenin reprezintă generatorul echivalent cu rețeaua prin tensiunea sa electromotoare și prin impedanța sa interioară, iar cea de-a treia formă (Norton) prin curentul său de scurtcircuit și prin admitanța sa interioară. Din (9) rezultă că intensitatea I_q a curentului prin latura analizată este egală cu diferența dintre curentul de scurtcircuit J_{sq} prin ea și curentul $Y_{0q}\,U_{bq}$ pe care l-ar absorbi rețeaua pasivizată fără latura q, alimentată cu tensiunea la borne U_{bq} pe la bornele acestei laturi. Din cea de-a treia formă (9) a teoremei lui Helmholtz-Thévenin rezultă că, pentru ca — în raport cu latura analizată — schema completă de tipul derivație, ai cărei parametri îi căutăm, să fie echivalentă cu rețeaua-original, este necesar și suficient ca, în primul rînd, la *orice* valori ale tensiunilor electromotoare generatoarele schemei echivalente să debiteze pe latura analizată și *scurtcircuitată* același curent total J_{sq}, dat de relația (8), ca și rețeaua în aceste condiții, iar în al doilea rînd mai trebuia ca, văzută dinspre bornele laturii analizate și presupusă întreruptă, schema echivalentă pasivizată să aibă aceeași admitanță echivalentă Y_{0q} ca și rețeaua pasivizată și văzută dinspre bornele aceleiași laturi, presupusă întreruptă. Dacă, în exteriorul laturii analizate, rețeaua are m generatoare, prima condiție dă m relații, iar ultima dă o relație suplimentară. Schema echivalentă derivație avînd ca necunoscute, în ramurile în paralel care cuprind generatoarele, numai m admitanțe, acestea nu vor permite să se satisfacă, în afară de cazuri particulare, toate cele $(m + 1)$ relații de condiție care asigură echivalența. De aceea este nevoie și de o latură *pasivă în paralel* cu latura analizată, în afară de cazuri particulare în care aceasta poate lipsi, fiindcă are admitanță nulă.

Considerăm deci rețeaua dată (fig. 2*a*), care în exteriorul laturii de analizat q are m generatoare cu tensiunile electromotoare $E_1, E_2, \dots, E_m$, situate în laturi cărora li se dau numerele de ordine $1, 2, \dots, m$, și fie U_{tq} tensiunea la bornele laturii q în regimul care interesează și I_q curentul ei. Considerăm, de asemenea, cea mai simplă schemă completă de tipul derivație (fig. 2*b*), echivalentă cu rețeaua în raport cu latura q. Ea are $m + 1$ laturi în paralel pe latura q, dintre care m conțin generatoarele de tensiune $E_1, E_2, \dots, E_m$ împreună cu admi-

tanțele lor încă de determinat Y^p_{1q}, Y^p_{2q}, ..., Y^p_{mq}, iar o latură este pasivă și conține o admitanță Y^p_{qq}, de asemenea încă de determinat.

Dacă Y_{tkq} este admitanța de transfer dintre latura k a generatorului E_k al *rețelei-original* din figura 2*a* și latura q presupusă scurtcircuitată, curentul I_{skq}

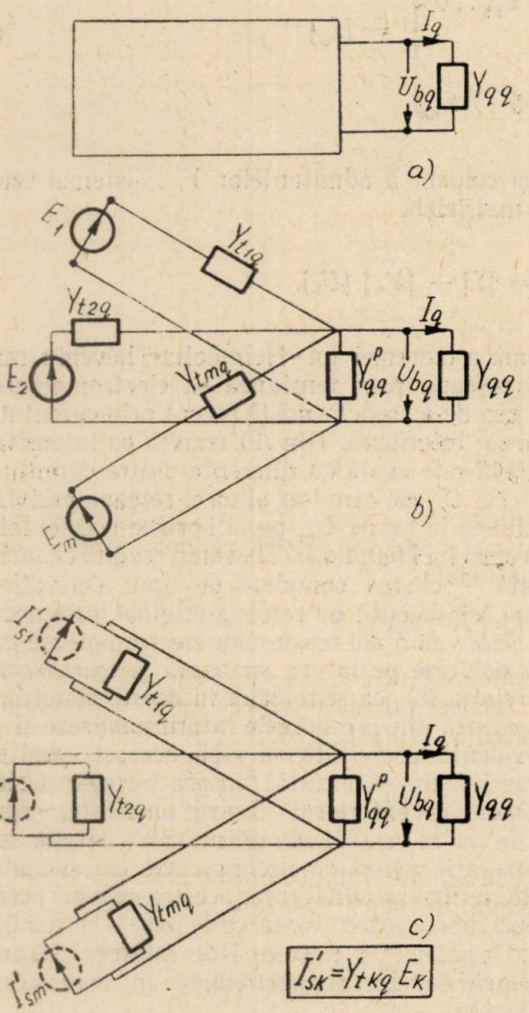


Fig. 2. — Rețea electrică cu o latură de analizat (2*a*) cu schema ei echivalentă completă tip derivație cu generatoare de tensiune (2*b*) și respectiv cu generatoare de curent (2*c*).

care s-ar stabili prin această latură scurtcircuitată dacă ar fi excitat numai generatorul E_k, iar celelalte generatoare ar fi pasivizate, ar avea expresia

$$I_{skq} = Y_{tkq} E_k ; k = 1, 2, \ldots, m ; q = 1,2,\ldots,r. \qquad (12)$$

Deci, aplicînd principiul superpoziției, se deduce următoarea expresie pentru curentul J_{sq} care trece prin latura q, presupusă scurtcircuitată, cînd sînt

excitate toate generatoarele rețelei

$$J_{sq} = \sum_{k=1}^{m} I_{skq} = \sum_{k=1}^{m} Y_{tkq} E_k ; q = 1,2, \ldots, r. \tag{13}$$

Dacă

$$[E] \equiv \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ . \\ . \\ E_r \end{pmatrix} \tag{14}$$

este matricea unicoloană și cu r linii a tensiunilor electromotoare externe ale generatoarelor din cele r laturi ale rețeleioriginal, dintre care numai $(m + 1)$ pot fi diferite de zero, iar

$$[Y_t] \equiv \begin{pmatrix} Y_{t11} & Y_{t12} & \ldots & Y_{t1r} \\ Y_{t21} & Y_{t22} & \ldots & Y_{t2r} \\ . & & & . \\ . & & & . \\ Y_{tr1} & Y_{tr2} & \ldots & Y_{trr} \end{pmatrix} \tag{15}$$

este matricea pătrată a admitanțelor de transfer $Y_{tkq} = Y_{tqk}$ dinspre laturile k spre laturile q presupuse scurtcircuitate ale rețelei, sistemul celor r relații (13) ia și următoarea formă matricială

$$[J_s] = [Y_t]\,[E]. \tag{13a}$$

Curentul J^p_{sq} pe care generatoarele de tensiune excitate ale *schemei echivalente* derivație din figura 2*b* îl stabilesc prin latura q presupusă scurtcircuitată (ceea ce scurtcircuitează și admitanța Y^p_{qq}) este însă

$$J^p_{sq} = \sum_{k=1}^{m} Y^p_{kq} E_k. \tag{13b}$$

Egalînd curenții J_{sq} din (13) cu J^p_{sq} din (13b), se obține următoarea condiție de echivalență a schemei cu rețeaua, în raport cu latura q:

$$\sum_{k=1}^{m} Y_{tkq} E_k = \sum_{k=1}^{m} Y^p_{kq} E_k.$$

Acesta trebuind să fie satisfăcută *oricare* ar fi valorile E_k, rezultă că admitanțele Y^p_{kq} ale generatoarelor de tensiune din schema 2*b*, echivalentă cu rețeaua din 2*a* față de latura q, sînt independente de tensiuni și curenți, cum s-a enunțat în teoremă, și egale cu admitanțele de transfer respective în scurtcircuitul laturii q

$$Y^p_{kq} = Y_{tkq}; \quad k = 1, 2, \ldots, m; \quad q = 1, 2, \ldots, r; \quad k \neq q. \tag{13c}$$

Admitanța echivalentă Y^p_{0q} a *schemei echivalente* din figura 2*b*, presupusă pasivizată și văzută singură, adică fără latura q, dinspre bornele acestei laturi, este

$$Y^p_{0q} = Y^p_{qq} + \sum_{k=1}^{m} Y^p_{kq}\,;\ k \neq q.$$

Dacă Y_{0q} este deci admitanța echivalentă a *rețelei original* din figura 2*a*, presupusă pasivizată și văzută singură, adică fără latura q, dinspre bornele acestei laturi, rezultă deci univoc — din egalarea ei cu admitanța Y^p_{0q} din ultima relație — următoarea expresie, cuprinsă în enunțul teoremei, a admitanței Y^p_{qq} a laturii pasive, legată în schema echivalentă în paralel cu latura q:

$$Y^p_{qq} = Y^p_{0q} - \sum_{k=1}^{m} Y^p_{kq} = Y_{0q} - \sum_{k=1}^{m} Y_{tkq},\ q = 1,\ 2,\ \ldots,\ r, \tag{13d}$$

unde în ultimul membru s-a ținut seamă și de relațiile (13 c). Rezultă că latura pasivă și în paralel cu latura de analizat lipsește din schema echivalentă tip derivație ($Y^p_{qq} = 0$) numai în cazul particular în care

$$Y_{0q} = \sum_{k=1}^{m} Y_{tkq}\,.$$

Această ultimă relație este satisfăcută, de exemplu, în cazul banal în care incidental rețeaua electrică conține numai m generatoare legate în derivație pe latura q analizată, fără a trebui să fie satisfăcută însă în cazul unor rețele mai generale.

Teorema este valabilă și dacă rețeaua original, în locul celor m generatoare, are numai $m' < m$ generatoare, sau nici un generator ($m' = 0$), celelalte pînă la m, adică $m - m'$, *fiind înlocuind cu tot atîta perechi de borne de acces, tensiunile lor putînd fi considerate drept tensiunile electromotoare ale unor generatoare de tensiune de admitanță interioară infinită.* Însăși latura analizată poate fi reprezentată de o pereche de borne de acces ale restului rețelei, care ar fi astfel un multipol activ.

Curenții debitați de diferitele generatoare de tensiune din schema derivație echivalentă — și deci și puterile debitate de ele în această schemă, respectiv pierderile din ea — diferă de curenții și puterile debitate de generatoarele respective în rețeaua original, respectiv de pierderile din aceasta, în diferitele servicii. În schema echivalentă, curenții de scurtcircuit debitați de generatoarele de tensiune, de exemplu, reprezintă doar contribuția sau cota-parte a generatoarelor respective din rețeaua original la curentul din latura analizată în scurtcircuitul ei. În regim armonic, relațiile (13b), care devin identice cu (13) în virtutea relațiilor (13c) și conțin contribuțiile $I_{skq} = Y^p_{kq} E_k = Y_{tkq} E_k$ ale diferitelor generatoare k de tensiune la curentul de scurtcircuit $J^p_{sq} = J_{sq}$ din latura q analizată, admit deci reprezentarea grafică simplă din figura 3, în care se însumează fazorii $I_{skq} = Y_{tkq} E_k$ spre a se obține între extremitățile liniei lor frînte fazorul curentului J_{sq} din latura q presupusă scurtcircuitată.

Elementele variabile independent ale schemei echivalente derivație din figura 2*b*, în raport cu o latură, fiind adevăratele valori ale tensiunilor electro-

motoare ale generatoarelor (sincrone) din rețea, sînt legate direct — la excitație dată — de turațiile rotoarelor acestora.

În funcție de sensurile de referință ale tensiunilor electromotoare din diferitele laturi ale unei rețele electrice și de frecvențe, admitanțele de transfer Y_{tkq} pot avea părțile lor reală și imaginară, pozitive sau negative, iar cînd au parte reală negativă, ele nu sînt realizabile fizic în schema derivație echivalentă. În regim armonic permanent, sensurile de referință ale acestor tensiuni electromotoare se pot alege totdeauna în așa fel, încît admitanțele de transfer Y_{tkq} în raport cu o *anumită* latură q considerată să aibă toate partea reală pozitivă și deci să fie realizabile fizic. Cu sensurile de referință alese în acest fel vor rezulta însă, față de alte laturi q', admitanțe de transfer $Y_{tkq'}$, care pot să nu aibă parte reală pozitivă. În afară de cazuri particulare, schemele echivalente de tipul derivație ale unei rețele electrice în raport cu diferitele ei laturi nu sînt deci realizabile fizic toate deodată și cu păstrarea unui același sistem de sensuri de referință pentru toate tensiunile electromotoare din rețea, nici în regim armonic permanent, fără ca aceasta să micșoreze însă valoarea schemelor pentru calcule sau examinări de structură, ci limitînd doar posibilitatea de reprezentare prin modele fizice.

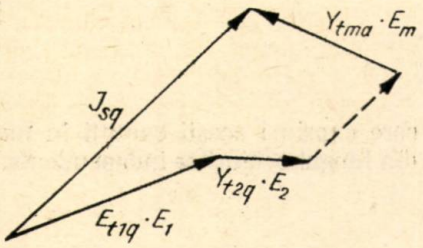


Fig. 3. — Diagrama fazorilor pentru curentul în scurtcircuitul laturii 9.

Înlocuind generatoarele de tensiune din schema echivalentă tip derivație cu generatoarele de curent corespunzătoare, se obține o nouă schemă echivalentă de tipul *derivație* (fig. 2*c*), care are numai *generatoare de curent*. Injecțiile de curent ale ramurilor de curent ale acestor ultime generatoare nu sînt însă curenții de scurtcircuit *reali* ai generatoarelor din rețeaua original la tensiunea electromotoare considerată, ci curenții de scurtcircuit pe care i-ar debita acestea dacă, la acea tensiune electromotoare, ar avea fiecare o admitanță de scurtcircuit egală cu admitanța de transfer dintre latura pe care o ocupă în rețeaua original și latura q analizată. Schema din figura 2*c* nu este deci completă și are o utilitate redusă, fiindcă nu conține caracteristici esențiale ale generatoarelor rețelei original, cum sînt mărimile E_k sau I_{sk}.

2A. CALCULUL ADMITANȚELOR DE TRANSFER ÎN SCURTCIRCUITUL LATURILOR

Folosirea celei mai simple scheme echivalente complete de tipul derivație, care are generatoare de tensiune (fig. 2*b*), este condiționată de posibilitatea calculului efectiv al admitanțelor de transfer Y_{tkq} dintre laturile k și laturile q, presupuse scurtcircuitate, care intervin în relațiile (13b), identice cu (13) în virtutea relațiilor (13c). Expresiile lor pot fi determinate exprimînd atît curentul I_q prin laturile q, cît și tensiunile U_{bq} la bornele lor, în funcție de tensiunile electromotoare E_k ale generatoarelor, introducînd aceste expresii ale mărimilor I_q și U_{bq} în cea de-a treia formă (9) a teoremei lui Helmholtz-Thévenin și identificînd cu expresia (13) relația obținută în acest fel. Exprimarea mărimilor

I_q și U_{bq} în funcție de mărimile E_k se poate efectua fie folosind *teorema curenților ciclici* I'_k, ale celor p ochiuri independente, de matrice unicoloană și cu p linii

$$[I'] \equiv \begin{pmatrix} I'_1 \\ I'_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ I'_p \end{pmatrix} \tag{16}$$

care exprimă acești curenți în funcție de tensiunile electromotoare ciclice $\hat{E}'_i$ din lungul ochiurilor independente, de matrice unicoloană și cu p linii

$$[E'] \equiv \begin{pmatrix} E'_1 \\ E'_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ E'_p \end{pmatrix}, \tag{17}$$

îmbinată cu conexiunea dintre tensiunile electromotoare ciclice și cele din laturi $\hat{E}_k$, cum și cu conexiunea dintre curenții ciclici și cei din laturi I_k, – fie folosind *teorema potențialelor nodurilor de rețea* V_k ale celor $(n-1)$ noduri independente ale rețelei față de nodul n, de matrice unicoloană și cu $(n-1)$ linii

$$[V] = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ V_{n-1} \end{pmatrix}, \tag{18}$$

care exprimă aceste potențiale în funcție de injecțiile J''_{sk} de curenți de scurtcircuit în nodurile independente ale rețelei, de matrice unicoloană și cu $(n-1)$ linii

$$[J''_s] \equiv \begin{pmatrix} J''_{s1} \\ J''_{s2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ J''_{sn-1} \end{pmatrix}, \tag{19}$$

îmbinată cu conexiunea dintre potențialele V ale nodurilor independente și tensiunile U_{bk} la bornele laturilor, cum și cu conexiunea dintre injecțiile de curenți de scurtcircuit în nodurile de rețea și curenții la scurtcircuitul laturilor J_{sj}. Cu ajutorul acestor două teoreme se obțin deci două expresii echivalente ale admitanțelor de transfer dintre laturile generatoarelor (singurele interesante pentru schemele în derivație) și laturile q analizate, presupuse scurtcircuitate.

În calculul admitanțelor de transfer Y_{tkq} între laturile k ale rețelei și latura q, presupusă în scurtcircuit, cu ajutorul teoremei curenților ciclici, se folosesc coeficienții de conexiune C_{ik} ai laturilor $i = 1, 2, \ldots, r$ în ochiuri independente $k = 1, 2, \ldots, p = r-n+s$ ale rețelei, care este presupusă cu r laturi, n noduri de rețea și s subrețele, coeficienți care au valorile $1, -1$ sau 0 după cum latura i face parte din ochiul k cu un sens de referință al ei egal sau contrar cu sensul de referință al ochiului k, respectiv nu face parte din ochiul k. Acești coeficienți, înmulțiți cu tensiunile, respectiv curenții raportați la sensurile de referință din laturi, dau aceste tensiuni, respectiv acești curenți, raportați la sensurile de referință ale diferitelor ochiuri la care se referă. Matricea lor $[C]$, în general dreptunghiulară — și deci în aceste cazuri sigur neinversabilă și având r linii și p coloane, — este

$$[C] \equiv \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \ldots & C_{1p} \\ C_{21} & C_{22} & \ldots & C_{2p} \\ \vdots & & & \\ C_{r1} & C_{r2} & \ldots & C_{rp} \end{pmatrix} \tag{20}$$

și se numește matricea de conexiune a laturilor rețelei în ochiuri independente ale ei.

Cele r relații dintre curenții I_j din laturile j, raportați la sensurile de referință de pe aceste laturi, și curenții ciclici I'_k ai ochiurilor independente k, raportați la sensurile de referință ale acestor ochiuri, se pot pune cu ajutorul coeficienților de conexiune C_{jk} sub forma

$$I_j = \sum_{k=1}^{p} C_{jk} I'_k; \; q = 1, 2, \ldots, r, \tag{21}$$

sistem care ia, cu matricele (6), (20) și (16), și următoarea formă matricială:

$$[I] = [C]\,[I']. \tag{21a}$$

Cele p relații dintre tensiunile electromotoare E'_l ale ochiurilor independente, raportate la sensurile de referință ale acestor ochiuri, și tensiunile electromotoare E_i ale laturilor i ale rețelei, raportate la sensurile de referință de pe aceste laturi, se pot pune cu ajutorul coeficienților de conexiune C_{ik} sub forma

$$E'_l = \sum_{i=1}^{r} C_{il} E_i; \; l = 1, 2, \ldots, p, \tag{22}$$

care ia, cu matricele (17), (20) și (14), și următoarea formă matricială:

$$[E'] = [C]_t\,[E], \tag{22a}$$

în care $[C]_t$ este transpusa matricei $[C]$.

Teorema curenților ciclici, care urmează să fie folosită în calculul mărimilor Y_{tkq}, exprimă cea de-a doua teoremă a lui Kirchhoff pentru ochiurile independente, folosind tensiunile electromotoare ciclice și curenții ciclici, iar această ultimă teoremă se obține din teorema lui Ohm-Joubert pentru laturi,

ținînd seamă de faptul că suma tensiunilor la bornele laturilor oricărui ochi de rețea este nulă, tensiunile la borne fiind diferențe de potențial.

Prima formă a teoremei lui Ohm-Joubert referitoare la laturile i ale unei rețele se exprimă prin următorul sistem de r relații între mărimile E_i, U_{bi} și I_j ale tensiunilor electromotoare e_i din laturi, ale tensiunilor la bornele lor u_{bi} și ale curenților i_j din laturi

$$E_i + U_{bi} = \sum_{j=1}^{r} Z_{ij} I_j; \quad i = 1, 2, \ldots, r. \tag{23}$$

Dacă $[U_b]$ este matricea (4) a tensiunilor la bornele laturilor rețelei original, iar $[Z]$ este matricea pătrată, cu r linii și r coloane și în general nesingulară, a impedanțelor proprii și mutuale ale laturilor rețelei, numită matricea impedanță a laturilor rețelei

$$[Z] \equiv \begin{pmatrix} Z_{11} Z_{12} \ldots Z_{1r} \\ Z_{21} Z_{22} \ldots Z_{2r} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ Z_{r1} Z_{r2} \ldots Z_{rr} \end{pmatrix}, \tag{24}$$

sistemul de r ecuații (23) se poate scrie sub următoarea formă matricială:

$$[U_b] = [Z] \cdot [I] - [E]. \tag{23a}$$

Dacă $\Delta(Z)$ este determinantul ale cărui elemente sînt impedanțele Z_{ik}, repartizate pe liniile i și coloanele k, iar $\Delta_{ij}(Z)$ sînt produsele prin $(-1)^{i+j}$ ale subdeterminanților acestuia, obținuți din el prin suprimarea liniei i și a coloanei j, adică minorii sau cofactorii săi în determinantul $\Delta(Z)$, și dacă se introduc în calcul mărimile $Y_{ji} = Y_{ij}$

$$Y_{ji} = \frac{\Delta_{ij}(Z)}{\Delta(Z)}, \; i = 1, 2, \ldots, r, \tag{25}$$

numite mărimi cu funcția de admitanțe, caracteristice laturilor rețelei, matricea lor pătrată, cu r linii și r coloane și în general inversabilă

$$[Y] \equiv \begin{pmatrix} Y_{11} Y_{12} \ldots Y_{1r} \\ Y_{21} Y_{22} \ldots Y_{2r} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ Y_{r1} Y_{r2} \ldots Y_{rr} \end{pmatrix}, \tag{26}$$

numită și matrice admitanță a rețelei, este inversa matricei impedanță a lor

$$[Y] = [Z]^{-1}. \tag{27}$$

Ecuațiile (23) dau, conform regulii lui Cramer, următoarele r soluții în I_i:

$$I_i = \sum_{j=1}^{r} Y_{ij} (E_j + U_{bj}); \; i = 1,2, \ldots, r, \tag{28}$$

care reprezintă cea de-a doua formă a teoremei lui Ohm-Joubert referitoare la latura i a rețelei.

Cu ajutorul matricelor (6), (26), (14) și (4), sistemul celor r ecuații (28) se poate pune și sub următoarea formă matricială:

$$[I] = [Y]\,[E] + [Y]\,[U_b]. \tag{28a}$$

În relațiile (28), mărimile

$$I_{si} = \sum_{j=1}^{r} Y_{ij} E_j;\ i = 1,2,\ldots,r \tag{29}$$

sînt curenții de matrice

$$[I_s] \equiv \begin{pmatrix} I_{s1} \\ I_{s2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ I_{sr} \end{pmatrix}, \tag{30}$$

curenți care ar trece prin laturile i scurtcircuitate cîte una ale rețelei, și sistemul (29) se poate pune cu ajutorul matricelor (30), (26) și (14) și sub forma matricială

$$[I_s] = [Y]\,[E]. \tag{29a}$$

Mărimile I_{si} permit ca din (28) să se obțină o a treia formă a teoremei lui Ohm-Joubert

$$I_i = I_{si} + \sum_{j=1}^{r} Y_{ij} U_{bj};\ i = 1, 2, \ldots, r, \tag{31}$$

iar sistemul (31) se poate pune, cu ajutorul matricelor (6), (30), (26) și (4), și sub următoarea formă matricială:

$$[I] = [I_s] + [Y]\,.\,[U_b]. \tag{31a}$$

Pentru a exprima faptul că suma tensiunilor la bornele tuturor laturilor unui ochi (independent) este nulă, trebuie să se treacă mai întîi, cu ajutorul coeficienților de conexiune C_{il}, de la sensurile de referință pe laturi la sensurile unice de referință pe aceste ochiuri, ca în relațiile (22). Se obțin astfel pentru ochiurile independente relațiile

$$\sum_{i=1}^{r} C_{il} U_{bi} = 0;\ l = 1,2,\ldots,p, \tag{32}$$

al căror sistem se poate pune, cu ajutorul matricelor (26) și (4), și sub următoarea formă matricială:

$$[C]_t\,[U_b] = [0]. \tag{32a}$$

Ținînd seamă de relația (32), de expresia (22) a tensiunilor electromotoare E'_l pe cele p ochiuri și de prima formă (23) a teoremei lui Ohm-Joubert, se obține următoarea formă sistematică a celei de-a doua teoreme a lui Kirch-

hoff pentru ochiurile (independente) l, în funcție de tensiunile electromotoare ciclice și de curenții ciclici :

$$E'_l = \sum_{i=1}^{r} C_{il} E_i = \sum_{i=1}^{r} C_{il} (E_i + U_{bi}) = \sum_{i=1}^{r} C_{il} \sum_{i=1}^{r} Z_{ij} I_j =$$

$$= \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} \sum_{k=1}^{r} C_{il} Z_{ij} C_{jk} I'_k ; l = 1,2, \ldots, p, \tag{33}$$

sistem care se poate pune și sub următoarea formă matricială :

$$[E'] = [C]_t [E] = [C]_t [E] + [C]_t [U_b] = [C]_t [Z] \cdot [I] = [C]_t [Z] \cdot [C] \cdot [I']. \tag{33a}$$

Dacă se notează cu

$$[Z'] = [C]_t \cdot [Z] \cdot [C] \tag{34}$$

matricea pătrată a celor p^2mărimi $Z'_{lk} = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} C_{il} Z_{ij} C_{jk}$, numite impedanțele proprii ($l = k$) și mutuale ($l \neq k$) ale ochiurilor independente ale rețelei, care este în general inversabilă și dă astfel matricea $[Y']$, ce are elemente cu funcțiunea de admitanțe proprii și mutuale Y'_{lk} ale acestor ochiuri, se obțin prin rezolvarea sistemului (33) următoarele expresii ale curenților ciclici în funcție de tensiunile electromotoare din laturi :

$$I'_i = \sum_{j=1}^{r} \sum_{k=1}^{r} Y'_{ij} C_{kj} E_k ; i = 1, 2, \ldots, p, \tag{35}$$

istem care se poate pune și sub următoarea formă matricială :

$$[I'] = [Y'] \cdot [C]_t [E]. \tag{36}$$

Ținînd seamă și de conexiunea (21a), se obține expresia căutată a matricei curenților prin laturi în funcție de matricea tensiunilor electromotoare din laturi

$$[I'] = [C] \cdot [Y'] \cdot [C]_t [E]. \tag{36}$$

Ținînd seamă de (36), se obține din prima formă matricială (23a) a teoremei lui Ohm-Joubert relația căutată dintre matricea tensiunilor la borne și matricea tensiunilor electromotoare ale laturilor rețelei

$$[U_b] = \{[Z] \cdot [C] \cdot [Y'] \cdot [C]_t - [1]\} [E]. \tag{37}$$

Înlocuind expresiile (36) și (37) în cea de-a treia formă matricială (9) a teoremei lui Helmholtz-Thévenin, se obține relația căutată între matricele mărimilor J_{sq} și E_k

$$[J_s] = \{([1] + [Y_0] \cdot [Z]) \cdot [C] \cdot [Y'] \cdot [C]_t - [Y_0]\} \cdot [E]. \tag{38}$$

Rezultă, prin comparație cu (13a), pentru matricea admitanțelor de transfer în scurtcircuit expresia

$$[Y_t] = ([1] + [Y_0] \cdot [Z]) \cdot [C] \cdot [Y'] \cdot [C]_t - [Y_0], \tag{39}$$

adică pentru admitanțele de transfer în scurtcircuit între laturile k și q expresiile

$$Y_{tkq} = \sum_{i,j=1}^{p} C_{ki}\, Y'_{ij}\, C_{qj} + Y_{0q} \sum_{i,j,l=1}^{p} Z_{ki}\, C_{ij}\, Y'_{jl}\, C_{ql} - Y_{0q}\,;\ k = 1, 2, \ldots, r. \quad (39a)$$

În calculul admitanțelor de transfer în scurtcircuit cu ajutorul teoremei potențialelor nodurilor de rețea se folosesc coeficienții de concurență N_{ik} a laturilor $i = 1, 2, \ldots, r$ în nodurile independente $k = 1, 2, \ldots, n-1$ ale rețelei, coeficienți care au valorile 1, -1 sau 0, după cum latura i concură în nodul k cu un sens de referință îndreptat spre nod, respectiv dinspre nod spre exterior, sau nu concură în nodul k. Acești coeficienți, înmulțiți, cu curenții din laturi raportați la sensurile de referință din ele, dau acești curenți raportați la sensurile de referință dirijate spre diferitele noduri la care se referă. Matricea lor $[N]$, în general dreptunghiulară — și deci în aceste cazuri sigur neinversabilă — și avînd r linii și $n-1$ coloane, este

$$[N] \equiv \begin{pmatrix} N_{11} & N_{12} & \ldots & N_{1,\,n-1} \\ N_{21} & N_{22} & \ldots & N_{2,\,n-1} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ N_{r1} & N_{r2} & \ldots & N_{r,\,n-1} \end{pmatrix} \quad (40)$$

și se numește matricea (redusă) de concurență a laturilor în cele $(n-1)$ noduri independente.

Cele $(n-1)$ relații între curenții I_j prin laturile j — raportați la sensurile de referință de pe aceste laturi — și injecțiile de curenți J''_k în nodurile independente k — raportate la sensurile de referință îndreptate spre aceste noduri se — pot pune cu ajutorul coeficienților de concurență N_{jk} sub forma

$$J''_k = \sum_{j=1}^{r} N_{jk}\, I_j\,;\ k = 1, 2, \ldots, n-1, \quad (41)$$

sistem care ia, cu matricele (40), (6) și

$$[J''] \equiv \begin{pmatrix} J''_1 \\ J''_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ J''_{n-1} \end{pmatrix}, \quad (42)$$

și următoarea formă matricială:

$$[J''] = [N]_t\, [I]. \quad (41a)$$

De asemenea, cele r relații dintre tensiunile U_{bl} la bornele laturilor l — raportate la sensurile de referință de pe ele — și potențialele V_i ale celor $(n-1)$ noduri independente față de nodul n și raportate la sensurile de referință diri-

jate dinspre nodurile i spre nodul n se pot pune cu ajutorul coeficienților de incidență N_{li} sub forma

$$U_{bl} = \sum_{i=1}^{n-1} N_{li} V_i; \quad l = 1, 2, \ldots, r, \tag{43}$$

sistem care ia, cu matricele (4), (40) și matricea unicoloană și $n-1$ linii a potențialelor V_i ale nodurilor

$$[V] \equiv \begin{pmatrix} V_i \\ V_2 \\ . \\ . \\ V_{n-1} \end{pmatrix}, \tag{44}$$

și următoarea formă matricială:

$$[U_b] = [N] \cdot [V]. \tag{43a}$$

Teorema potențialelor nodurilor, care urmează să fie de asemenea folosită în calculul mărimilor Y_{tkq}, exprimă prima teoremă a lui Kirchhoff pentru nodurile independente folosind tensiunile V_l ale nodurilor independente față de nodul n și injecțiile J'_{sk} de curenți de scurtcircuit I_{sj} ai laturilor j în nodurile k, între care există următoarele relații deduse din (41)

$$J''_{sk} = \sum_{j=1}^{r} N_{jk} J_{sj}; \quad k = 1, 2, \ldots, n-1, \tag{45}$$

sistem care se poate pune și sub următoarea formă matricială

$$[J''_s] = [N]_t [J_s]. \tag{45a}$$

Ținînd seamă de cele $(n-1)$ relații (41), sistemul de ecuații obținut cu ajutorul primei teoreme a lui Kirchhoff pentru cele $(n-1)$ noduri independente ia următoarea formă sistematică

$$J''_k = \sum_{i=1}^{r} N_{ik} I_i = 0; \quad k = 1,2, \ldots, (n-1), \tag{46}$$

sistem care, cu matricele (40) și (6), ia și următoarea formă matricială:

$$[J''] = [N]_t [I] = [0]. \tag{46a}$$

Aceasta se transformă cum urmează cu ajutorul celei de-a treia forme matriciale (31a) a teoremei lui Ohm-Joubert

$$[N]_t [I_s] + [N]_t [Y] [U_b] = [N]_t [I_s] + [N]_t [Y] [N] [V] = [0],$$

adică, dacă se notează cu $[Z'']$ inversa matricei pătrate

$$[Y''] = [N]_t [Y] [N], \tag{47}$$

care este în general inversabilă se obține, prin înmulțirea dinspre stînga cu $[Y'']^{-1} = [Z'']$ a membrilor ultimei ecuații, spre a o rezolva în raport cu matricea $[V]$:

$$[V] = - [Z''] [N]_t [I_s], \tag{48}$$

ca expresie a teoremei potențialelor nodurilor, alături de expresia curentă

$$[J_s''] = [N]_t [I_s] = - [Y''] [V]. \tag{48a}$$

Din (43a), (48) și (29) rezultă expresia căutată a matricei tensiunilor la bornele laturilor în funcție de matricea tensiunilor electromotoare din laturi

$$[U_b] = [N] \cdot [V] = - [N] \cdot [Z''] \cdot [N]_t [I_s] = - [N] \cdot [Z''] [N]_t [Y] [E]. \tag{49}$$

Ținînd seama de relațiile (28a), (8a) și (49), rezultă din cea de-a treia formă matricială (9a) a teoremei lui Helmholtz-Thévenin, cu (28a), relația

$$[J_s] = [I] + [Y_0] [U_b] = \{[Y] - ([Y_0] + [Y]) \cdot [N] \cdot [Z''] [N]_t [Y]\} [E], \tag{50}$$

adică rezultă prin comparație cu (13a), pentru matricea admitanțelor de transfer în scurtcircuit, expresia

$$[Y_t] = [Y] - ([Y_0] + [Y]) \cdot [N] \cdot [Z''] \cdot [N]_t [Y], \tag{51}$$

despre care se poate arăta că este identică cu expresia (39), în virtutea identității

$$[C]_t [N] = 0. \tag{52}$$

Calculul chiar și pe calculatoare numerice al admitanțelor de transfer în scurtcircuitul laturilor cu ajutorul expresiei lor (39) sau (51) este dificil, din cauza nevoii de a inversa matrice și fiindcă implică operații neuniforme de programare. În cazul clasei de rețele care prezintă particularitatea că în ele se găsește un *nod* de rețea în care concură toate laturile care au tensiuni electromotoare externe și că nu există în ele mărimi mutuale, cum este cazul sistemelor electroenergetice (fig. 4*a*), se poate trece însă de la rețeaua original la o schemă echivalentă a întregii rețele, numită [3] „echivalentul" ei „final", care mai conține numai laturile în care se găseau generatoare, plus latura analizată (presupusă concurentă în același nod), extremitățile neconcurente ale generatoarelor de tensiune ce le reprezintă și a laturii analizate fiind legate în poligon complet (fig. 4*b*). Operația se poate efectua suprimînd succesiv toate nodurile neinteresante ale rețelei, prin transfigurarea în poligoane complete a stelelor de laturi ce concură în ele și păstrînd drept noduri ale rețelei transformate numai nodurile interesante, reale sau fictive, cum sînt punctele N'_1, N'_2, ..., N'_m, N'_q dintre partea activă a generatoarelor de tensiune ce reprezintă generatoarele din rețeaua original (fig. 4*a*), cum și, eventual, nodul auxiliar corespunzător din latura analizată. La suprimarea fiecărui nod k se suprimă coloana k și linia k din matricea admitanțelor Y_{ik}, Y_{jk} etc. ale laturilor i, k și j, k etc. de stea, care concură în nodul k și pe care o avea rețeaua înainte de suprimarea nodului k, și se adaugă între vîrfurile i, j ale acestei stele, în paralel cu admitanțele Y_{ij} ce existau între acele vîrfuri

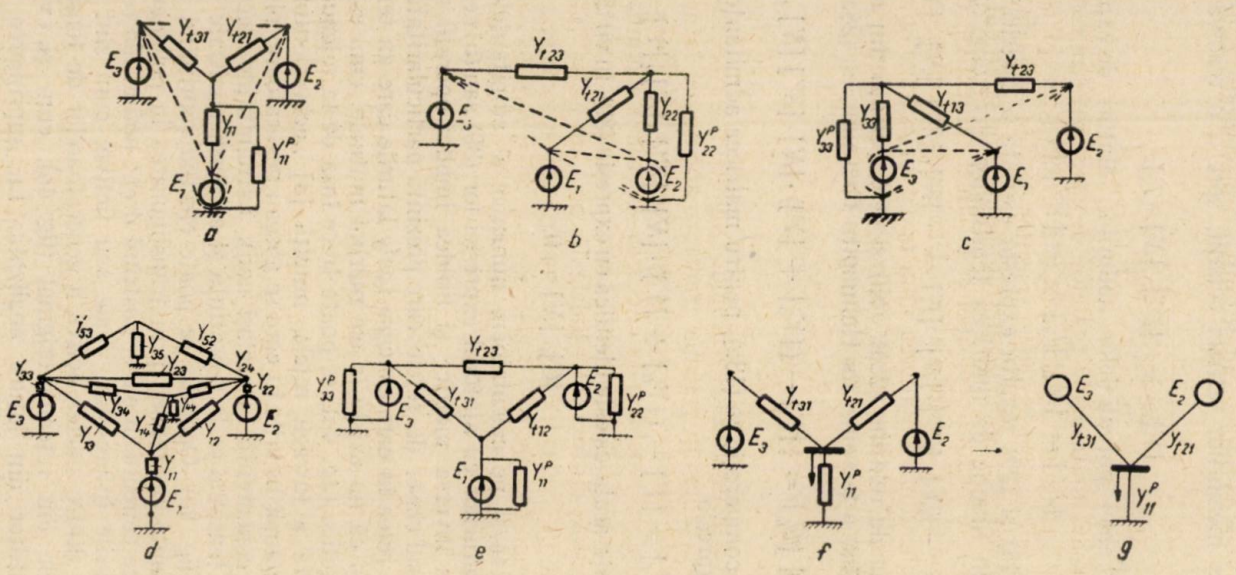


Fig. 4. — Schemele echivalente derivație ale unei rețele electrice (4*d*) în raport cu laturile 1 (4*f*), 2 (4*b*) și 3 (4*c*), împreună cu schema bloc respectivă (4*e*) și schema echivalentă pentru latura considerată la bornele de acces E_1 ale generatorului *1* (*4 f*, respectiv varianta *4g*).

înainte de suprimarea nodului k, admitanţele suplimentare $\Delta_k Y_{ij}$, care au expresia cunoscută

$$\Delta_k Y_{ij} = \frac{Y_{ik} Y_{jk}}{Y_{sk}}, \tag{53}$$

unde Y_{sk} este suma admitanţelor braţelor de stea care concură în nodul k. Se ştie însă că, în lipsa admitanţelor mutuale, în matricea $[Y'']$ termenii diagonali sînt egali cu suma admitanţelor ramurilor de stea care concură în noduri, iar termenii nediagonali sînt egali cu admitanţele cu semn schimbat ale laturilor ce unesc nodurile care au ordinul coloanei şi al liniei respective, ceea ce rezultă şi direct din expresia (47) a acestei matrice. Urmează că elementele Y^n_{ik} ale matricei $[Y''^n]$ a reţelei după eliminarea unui nod k prin transfigurarea stelei lui într-o legătură în poligon complet se obţin din termenii corespunzători Y_{ik} ai matricei reţelei cu nodul încă nesuprimat prin operaţia

$$Y^n_{ik} = Y_{ik} - \frac{Y_{ik} Y_{jk}}{Y_{sk}}, \tag{54}$$

care este aceeaşi la suprimarea fiecărui nod. După ce s-a procedat în acest mod uniform pînă cînd a rămas în reţeaua transformată numai latura analizată şi cele m generatoare din afara ei, se obţine din matricea $[Y'']$ a reţelei original o matrice $[Y''_f]$ a reţelei transformate. Aceasta, cu semn schimbat şi înmulţită la dreapta cu matricea $[E]$ a *tensiunilor electromotoare* E_k ale generatoarelor, respectiv cu diferenţele dintre potenţialele V_k ale „nodurilor" păstrate N'_k din sistem faţă de pămînt, respectiv faţă de neutru, dă o matrice care reprezintă conform cu (48a) matricea $[N_f]_t\,[I_s]$ a injecţiilor de curent în noduri, care sînt în acest caz chiar injecţiile de curenţi de scurtcircuit în nodurile reţelei (fiindcă $E_k = V_k$)

$$[J''_s] = [N_f]_t\,[J_s] = -\,[Y''_f]\cdot[E]. \tag{55}$$

Extrăgînd din legătura în poligon complet a echivalentului REI final numai laturile lui care concură în extremitatea laturii analizate nu este comună cu laturile sale cu generatoare, se obţine schema echivalentă completă tip derivaţie corespunzătoare (fig. 4*b*), adică elementele matricei $[Y''_f]$ reprezintă chiar admitanţele de transfer din relaţia (13a). Figurile $4d-4f$ arată că în adevăr prin combinarea de scheme echivalente derivaţie, se obţine „echivalentul final".

Cazul nodurilor păstrate în echivalent poate fi tratat şi identificînd generatoarele sau orice latură activă din sistem cu perechi de borne de acces.

3. TEORIA CELEI MAI SIMPLE SCHEME ECHIVALENTE COMPLETE DE TIPUL SERIE

Teoria celei mai simple scheme echivalente de tipul serie poate fi întemeiată pe următoarea teoremă: pentru orice reţea electrică lineară (sau liniarizată) există o schemă echivalentă cu ea în raport cu o *latură* q a sa analizată, care are următoarea structură: conţine un număr de *generatoare* (injectoare) de *curent* egal cu numărul de generatoare din restul reţelei-original şi avînd

fiecare curentul de scurtcircuit real al generatorului din rețea pe care-l reprezintă, legate toate, împreună cu o latură pasivă, *în serie* cu latura analizată (și formînd cu ea un circuit închis), impedanța — în complex, respectiv operațională — a fiecărui generator de curent (în derivație pe latura lui activă) fiind independentă de curenți și de tensiuni și egală cu impedanța de transfer în gol — în complex, respectiv operațională — dintre latura rețelei în care se găsește generatorul și latura analizată; impedanța echivalentă a laturii pasive e egală cu diferența dintre impedanța echivalentă a rețelei original pasivizate, în raport cu bornele laturii analizate și suma impedanțelor de transfer legate în paralel cu laturile active ale generatoarelor de curent din schema echivalentă.

Din cea de-a doua formă (3) a teoremei lui Helmholtz-Thévenin rezultă că, pentru ca — în raport cu latura analizată — schema tip serie să fie echivalentă cu rețeaua, este necesar și suficient ca, la *orice* valori ale curenților de scurtcircuit, generatoarele schemei echivalente să stabilească, între bornele laturii analizate și presupusă acum *în gol* (întreruptă, adică $I_q = 0$), aceeași tensiune la borne E_{0q} ca și rețeaua în aceleași condiții, și mai trebuie ca, văzută dinspre bornele laturii analizate și presupusă întreruptă, schema să aibă aceeași impedanță echivalentă Z_{0q} ca și rețeaua pasivizată și văzută în aceleași condiții dinspre bornele acestei laturi. Dacă, în exteriorul laturii analizate, rețeaua are m generatoare, prima condiție dă m relații, iar ultima dă o relație suplimentară. Schema echivalentă serie avînd ca necunoscute — în derivație pe circuitele de curent ale generatoarelor ei de curent — numai m impedanțe, acestea nu vor permite să se satisfacă, în afară de cazuri particulare, toate cele $(m+1)$ condiții care asigură echivalența, motiv pentru care este nevoie și de o latură *pasivă*, *în serie* cu latura analizată, în afară de cazurile particulare amintite, în care aceasta poate lipsi (are impedanță nulă).

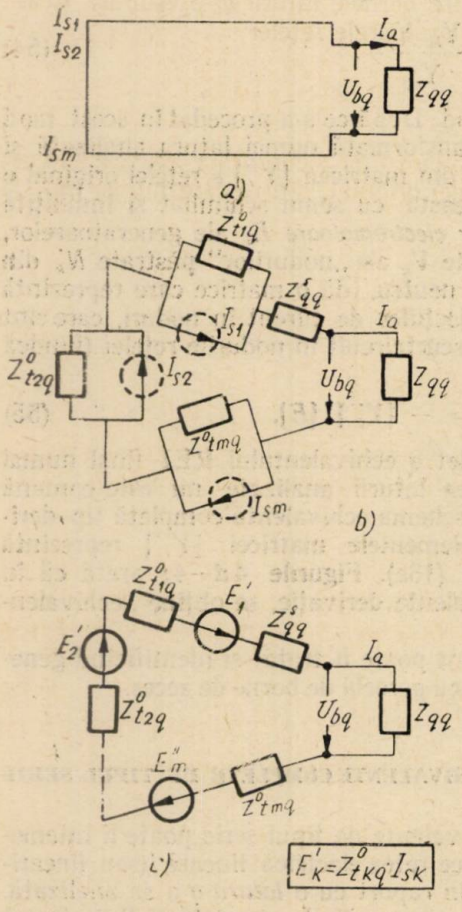


Fig. 5. — Diagrama fazorilor pentru tensiunea pe latura q în gol.

Considerăm deci rețeaua dată (fig. 5*a*), care în exteriorul laturii de analizat q are m generatoare cu curenții de scurtcircuit $\underline{I}_{s1}, \underline{I}_{s2}, \ldots, \underline{I}_{sm}$, situate în laturi cărora li se dau numerele de ordine 1, 2, . . ., m și fie $\underline{U}_{bq}$ tensiunea la bornele acesteia în regimul care interesează și $\underline{I}_q$ curentul prin ea. Considerăm,

de asemenea, cea mai simplă schemă completă de tipul serie (fig. 5*b*), echivalentă cu rețeaua în raport cu latura *q*. Ea are $m+1$ elemente, cu impedanțe încă de determinat Z^s_{1q}, Z^s_{2q}, ..., Z^s_{mq}, Z^s_{qq}, în serie cu latura *q*, dintre care primele *m* au în paralel latura activă a cîte unui generator de curent I_{s1}, I_{s2}, ..., I_{sm}, iar elementul pasiv are impedanța Z^s_{qq}.

Dacă Z^0_{tkq} este impedanța de transfer dintre latura *k* a generatorului I_{sk} al *rețelei original* din figura 5*a* și latura *q* presupusă întreruptă, tensiunea U_{0kq} care s-ar stabili la bornele acestei laturi, presupusă întreruptă (în gol), dacă ar fi excitat numai generatorul I_{sk}, iar celelalte generatoare ar fi pasivizate, ar avea expresia

$$U_{0kq} = Z^0_{tkq} I_{sk}; \; k = 1, 2, \ldots, m; \; q = 1, 2, \ldots, r. \tag{56}$$

Deci, aplicînd principiul superpoziției, se deduce următoarea expresie pentru tensiunea E_{0q} care se stabilește între bornele laturii *q*, presupusă întreruptă (în gol), cînd sînt excitate toate generatoarele rețelei

$$E_{0q} = \sum_{k=1}^{m} U_{0kq} = \sum_{k=1}^{m} Z^0_{tkq} I_{sk}; \; q = 1, 2, \ldots, r. \tag{57}$$

Dacă $[I_s]$ este matricea unicoloană și cu *r* linii a curenților de scurtcircuit ai generatoarelor din cele *r* laturi ale rețelei original, dintre care numai $(m+1)$ pot fi diferiți de zero, iar

$$[Z^0_t] \equiv \begin{pmatrix} Z^0_{t11} & Z^0_{t12} & \ldots & Z^0_{t1r} \\ Z^0_{t21} & Z^0_{t22} & \ldots & Z^0_{t2r} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ Z^0_{tr1} & Z^0_{tr2} & \ldots & Z^0_{trr} \end{pmatrix} \tag{58}$$

este matricea pătrată a admitanțelor de transfer $Z^0_{tkq} = Z^0_{tqk}$ dinspre laturile *k* spre laturile *q* presupuse întrerupte ale rețelei, sistemul celor *r* relații (17) ia următoarea formă matricială:

$$[E_0] = [Z^0_t]\,[I_s]. \tag{57a}$$

Tensiunea U^s_{0q}, pe care generatoarele de curent excitate ale *schemei echivalente* serie din figura 5*b* o stabilesc între bornele laturii întrerupte *q*, este însă

$$U^s_{0q} = \sum_{k=1}^{m} Z^s_{kq} I_{sk}. \tag{57b}$$

Egalînd tensiunile E_{0q} din (17) cu U^s_{0q} din (57b), se obține condiția

$$\sum_{k=1}^{m} Z^0_{tkq} I_{sk} = \sum_{k=1}^{m} Z^s_{kq} I_{sk}; \; k \neq q. \tag{59}$$

Aceasta trebuind să fie satisfăcută pentru orice valori I_{sk}, rezultă că impedanțele în derivație Z^s_{kq} ale generatoarelor de curent din schema 5*b*, echivalentă

cu rețeaua din 3*a* față de latura *q*, sînt independente de tensiuni și curenți, cum s-a enunțat în teoremă, și egale cu impedanțele de transfer respective, cu latura *q* în gol

$$Z^s_{kq} = Z^0_{tkq}\,;\; k = 1, 2, \ldots, m;\; q = 1, 2, \ldots, r;\; k \neq q. \tag{60}$$

Impedanța echivalentă Z^s_{0q} a *schemei echivalente* (fig 5*b*), presupusă pasivizată și văzută singură, adică fără latura *q*, dinspre bornele acestei laturi *q*, este

$$Z^s_{0q} = Z^s_{qq} + \sum_{k=1}^{m} Z^s_{kq}.$$

Dacă Z_{0q} este deci impedanța echivalentă a *rețelei original* din figura 5*a*, presupusă pasivizată și văzută singură dinspre bornele laturii *q*, rezultă deci univoc — din egalarea ei cu impedanța Z^s_{0q} din ultima relație — următoarea expresie, cuprinsă în enunțul teoremei, a impedanței Z_{qq} a elementului pasiv, legat în schema echivalentă în serie cu latura *q*:

$$Z^s_{qq} = Z^s_{0q} - \sum_{k=1}^{m} Z^s_{kq} = Z_{0q} - \sum_{k=1}^{m} Z^0_{tkq}\,;\; q = 1, 2, \ldots, r, \tag{61}$$

unde în ultimul membru s-a ținut seamă și de relațiile (60). Rezultă că elementul pasiv și în serie cu latura de analizat lipsește din schema echivalentă tip serie ($Z^s_{qq} = 0$) numai în cazul particular în care

$$Z_{0q} = \sum_{k=1}^{m} Z^0_{tkq},$$

relație care adeseori nu este satisfăcută.

Tensiunile pe care diferitele generatoare de curent din schema serie echivalentă le stabilesc la propriile lor borne, și deci și puterile debitate de ele în această schemă, respectiv pierderile din ea, diferă de tensiunile stabilite, de puterile debitate de generatoarele respective în rețeaua original, respectiv de pierderile din aceasta, în diferitele servicii. În schema echivalentă, tensiunile la bornele în gol ale generatoarelor, de exemplu, reprezintă doar contribuția sau cota-parte a generatoarelor respective din rețeaua original la tensiunea la borne în gol pe latura *q* analizată. În regim armonic, relațiile (57b), care devin identice cu (57) în virtutea relațiilor (60) și conțin contribuțiile diferitelor generatoare *k* de curent la tensiunea în gol $U^s_{0q} = E_{0q}$ la bornele laturii *q* analizate, admit deci reprezentarea grafică simplă din figura 6, în care se însumează fazorii-contribuții $E_{0kq} = Z^0_{tkq} J_{sk}$ spre a se obține între extremitățile liniei lor frînte fazorul tensiunii E_{oq} la bornele laturii *q*, presupusă întreruptă (în gol). Figurile 6 și 3 sînt asemenea, în virtutea relațiilor dintre curenți și tensiuni.

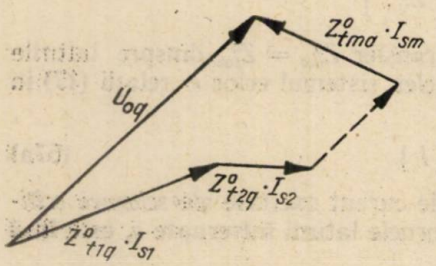


Fig. 6. — Rețea electrică cu o latură de analizat (6*a*) cu schema ei echivalentă completă tip serie cu generatoare de curent (6*b*) respectiv cu generatoare de tensiune.

Elementele variabile ale schemei echivalente serie fiind adevăratele valori ale curenților de scurtcircuit ai generatoarelor sincrone din rețeaua original, sînt legate direct — la excitație dată — de turațiile rotoarelor acestora.

Impedanțele de transfer în gol au parte reală pozitivă și deci sînt fizic realizabile numai dacă se aleg sensuri de referință convenabile pe laturile rețelei de analizat și se păstrează anumite intervale pentru frecvențe.

Înlocuind generatoarele de curent din schema echivalentă tip *serie* cu generatoarele de tensiune corespunzătoare, se obține o nouă schemă echivalentă tip *serie* (fig. 5*c*), care are numai *generatoare de tensiune*. Se observă însă că tensiunile electromotoare ale acestora nu sînt tensiunile electromotoare reale ale generatoarelor din rețeaua original, ci tensiunile electromotoare pe care ar trebui ca ele să le aibă spre a debita curenții de scurtcircuit reali ai generatoarelor din rețea, pe impedanțe de scurtcircuit egale cu impedanțele de transfer în gol dintre laturile rețelei în care se găsesc generatoarele respective și latura q analizată. Noua schemă nu este deci completă și are o utilitate redusă, fiindcă nu conține caracteristice esențiale ale generatoarelor rețelei original, cum sînt tensiunile lor electromotoare sau curenții lor de scurtcircuit.

3a. CALCULUL IMPEDANȚELOR DE TRANSFER SPRE LATURILE ÎNTRERUPTE

Cu ajutorul teoremelor curenților ciclici și potențialelor nodurilor se pot stabili două expresii echivalente ale impedanțelor de transfer în gol dintre laturile generatoarelor (singurele interesante pentru schemele serie) și laturile q analizate, presupuse în gol.

Dacă în ecuația (3a) se înlocuiesc matricele $[I]$ și $[U_b]$ cu valorile lor (36) și (37), deduse folosind teorema curenților ciclici, se obține valoarea următoare a matricei tensiunilor în gol E_{0q} la bornele laturilor q ale rețelei

$$[E_0] = [Z_0]\cdot[C]\cdot[Y']\cdot[C]_t[E] + ([Z]\cdot[C]\cdot[Y']\cdot[C]_t - [I])[E] =$$
$$= \{([Z_0] + [Z])[C]\cdot[Y']\cdot[C]_t - [I]\}\cdot[E]. \tag{62}$$

Din relația (29a) rezultă însă

$$[E] = [Z_t^0][I_s]. \tag{29b}$$

Comparînd relațiile (62) și (29b) cu (57a), rezultă următoarea expresie a matricei pătrate, simetrice și în general inversabile, cu r linii și r coloane, a impedanțelor de transfer Z_{tkq}^0 dinspre laturile k spre laturile q presupuse întrerupte

$$[Z_t^0] = ([Z_0^0] + [Z])\cdot[C]\cdot[Y']\cdot[C]_t\cdot[Z] - [Z]. \tag{63}$$

Se verifică ușor că între matricele $[Y_t]$ din (39) și $[Z_t^0]$ din (51) ale admitanțelor de transfer Y_{tkq} spre laturile în scurtcircuit și ale impedanțelor de transfer Z_{tkq}^0 spre laturile întrerupte (în gol) există relația

$$[Z_t^0] = [Z_0]\cdot[Y_t]\cdot[Z], \tag{64}$$

care permite să se calculeze una dintre ele în funcție de cealaltă.

Pentru a calcula impedanța de transfer spre laturile întrerupte sau în gol cu ajutorul teoremei potențialelor nodurilor, se exprimă întîi matricea $[U_b]$ a tesiunilor la bornele laturilor în funcție de matricea $[I_s]$ a curenților de scurt-circuit ai laturilor (sau generatoarelor) rețelei original, conform relației (49)

$$[U_t] = - [N] [Z''] \cdot [N]_t [I_s], \tag{49a}$$

și se calculează apoi din (31a) matricea $[I]$ a curenților din laturi în funcție de matricea $[I_s]$ a curenților de scurtcircuit ai laturilor rețelei original, respectiv ai generatoarelor ei

$$[I] = [I_s] + [Y] [U_b] = ([1] - [Y] [N] [Z''] [N]_t) [I_s]. \tag{65}$$

Înlocuind expresiile (49a) și (65) ale matricelor $[I]$ și $[U_b]$ forma matricială (9*a*) a celei de-a treia forme a teoremei lui Helmholtz-Thévenin, rezultă

$$[J_s] = \{[1] - [Y] [N][Z''] \cdot [N]_t - [Y_0] [N] [Z''] \cdot [N]_t [I_s] =$$
$$= \{[1] - ([Y] + [Y_0]) [N][Z''] [N]_t\} I_s.$$

Din ecuația (8a) se obține deci

$$[E_0] = [Z_0] [J_s] = \{[Z_0] - ([1] + [Z_0] [Y]) [N] [Z''][N]_t\} [I_s],$$

adică, comparînd cu (57a), rezultă o a doua expresie a matricei impedanțelor de transfer Z^0_{tkq} spre laturile q întrerupte ale rețelei original

$$[Z^0_t] = [Z_0] - ([1] + [Z_0] [Y]) [N] [Z''] [N]_t. \tag{66}$$

Se poate verifica iarăși egalitatea dintre expresiile (63) și (66) ale matricei $[Z^0_t]$, cum și existența relației (64) între expresia (66) a matricei $[Z^0_t]$ și expresia (51) a matricei $[Y_t]$.

4. SCHEME ECHIVALENTE SIMPLE CU REȚINEREA DE TENSIUNI REALE ȘI CURENȚI REALI

În această primă parte a cercetării s-au prezentat cele mai simple scheme echivalente cu reținerea tensiunilor electromotoare reale și a curenților de scurt-circuit reali ai generatoarelor. În o a doua parte se vor prezenta în unul din numerele viitoare ale acestei reviste cele mai simple scheme echivalente în care se reținn curenții reali injectați de generatoare, sau tensiunile reale aplicate de ele, cum și multipolii pasivi, considerînd curenții injectați între două borne de acces oarecare, iar apoi se va arăta convenienta utilizării diferitelor scheme echivalente în funcție de tipurile de probleme și de structura topologică a rețelelor cercetate.

Primit la redacție la 5 martie 1964

BIBLIOGRAFIE

1. PAUL DIMO, *Principiul suprapunerii efectelor, cale unitară pentru analiza sistemelor electroenergetice.* Electrotehnica, **9**, *4*, 113–117 (1961).
2. — *L'analyse des réseaux d'énergie par la méthode nodale des courants de court-circuit. L'image des nœuds.* Revue générale de l'Electricité, Paris, **71**, *3*, martie, 151–175 (1962).
3. — *Conceptele şi procedeele „analizei nodale" asociată calculatorului numeric.* St. cerc. energ., **13**, *3*, 389–424 (1963).

INDICII TEHNICI-ECONOMICI PENTRU STUDIUL COMPARATIV AL MOTOARELOR PARAMETRICE

DE

MATEI MARINESCU

membru corespondent al Academiei R. P. R.

721.313.84

1. INTRODUCERE

Pentru asimilarea în producție a unor noi tipuri de mașini este necesară o justificare pe baze tehnice-economice. O asemenea justificare se poate face prin introducerea unor indici tehnici-economici care să ilustreze în mod obiectiv economia de material și de energie pe care o putem realiza folosind, pentru un anumit domeniu de aplicație, noile tipuri de mașini, în comparație cu mașinile existente.

În cele ce urmează se stabilesc asemenea „indici" pentru motoarele parametrice alimentate în impulsiuni de curent [1], [2], [3], [4].

2. FACTORUL DE CALITATE „ELECTROMECANIC" AL MOTOARELOR DE TIP PARAMETRIC ȘI GABARITUL ACESTOR MOTOARE

Puterea mecanică medie Pm dezvoltată de un asemenea motor este dată de expresia

$$Pm = \frac{1}{T} \oint_{(C)} i \, \mathrm{d}(n\varphi), \qquad (1)$$

adică de integrala curbilinie, raportată la unitatea de timp și luată de-a lungul conturului închis (C), descris în planul fazelor $(n\varphi, i)$ în timpul unei perioade T a curentului.

S-a arătat în lucrări anterioare că această integrală este maximă atunci cînd curentul are forma de impulsuri dreptunghiulare separate prin intervale

de durată cel puțin egală cu durata impulsurilor și de frecvență egală cu dublul frecvenței mișcării și cînd este satisfăcută o relație de rezonanță electromecanică.

În cele ce urmează, vom considera că aceste 3 condiții sînt satisfăcute.

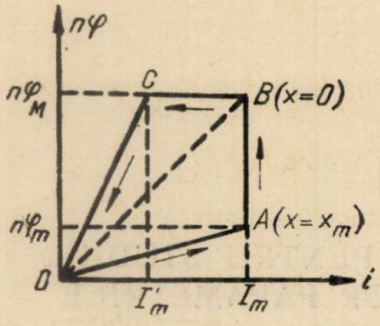


Fig. 1

Un asemenea contur (C) se vede în figura 1 și se confundă cu acela descris într-o transformare statică în care curbele OA și OB sînt curbele de magnetizare a circuitului magnetic al motorului cu întrefierul maxim (pentru $x = x_m$) și cu întrefierul minim pentru ($x = 0$), respectiv.

Relația (1) mai poate fi scrisă sub forma

$$Pm = \eta \cdot I_m (n\,\varphi_n) \cdot f, \tag{2}$$

în care η = factorul de calitate electromecanic și care are ca semnificație fizică, raportul dintre aria conturului (C) și dreptunghiul $OI_m\ Bn\ \varphi_M O$, în care este înscris.

Observăm că cu cît, pentru un I_m și x_m dați, ($n\varphi_m$) este mai mic și cu cît întrefierul este mai mic și permeabilitatea materialului mai mare cu atît și η se apropie mai mult de unitate — și puterea dezvoltată este mai mare.

Observăm, de asemnea, influența saturației. Lucrînd în regim nesaturat avem $\eta \leqslant 0{,}5$.

Cantitativ, influența saturației și a fluxului rezidual $n\varphi_m$, poate fi apreciată din relația

$$\eta = 1 - \frac{1}{2}(\alpha + \gamma), \tag{3}$$

unde $\alpha = \dfrac{I'_m}{I_m}$; $\gamma = \dfrac{\varphi_m}{\varphi_M}$.

Vedem astfel din (3) că pentru $\alpha = 1$ și $\gamma = 1$ avem $\eta = 0$, iar pentru $\alpha = 0$ și $\gamma = 0$ avem $\eta = 1$. Vom vedea mai departe, influența lui α și γ în expresia factorului de putere. Trecînd, în relația (2), la mărimi specifice, a materialelor, pe baza relațiilor

$$\varphi_M = B_M \cdot S_F \tag{4a}$$

$$I_m = \frac{1}{k} J_d \cdot s_c \tag{4b}$$

obținem relația

$$S_c \cdot S_F = \left(\frac{k}{\eta}\right) \frac{P_m}{J_d \cdot B_M f}, \tag{5}$$

unde $k = I_{ef}/I_m$ și $S_c = n\,s_c$.

Relația (5) ne dă dependența între gabaritul motorului ($S_c \cdot S_F$), factorul de calitate electromecanic η și raportul k dintre *valoarea eficace* și valoarea de *vîrf* a curentului.

Pe baza relației (5) putem calcula pe S_c dacă S_F este dat spre exemplu.

De asemenea, vom putea aprecia, comparativ, într-un caz dat, economia de material realizată, față de motoarele clasice.

3. RANDAMENTUL μ

Scriind ecuația energiilor în circuitul de alimentare (fig. 2) al motorului, vom avea

$$\int_0^T ei\,dt = R\int_0^T i^2 dt + \int_0^T i\,d(n\varphi_s) + \int_0^T i\,d(n\varphi_i), \tag{6}$$

unde φ_s și φ_i sînt fluxurile de scăpări și înlănțuire, respectiv.

Dar pentru fluxul de scăpări avem

$$\eta\varphi_s = \lambda \cdot i,$$

deci

$$\int_0^T i\,d(n\varphi_s) = \frac{1}{2}\lambda[i^2]_0^T = 0,$$

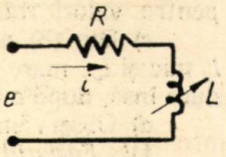


Fig. 2

rămîne deci

$$\int_0^T ei\,dt = R\int_0^T i^2 dt + \int_0^T i\,d(n\varphi_i),$$

de unde

$$\mu = \frac{\int_0^T i\,d(\eta\varphi_i)}{\int_0^T ei\,dt} = \frac{\int_0^T i\,d(n\varphi_i)}{R\int_0^T i^2\,dt + \int_0^T i\,d(n\varphi_i)} = \frac{1}{1 + 2\pi\dfrac{k^2}{\eta Q_M}} \tag{7}$$

și unde

$$Q_M = \frac{L_M\,\omega}{R} \quad ; \quad L_M = \frac{n\varphi_M}{I_m} \quad ; \quad \omega = 2\pi f.$$

Pe de altă parte, referindu-ne la relațiile binecunoscute

$$\varphi_M = \frac{4\pi n I_m S_F}{\dfrac{l_F}{\mu_F} + \delta} \quad , \quad R = \rho\frac{l_c}{s}$$

care mai pot fi scrise

$$\frac{n\varphi_M}{I_m} = L_M = \frac{4\pi n^2 S_F}{\dfrac{l_F}{\mu_F} + \delta} \quad ; \quad R = \rho\frac{n^2 l_{mc}}{S_c}.$$

Obținem pentru Q_M expresia

$$Q_M = \frac{4\pi\omega}{\rho(1/\mu_F + \delta/l_F)}\cdot\frac{S_F \cdot S_c}{l_F \cdot l_{mc}} = \frac{4\pi\,\omega\,a\cdot b}{(1/\mu_F + \delta/l_F)\rho}\,l_F \cdot l_{mc}, \tag{8}$$

în care δ = întrefierul minim (pt. $x = 0$); ρ = rezistivitatea conductorului de cupru,
μ_F = permeabilitatea fierului corespunzătoare lui B_m,
l_F = lungimea circuitului magnetic; l_{mc} = lungimea spirei medii, a bobinajului statoric,
$a = S_F/l_F^2$; $b = S_c/l_{mc}^2$.

Din (5), (7) și (8) putem deduce următoarele concluzii:

a) Pentru un gabarit redus și un randament ridicat trebuie ca printr-o construcție judicioasă, factorul de calitate electro-mecanic să fie cît mai aproape de unitate. (În practică pot fi atinse pentru η valori cuprinse între 0,7—0,8).

b) Q_M, deci și randamentul crește cu produsul dimensiunilor liniare ale circuitului magnetic și electric, deci cu radicalul puterii mecanice *Pm*. Rezultă de aici că la puteri mici, pentru a menține un randament bun, trebuie să micșorăm produsul $(j_d \cdot B_M)$, iar la puteri mari vom putea obține randamente bune și pentru valori ridicate ale acestui produs.

c) Din (8) rezultă că la o putere dată putem obține același Q_M pentru l_F mic și l_{mc} mare sau invers. Considerația factorului de putere maxim, ne conduce însă, după cum vom vedea mai departe, la o anumită relație între l_F și l_{mc}.

d) Observăm de asemenea din (5) și (7) importanța reducerii raportului k.

IV. *Factorul de putere* K. Conform definiției, avem

$$K = \frac{\int ei\,dt}{\sqrt{\int e^2\,dt \cdot \int i^2\,dt}}. \tag{9}$$

Dar

$$\int ei\,dt = R\int i^2 dt + \int i\,d(n\varphi),$$

$$\int e^2\,dt = \int\left(Ri + \frac{d(n\varphi)}{dt}\right)^2 dt.$$

Făcînd înlocuirile respective și după unele transformări, obținem

$$K = \frac{1 + \eta\, Q_M/2\pi k^2}{\sqrt{1 + 2\eta\,\frac{Q_M}{2\pi k^2} + \frac{1}{R^2 I_{ef}^2 T}\int\left(\frac{d(n\varphi)}{dt}\right)^2 dt}}. \tag{10}$$

Rămîne astfel să calculăm ultimul termen din interiorul radicalului. Vom avea deci

$$\frac{I}{R^2 I_{ef}^2 T}\int_0^T\left(\frac{d(n\varphi)}{dt}\right)^2 dt = \frac{1}{R^2 I_{ef}^2 T}\left[\int_0^T\left(\frac{d(n\varphi_s)}{dt}\right)^2 dt + 2\int_0^T\left(\frac{dn\varphi_s}{dt}\cdot\frac{dn\varphi_i}{dt}\right)dt + \right.$$

$$\left. + \int_0^T\left(\frac{d(n\varphi_i)}{dt}\right)^2 dt,\right],$$

unde $n\varphi_s$ = fluxul de scăpări = $\lambda \cdot i$;
$n\varphi_i$ = fluxul de înlănțuire.

Vom calcula integralele din interiorul parantezei în cazul în care în planul fazelor ($n\varphi_i$, i), ciclul parcurs este $OABCO$ (v. fig. 3), iar în planul oscilografic ($i(t)$, $x(t)$), curba curentului și a mișcării sînt ilustrate în aceeași figură 3.

Vom avea astfel

$$\int_0^{T/2} \frac{d(n\varphi_s)}{dt}\, dt =$$

$$= \lambda^2 \int_0^{T/2} \left(\frac{di}{dt}\right)^2 dt = 2\lambda^2 \frac{I_m^2}{t_1},$$

$$2\int_0^{T} \left(\frac{dn\varphi_s}{dt} \cdot \frac{dn\varphi_i}{dt}\right) dt =$$

$$= 2\int \frac{d(n\varphi_s)}{dt}\, d(n\varphi_i) =$$

$$= 2\lambda \int \frac{di}{dt}\, d(n\varphi_i) = -2\frac{\lambda L_M I_m^2}{t_1}(1-\gamma),$$

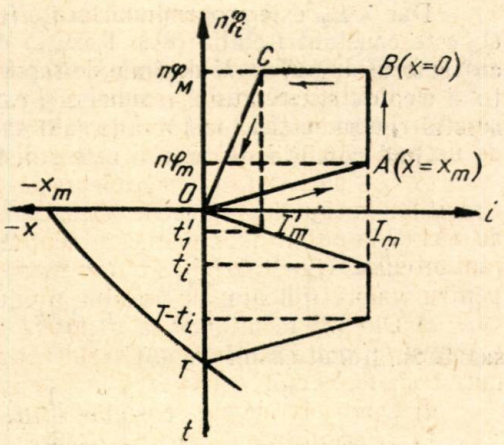


Fig. 3

unde $\gamma = L_m/L_M$,

$$\int \left(\frac{d(n\varphi_i)}{dt}\right)^2 dt = \int \left(\frac{dn\varphi_i}{di}\frac{di}{dt} + \frac{dn\varphi_i}{dx}\frac{dn}{dt}\right)^2 dt = \frac{(n\varphi_m)^2}{t_1} + \frac{1}{\alpha}\frac{(n\varphi_M)^2}{t_1} +$$

$$+ \frac{1}{4}(1-\gamma)^2 (n\varphi_M)^2 - \Omega^2, T,$$

unde $$\alpha = \frac{I_m'}{I_m} = \frac{t_1'}{t_1} \quad ; \quad \Omega = \frac{\omega}{2} = \frac{\pi}{T},$$

și deci

$$\frac{1}{R^2 I_{ef}^2 T}\int_0^T \left(\frac{dn\varphi}{dt}\right)^2 dt \cong \frac{T}{t_1}\frac{1}{(2\pi k)^2} Q_M^2 \left[2\left(\frac{\lambda}{L_m}\right)^2 - 2(1-\gamma)\frac{\lambda}{L_M} + \frac{1}{2}\right], \quad (11)$$

unde $Q_M = \dfrac{L_M \omega}{R}$, și unde au fost neglijați termenii

$$\frac{(n\varphi_M)^2}{t_1} \text{ și } \frac{1}{4}(1-\gamma)^2 (n\varphi_M)^2 \Omega^2 T.$$

Din (10) și (11) rezultă că la același Q_M, K va fi cu atît mai mare cu cît valoarea parantezei din (11) va fi mai mică. Observăm că aceasta din urmă are o valoare minimă în raport cu λ/L_M pentru

$$\lambda/L_M = \frac{1}{2}(1-\gamma), \quad (12)$$

cînd valoarea parantezei se reduce la

$$\left[\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{2}(1-\gamma)^2\right]. \tag{13}$$

Dar λ/L_M este proporțional cu l_{mc}/l_F atunci cînd produsul $l_{mc} \times l_F$ și deci Q_M este constant (relația (8)). Rezultă din cele de mai sus și din relația (12) că factorul de putere K depinde de raportul dintre dimensiile liniare ale circuitului electric și circuitului magnetic și este maxim pentru o anumită valoare a acestui raport, astfel încît relația (12) să fie satisfăcută.

Cînd condiția de maxim este satisfăcută vom avea deci

$$K_M = \frac{1 + \frac{\eta Q_M}{2\pi k^2}}{\sqrt{1 + 2\frac{\eta Q_M}{2\pi k^2} + \frac{T}{t_1}\frac{1}{(2\pi k)^2} Q_M^2\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{2}(1-\gamma)^2\right)}}, \tag{14a}$$

sau încă, ținînd seama de (3)

$$K_M = \frac{1 + \left[1 - \frac{1}{2}(\alpha+\gamma)\right]\frac{Q_M}{2\pi k^2}}{\sqrt{1 + 2\left[1 - \frac{1}{2}(\alpha+\gamma)\right]\frac{Q_M}{2\pi k^2} + \frac{T}{t_1}\frac{Q_M^2}{(2\pi k)^2}\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{2}(1-\gamma)^2\right)}}, \tag{14b}$$

Asupra expresiilor (14a) sau (14b) avem de făcut următoarele observații :

1) Pentru $\alpha = 1$, $\gamma = 1$, deci în cazul cînd lucrul mecanic este nul și motorul se comportă ca o inductanță constantă, prezența unui factor de putere subunitar este datorit reactanței inductive a circuitului și are ca expresie

$$K = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{T}{t_1}\cdot\frac{Q_M^2}{(2\pi k)^2}}} = \cos\alpha, \tag{15}$$

unde $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{\frac{T}{t_1}\cdot\frac{Q_M}{2\pi k}}$; vedem astfel că cu cît Q_M este mai mare și k mai mic, cu atît factorul de putere scade.

2) Apariția termenului $\left[1 - \frac{1}{2}(\alpha+\gamma)\right]\frac{Q_M}{2\pi k^2}$ este specifică prezenței lucrului mecanic.

O dată cu apariția acestui termen, factorul de putere poate să crească — față de situația cînd el lipsește. Într-adevăr, să luăm cazul cînd acest termen este mare față de unitate ; deoarece în acest caz în cantitatea de sub radical ultimul termen este predominant, vom avea

$$K_m = \frac{1}{k}\frac{1 - \frac{1}{2}(\alpha+\gamma)}{\sqrt{\frac{T}{t_1}\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{2}(1-\gamma)^2\right)}}, \tag{16a}$$

iar dacă $\alpha \ll 1$, $\gamma \ll 1$, vom avea

$$K_m \cong \frac{1}{k}\sqrt{\frac{\alpha t_1}{T}} = \sqrt{\alpha \frac{\Delta t}{\tau}}. \tag{16b}$$

Din expresia (16 b) tragem următoarele concluzii :

a) influența lui k este în acest caz tocmai inversul influenței sale din expresia (15);

b) putem să ne apropiem de valori unitare pentru K_m dacă k este suficient de mic.

CONCLUZII

Pe baza expresiilor date pentru η, μ și k acești parametri pot fi determinați pe bază de măsurători electrice asupra unui electromagnet dat, ceea ce permite predeterminarea performanțelor acestuia în funcționarea ca motor și compararea cu performanțele motoarelor clasice.

Primit la redacție la 25 februarie 1964.

BIBLIOGRAFIE

1. M. MARINESCO, *Sur un nouveau moteur électrique à mouvement alternatif.* R.G.E., Sept. (1961).
2. M. MARINESCO, N. GAVRILIU, I. GRINARU, *L'effet d'hystérèse électromécanique*, R.G.E., Dec. (1962).
3. M. MARINESCO, *Moteurs électromagnétiques à mouvement alternatif et générateurs magnétostrictifs d'ultrasons.* R.G.E., Nov. (1963).
4. M. MARINESCO, *Sur certains effets d'instabilité électromécanique.* C. R. Acad. Sc. Paris, **257**, p. 3578–3581 (1963).

STUDIUL SUPRATENSIUNILOR CE APAR LA DECLANŞAREA LINIILOR ÎN GOL CU AJUTORUL CALCULATOARELOR ANALOGICE

DE

ACADEMICIAN A. AVRAMESCU, G. DRĂGAN, I. ADĂMUŢ şi M. PETCU

621.315.1.015.3 : 518.5

1. INTRODUCERE

La declanşarea liniilor în gol apar cele mai importante supratensiuni interne [1]. Pe de o parte, frecvenţa de apariţie a acestor supratensiuni este relativ mare, iar, pe de altă parte, durata lor poate fi de ordinul 5 ms ceea ce creează probleme dificile în legătură cu posibilitatea reducerii amplitudinii lor cu ajutorul descărcătoarelor. Din aceste considerente nivelul de izolaţie al instalaţiilor electroenergetice cu tensiuni nominale mai mari de 110 kV este determinat în primul rînd de amplitudinea supratensiunilor ce apar la declanşarea liniilor în gol [2], [3].

Dată fiind importanţa acestei probleme, în cadrul Institutului de energetică al Academiei R.P.R., s-au efectuat studii privind supratensiunile de declanşare a liniilor în gol încă de acum 3 ani, primele studii de acest gen din ţara noastră.

În cursul anului 1961 s-a studiat fenomenologia apariţiei acestor supratensiuni, s-au determinat o serie de relaţii de calcul şi s-a elaborat metodologia de măsurare a supratensiunilor în sistem [4], [5], [6].

În anul 1962 Institutul de energetică a participat la efectuarea încercărilor experimentale din sistemul energetic prelucrînd şi interpretînd rezultatele experimentale obţinute [3]. Aceste încercări, efectuate pentru prima dată în ţara noastră, au fost realizate în bune condiţii [7], [8], iar interpretarea rezultatelor experimentale a dus la o serie de concluzii interesante şi utile [8], [9].

Încercările experimentale efectuate în sistem, deosebit de utile deoarece ţin seama de condiţiile reale privind caracteristicile funcţionale ale întrerup-

St. cerc. energ. electr. Tom 14 Nr. 2 p. 319 – 336 Bucureşti 1964

torului, de caracteristicile sursei, ale liniei etc., nu permit o modificare în limitele largi a diferiților parametri care influențează aceste supratensiuni și în consecință nici o generalizare a rezultatelor obținute. Relațiile teoretice se pretează la generalizări, la analizarea influenței diferiților parametri, însă aplicarea lor întîmpină dificultăți dat fiind complexitatea relațiilor de calcul. Din aceste considerente, utilizarea calculatoarelor electronice pentru studiul supratensiunilor interne și în speță a supratensiunilor ce apar la declanșarea liniilor în gol, prezintă avantaje deosebite.

Dintre calculatoarele electronice, calculatoarele analogice se pretează în mod deosebit la studiul fenomenelor tranzitorii și în consecință și a supratensiunilor interne [10], [11].

Pentru studiul supratensiunilor ce apar la declanșarea liniei în gol s-a utilizat calculatorul analogic neliniar al Institutului de energetică, MECAN II. Într-o primă parte a acestor cercetări s-a considerat linia de înaltă tensiune reprezentată printr-o capacitate concentrată dîndu-se în lucrare rezultatele experimentale obținute și interpretarea lor.

Dat fiind caracterul discontinuu al fenomenului studiat programarea la calculatorul analogic a prezentat unele particularități și a întîmpinat dificultăți care s-au eliminat prin alegerea unor scheme speciale.

2. PROGRAMAREA SCHEMEI LA CALCULATORUL ANALOGIC

Pentru studiul fenomenelor tranzitorii calculatoarele analogice prezintă față de calculatoarele cifrice avantajul de a ține seama într-o mult mai mare măsură de relațiile topologice dintre variabilele mașinii și variabilele sistemului real. Pe de altă parte rezolvarea problemei se face mai repede decît la un calculator cifric, iar posibilitățile de a varia diferiți parametri sînt mai mari, influența variațiilor putîndu-se observa imediat. Calculatoarele cifrice permit stabilirea unor valori mai exacte ale mărimilor studiate.

În cazul supratensiunilor ce apar la declanșarea liniilor în gol, dat fiind ipotezele simplificatoare luate în con iderare, erorile pe care le introduc calculatoarele analogice nu prezintă importanță.

În cadrul problemei studiate de către colectivul de tehnica tensiunilor înalte de la Institutul de energetică al Academiei R.P.R. s-a pus problema verificării ipotezelor teoretice făcute și a relațiilor stabilite privind supratensiunile ce apar la declanșarea liniilor în gol, a comparării rezultatelor obținute cu rezultatele încercărilor experimentale efectuate în sistem, precum și a stabilirii influenței următorilor parametri :

– puterea sursei, respectiv valoarea inductanței și rezistenței sursei;

– capacitatea sursei, determinată de capacitatea echivalentă a transformatorilor, a liniilor legate la stații etc.;

– lungimea liniei deconectate;

– caracteristica întreruptorului (modul de variație a tensiunii de restabilire a arcului electric dintre cuțitele întreruptorului).

Supratensiunile ce apar la declanșarea liniilor în gol se pot studia pornind de la diferite scheme echivalente.

Cele mai multe scheme simplificate studiază fenomenul pe o singură fază, reducînd sistemul din spatele întreruptorului la un generator de tensiune cu impedanță internă zero ce debitează pe o inductanță și o capacitate.

Liniile scurte ce se decuplează în gol se apreciază destul de des prin capacități concentrate plasate după întreruptor. În cazul liniilor cu lungimi

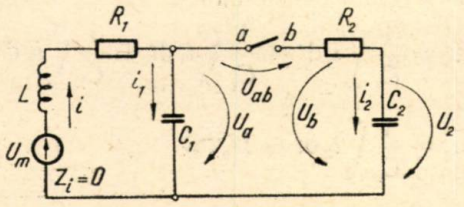


Fig. 1. — Schema echivalentă de calcul.

mari, acestea se apreciază uneori ca simple linii de întîrziere, în care tensiunea de la capătul întrerupt al liniei se regăsește din nou după un timp corespunzător lungimii liniei și vitezei de propagare a undelor electromagnetice.

Schema de studiu adoptată este reprezentată în figura 1 cu următoarele precizări :

a) Sistemul energetic din spatele întreruptorului se consideră ca un generator de tensiune cu impedanță internă nulă și circuitul format din elementele L, C_1, R_1;

b) Întreruptorul este „ideal" în sensul celor spuse anterior cu precizarea că se consideră dată caracteristica tensiunii de străpungere a spațiului dintre contacte funcție de timpul ce trece de la separarea contactelor și pînă la deschiderea completă a întreruptorului ;

c) Linia fără sarcină la capăt s-a considerat scurtă și este reprezentată prin capacitatea C_2 și o mică rezistență în serie, R_2.

Pentru regimul permanent, cînd linia este cuplată, se pot scrie următoarele ecuații în mărimi instanee, valabile pînă la prima trecere prin zero a curentului după ce s-a deschis întreruptorul

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + R_1 i + u_a = U_m \sin \omega t,$$

$$u_b = R_2 i_2 + u_2, \quad u_a = u_b, \tag{1}$$

$$i = i_1 + i_2,$$

$$u_a = \frac{1}{C_1}\int_0^{t_1} i_1 \mathrm{d}t, \quad u_2 = \frac{1}{C_2}\int_0^{t_1} i_2 \mathrm{d}t.$$

Curentul în întreruptor, i_i, este egal cu curentul i_2.

La trecerea curentului prin zero, după momentul t_1, sînt valabile aceleași ecuații cu următoarele modificări :

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + R_1 i + u_a = U_m \sin \omega t,$$

$$i_2 = 0, \quad u_b = u_2, \quad i = i_1,$$

$$u_a = \frac{1}{C_1}\int_0^{t_2} i_1 \mathrm{d}t = \frac{1}{C_1}\int_0^{t_1} i_1 \mathrm{d}t + \frac{1}{C_1}\int_{t_1}^{t_2} i_1 \mathrm{d}t, \tag{2}$$

$$u_b = \frac{1}{C_2}\int_0^{t_2} i_2 \mathrm{d}t = U_b(t_1).$$

Aceste ecuații sînt valabile pînă în momentul t_2 cînd nu mai este îndeplinită inegalitatea

$$u_a(t) - u_b(t) < u_{st}(t). \tag{3}$$

După timpul t_2 cînd inegalitatea (3) nu mai este îndeplinită, se consideră că arcul se reaprinde între contactele întreruptorului ideal și sînt valabile ecuațiile din regimul permanent, pînă la o nouă trecere prin zero a curentului.

Rezolvarea regimului tranzitoriu ce are loc la deschiderea întreruptorului din schema considerată s-a făcut cu ajutorul calculatorului electronic analogic MECAN II.

Ecuațiile (1) și (2) se modelează pe o singură schemă, trecerea de la un grup de ecuații la celălalt realizîndu-se prin comutarea sau deconectarea unor amplificatoare operaționale.

În schema din figura 2 se prezintă succesiunea de operațiuni de rezolvat la calculator precum și schema de programare și schema cu relee.

Închiderea și deschiderea întreruptorului corespunde cu închiderea și deschiderea comutatorului K.

Aceste manevre trebuie făcute în conformitate cu proprietățile întreruptorului ideal :

a) deschiderea comutatorului K_1 se face la trecerea curentului prin zero $(I_i = 0)$;

b) închiderea comutatorului K se face cînd nu mai este îndeplinită condiția $u_{ab} < U_{st}(t)$.

La intrarea blocului I, integrator, se introduc mărimi proporționale cu sinusul, tensiunea u_a și Ri la o scară potrivită și cu semnele corespunzătoare pentru a modela ecuația

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = U_m \sin \omega t - Ri - u_a. \tag{4}$$

La ieșirea blocului I integrator se obține o tensiune proporțională cu mărimea i. Aceasta este introdusă în blocul II „sumator" împreună cu o mărime proporțională cu i_2. La ieșirea blocului II se obține i_1 care satisface relația : $i_1 = i - i_2$.

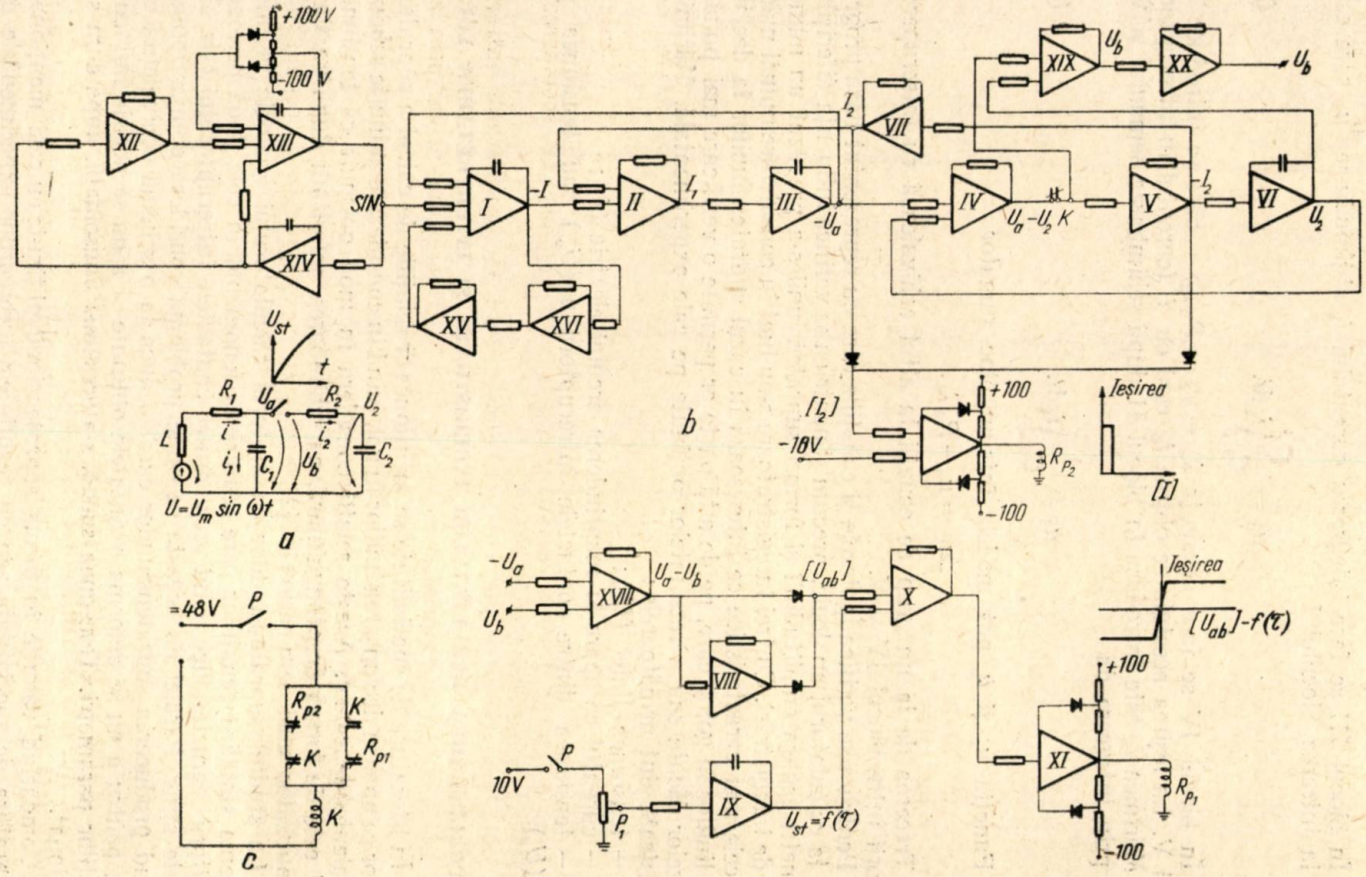


Fig. 2. — Schema completă de programare.

În blocul III se face integrarea curentului i_1 obținîndu-se u_a care este adus la intrarea blocului I

$$u_a = \frac{1}{C_1}\int i_1 \, dt. \tag{5}$$

În blocul IV se face diferența $u_a - u_2 = R_2 i_2$, care se introduce în blocul V. La ieșirea acestuia se obține i_2 egal cu i_i (curentul în întreruptor). Mărimea i_2 este introdusă în blocul II după schimbarea semnului și VI unde prin integrare dă

$$u_2 = \frac{1}{C_2}\int i_2 \, dt. \tag{6}$$

Funcția u_2 și u_a pot modela într-un bloc sumator

$$u_b = u_a - R_2 i_2.$$

Trecerea de la un grup de ecuații la altul echivalează cu întreruperea legăturii între blocul IV și V.

Pentru a se verifica ipotezele și ecuațiile care au reprezentat baza programării la calculatorul analogic, precum și pentru a se verifica influența diferiților parametri asupra amplitudinii și formei supratensiunii s-a prevăzut un număr mare de înregistrări. Cu trei înregistratoare s-au luat în considerare numai mărimile cele mai caracteristice ce interesează în cazul supratensiunilor la declanșarea liniilor în gol și care, pe de altă parte ar permite o verificare mai bună a ipotezelor făcute sau a rezultatelor obținute pe cale experimentală. Mărimile înregistrate sînt următoarele:

– tensiunea liniei (U_b);
– curentul ce apare la reaprinderea arcului electric (I_i);
– tensiunea dintre contactele întreruptorului (U_{ab}) sau tensiunea pe bare (U_a).

3. PRELUCRAREA REZULTATELOR ÎNREGISTRATE ȘI INTERPRETAREA LOR

În literatura de specialitate se menționează relațiile de calcul a supratensiunilor ce apar la declanșarea liniilor în gol, luînd în considerare anumite scheme echivalente de calcul. Aceste relații consideră în mod obișnuit că tensiunea sursei este de formă dreptunghiulară, cu schimbarea polarității după un timp corespunzător unei semiperioade [2].

La studiul supratensiunilor cu ajutorul calculatorului analogic se pune problema stabilirii ecuațiilor care reprezintă fenomenul în cele două perioade tranzitorii caracteristice, cînd arcul dintre contactele întreruptorului este sau nu este stins. Paralel cu aceasta se pune problema considerării unor ipoteze privind producerea supratensiunilor care să ducă la o schemă echivalentă corectă, pentru a nu se deforma rezultatele obținute și a nu se neglija influența diferiților parametri. Tensiunea sursei, s-a presupus sinusoidală, după cum s-a menționat.

Comparînd valorile în forma supratensiunii obținute cu cele menționate în literatura de specialitate sau cu rezultatele încercărilor experimentale din

sistem rezultă o serie de constatări utile. Forma supratensiunii înregistrate este identică cu forma supratensiunii menționate în literatură [19] în cazul cînd linia este reprezentată printr-o capacitate concentrată. În cazul unei linii lungi forma undei de supratensiune este aceeași, cu observația că are suprapusă o serie de oscilații amortizate, datorită propagării undelor de supratensiune de-a lungul liniei și a pierderilor produse de rezistență [2], [3], [21].

În figura 3 se indică o diagramă tip de variație a supratensiunii U_b în cazul schemei programate la calculatorul MECAN II.

Forma curentului de șoc ce apare la reaprinderea arcului electric precum și succesiunea acestor curenți corespunde întocmai cu cele obținute la încercările experimentale din sistem. Forma curentului de șoc și reaprinderile succesive ale arcului electric se pot urmări de asemenea pe fig. 3, totodată se poate observa și forma de variație a tensiunii pe bare U_a.

Pentru a se verifica unele rezultate secundare se vor prezenta pe scurt unele aspecte fenomenologice. La reaprinderea arcului electric apare un regim tranzitoriu care în cazul, arătat coincide cu frecvența dată de relația $\omega_2^2 = \frac{1}{L_1(C_1+C_2)}$ ceea ce se poate constata cu ușurință pe înregistrările făcute.

O dată cu mărirea capacității sursei, supratensiunile pe linie, respectiv pe capacitatea C_2 în cazul schemei 1, scade. În consecință unul dintre mijloacele reducerii supratensiunii de pe linie constă în mărirea capacității echivalente a sursei.

O problemă importantă reprezintă influența caracteristicii întreruptorului asupra amplitudinii supratensiunii [1], [2], [3].

Caracteristica rigidității dielectrice a intervalului dintre contactele întreruptorului diferă după tipul întreruptorului. În figura 3 A din anexă se indică această caracteristică în cazul unui întreruptor cu aer comprimat (curba *1*) și în cazul unui întreruptor cu ulei mult (curba *2*) [2]. Dat fiind caracterul aleatoriu al fenomenului valoarea tensiunii de reaprindere a arcului electric are o zonă de dispersiune neglijată. Tensiunea ce apare între contactele întreruptorului este limitată de caracteristica acestuia.

În figura 4 se arată una din diagramele înregistrate privind tensiunea U_{ab} în cazul unei caracteristici liniare a întreruptorului. Se poate observa foarte bine cum valorile tensiunii U_{ab} dintre contactele întreruptorului, pentru mai multe reaprinderi repetate, se încadrează perfect între două drepte, corespunzătoare polarității pozitive, respectiv negative, a tensiunii.

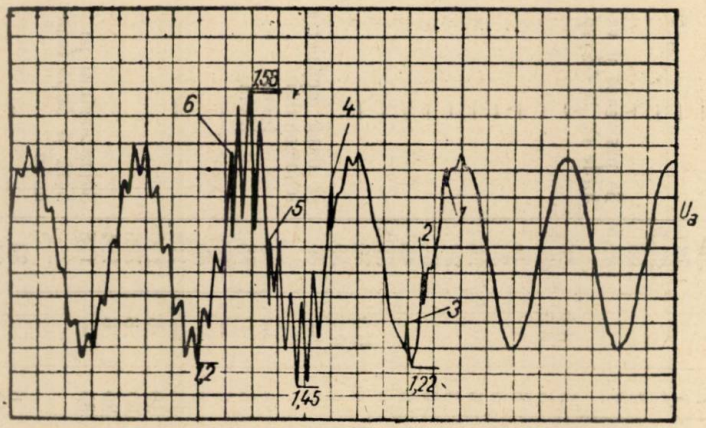
S-a menționat deja că cercetările în această problemă s-au axat în special în direcția obținerii unor rezultate calitative. În acest scop s-au variat diverși parametri care influențează alura supratensiunilor. În tabelă sînt centralizate valorile obținute la un număr de 60 diagrame înregistrate pentru schema din figura 2. Tabela conține valorile parametrilor circuitului electric și a întreruptorului ca date și valorile relative ale supratensiunilor minime și maxime, pe linie, pe bare, supracurentul, numărul reaprinderilor și al supratensiunilor, durata totală a fenomenului de deconectare după faza arc și în unele cazuri durata fazei arc.

Modelarea schemei simple cu parametri apropiați ca valoare cu cei ai sistemului în timpul experiențelor, a dat rezultate comparabile cu cele din

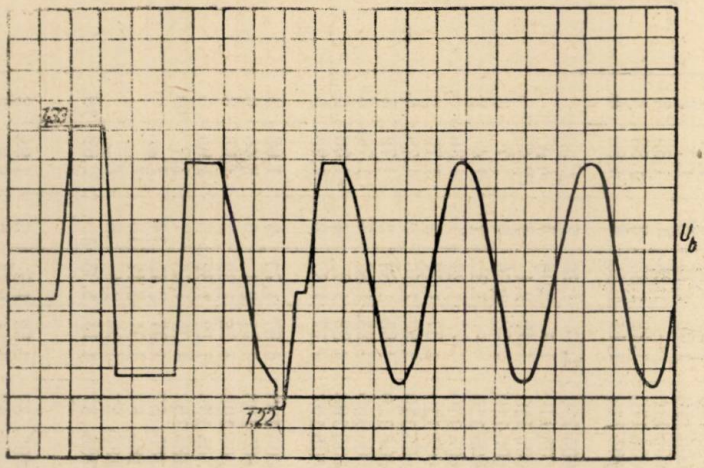
Tabelă

Nr. crt.	Nr. diagramă	Parametrii circuit																	Observații
									Supratensiuni pe linie U_b			Supratensiuni pe bare U_a							
		R_1 [Ω]	R_2 [Ω]	L [H]	C_1 [μF]	C_2 [μF]	S_0 (t)	Puterea sistem [MVA]	k_2 min	k_2 max	Număr	k_1 max	nr. super.	frecvență	Factor supra curent k_{max}	Nr. reaprinderi	Durata arc	Durata totală fenomen după prima stingere [ms]	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	III																		
1	84	10	9	0,074	10	5	0,605	523	1,2	1,6	5	1,2	5	350	6,4	8	—	60	
2	83	10	9	0,074	1	5	0,605	523	1,14	1,62	3	1,66	3	600	4	5		34	2 reaprind. cu osc. 3 sup. pe bară după reaprindere
3	82	10	9	0,074	1	5	0,605	523	1,41	1,95	3	1,99	4	550	6	3		40	4 sup. pe bară după reaprindere
4	81	10	9	0,074	0,25	5	0,605	523	1,18	2,12	7	2,1	6	1 000	7	6		52	4 reaprind. cu osc.
5	80	10	9	0,074	0,25	5	0,605	523	1,34	1,53	2	1,55	3	1 150	4,5	2		23	1 reaprind. cu osc.
6	79	10	9	0,074	5	5	0,605	523	1,02	1,7	2	1,6	3		7,5	4		31	
7	78	10	9	0,074	5	5	0,065	523	1,04	1,74	6	1,73	8		7	7		68	
8	77	10	9	0,074	2	5	0,605	523	1,54	1,68	2	1,62	3		4,5	4		32	1 reaprind. cu osc.
9	76	10	9	0,074	2	5	0,605	523	1,07	1,66	4	1,65	4		6,5	4		44	1 Idem
10	75	10	9	0,074	0,1	5	0,605	523	1,17	1,7	4	1,66	4		5,2	5		35	2 Idem
11	74	10	9	0,704	0,1	5	0,605	523	1,35	1,42	3	1,45	3		4,5	3		25	3 Idem
12	73	10	9	0,074	0,5	5	0,605	523	1,27	1,65	2	1,71	3		4,7	2		24	1 Idem
13	72	10	9	0,074	0,5	5	0,605	523	1,27	1,53	3	1,62	3		4,2	4		25	1 Idem
14	71	10	9	0,074	0,5	1,3	0,605	523	1,43	1,65	3	U_{ab}	—		9	7	5	41	2 Idem
15	70	10	9	0,074	0,5	1,3	0,605	523	1,03	1,7	4	1,67	3		7	6		30	1 Idem
16	69	10	9	0,074	0,5	1,3	0,605	523	1,04	1,43	2	1,37	2		5	5		23,5	—
17	68	10	9	0,074	0,5	1,3	0,605	523	1,13	1,73	3	1,71	3	—	7,5	4	—	32	1 reaprind. cu osc.
18	67	10	9	0,074	0,5	1,3	0,605	523	—	1,35	1	1,6	2	—	6	4		35	—
19	66	10	9	0,074	0,5	0,65	0,605	523	1,26	1,5	2	1,57	4		13	6		46	—
20	66'	10	9	0,074	0,5	0,65	0,605	523	—	1,24	1	1,32	2		7	4		24	—
21	65	10	9	0,075	0,5	0,65	0,605	523	—	1,63	1	1,58	3		10	5		37	—
22	64	10	9	0,074	0,5	0,65	0,605	523	—	1,6	1	1,66	3		13	6		47	—
23	63	10	9	0,074	0,5	0,65	0,605	523	1,18	1,63	2	1,55	4		11	6		45	—

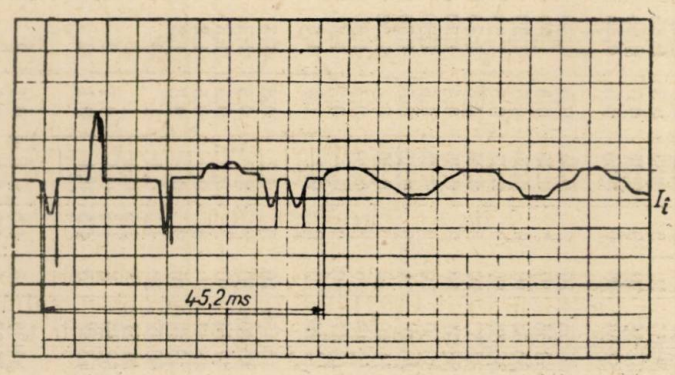
24	62	10	9	0,074	0,5	0,65	0,605	110	—	1,12	1	U_{ab}			7	7	2	41	—
25	61	10	9	0,35	0,5	0,65	0,605	110	1,13	1,63	2	1,67	5		9	6	—	49	U_b nu s-a oprit la maximum
26	60	10	9	0,35	0,5	0,65	0,605	110	1,16	1,72	5	1,7	6		16	10		71	
27	59	10	9	0,35	0,5	0,65	0,605	110	1,34	1,66	2	1,81	3		9	6		44	—
28	58	10	9	0,35	0,5	0,65	0,605	110	1,22	1,74	2	1,67	4		13	5		49	—
29	57′	10	9	0,35	0,5	0,65	0,605	110	1,05	1,75	5	1,7	8		15	7		72	—
30	57	10	9	0,35	0,5	0,65	0,605	110	—	1,28	1	1,35	3		6	7		26,5	—
31	56′	10	9	0,35	0,5	0,65	0,605	110	1,18	1,83	3	1,85	5		14	7		58	—
32	56	10	9	0,35	0,5	0,65	0,605	110	1,14	1,85	3	1,86	5		14,5	7		58,5	Se păstrează şi valorile de la 56 rep.
33	55′	10	9	0,35	0,5	1,30	0,605	110	1,47	1,78	2	U_{ab}			5,3	5	4,5	33	—
34	55	10	9	0,35	0,5	1,30	0,605	110	1,4	2,08	5	U_{ab}			7,0	5	5,0	45,5	—
35	54	10	9	0,35	0,5	1,30	0,605	110	1,49	2,4	4	2,45	5		10,5	8	—	75	—
36	53	10	9	0,35	0,5	1,30	0,605	110	1,52	1,66	2	1,7	3		4,75	5		34	—
37	52	10	9	0,35	0,5	1,30	0,605	110	—	1,3	1	1,4	2		3,7	3		26	—
38	51	10	9	0,35	0,5	1,30	0,605	110	—	1,27	1	1,36	2		4,0	3		27	—
39	50	10	9	0,35	0,5	1,30	0,605	110	1,37	1,77	2	1,75	2		5,0	6		34	—
40	49_b	10	9	0,35	0,5	1,30	0,605	110	1,56	1,76	2	1,79	3	—	6	6		45	—
41	49_a	10	9	0,35	0,5	1,30	0,605	110	1,65	1,83	2	1,72	3		6,5	5		32,5	—
42	48	10	9	0,20	0,5	1,30	0,605	195	1,23	1,82	3	1,75	3		4,75	4	5,5	33	—
43	47	10	9	0,2	0,5	1,3	0,605	193	1,03	1,9	4	1,88	4		8,9	4	4	59	
44	46	10	9	0,2	1,3	1,3	0,605	193	1,17	1,8	3	1,96	5		6,85	6	—	55	şi după încheierea fenomenului
45	45b	10	9	0,2	0,5	1,3	0,605	193	1,67	1,79	2	1,68	3		7	5	—	34	Idem
46	45a	10	9	0,2	0,5	1,3	0,605	193	1,21	2,4	5	2,45	6		—	8	—	63	Idem
47	44′	10	9	0,2	0,5	1,3	0,365	193	1,22	1,32	2	1,58	3		7	6	—	45,2	—
48	44	10	9	0,2	0,5	1,3	0,365	193	1,19	1,32	3	1,65	5		—	9	—	55	—
49	43	10	9	0,2	0,5	1,3	0,185	193	1,05	1,65	7	1,7	10		6,5	18	—	112	—
50	42	10	4,5	0,4	1	3	0,185	87	1,07	2,45	14	U_{ab}			3,7	19	6	170	
51	41	5	4,5	0,4	1	2	0,185	87	1,01	2,47	16	U_{ab}			4,1	30	8	298	
52	40	5	4,5	0,4	0,1	2	0,185	87	1,07	2,1	8	U_{ab}			2,9	20	6	124	
53	39	5	4,5	0,4	0,1	2	0,185	87	1,14	1,95	15	2,02	18		3,1	35	—	178	Supratensiuni pe bară şi după fenomene
54	38	5	4,5	0,4	0,1	2	0,605	87	1,59	1,8	2	1,98	3		2,8	6		34	,,
55	37	1	4,5	0,4	0,1	2	0,605	87	1,15	2,15	5	2,3	6		4,0	10		64	,,
56	36	1	9	0,4	0,1	2	0,605	87	1,1	2,15	3	2,0	2		3,6	6		33	
57	35	1	9	0,4	0,1	1	0,605	87	1,22	2,34	5	2,35	4		6,2	11		62	
58	34	1	9	0,04	0,1	1	0,605	870	1,1	1,85	3	1,84	4		18,5	4		47	Are oscilaţii
59	33′	1	18	0,04	0,1	1	0,605	870	1,07	1,78	2	1,78	3		19,0	3		—	,,
60	33	1	18	0,04	0,1	1	0,605	870	1,05	1,67	3	U_{ab}			21,0	5	6,7	33,5	,,



a



b



c

Fig. 3. — Alura mărimilor ce intervin în fenomenul de supratensiuni la maşina analogică.

sistem (fig. 5) reproducînd corect fenomenele de variație în timp ale curenților și tensiunilor.

Din punctul de vedere al valorilor supratensiunilor se constată de asemenea o concordanță satisfăcătoare. La încercările în sistem supratensiunile pe linie

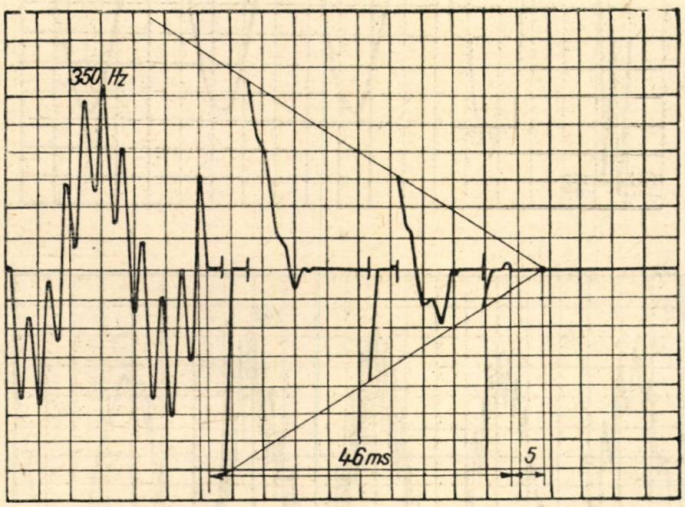


Fig. 4. — Tensiunea de revenire U_{ab} între contactele întreruptorului, obținută pe MECAN II—Diagrama III-55 U_{ab}.

și bară au avut valorile relative 1,35 și 1,23 față de 1,32 și 1,58 obținute prin modelare.

Într-o serie de variante modelate, curentul la reaprindere nu rămîne nul după prima trecere prin zero (fig. 6) ci descrie o serie de oscilații cu frecvență

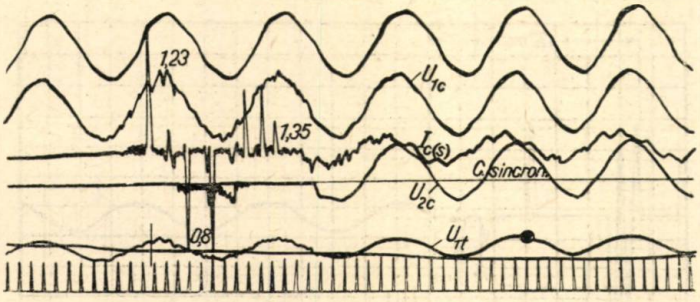


Fig. 5. — Încercări în sistem.

ridicată corespunzătoare circuitului L, $C_1 + C_2$. Rezultatele obținute sînt comparabile cu cele din literatură [22] (fig. 7). La trecerea curentului prin zero arcul nu se stinge deoarece în acel moment nu este îndeplinită inegalitatea $U_{ab} - U_{st} < 0$.

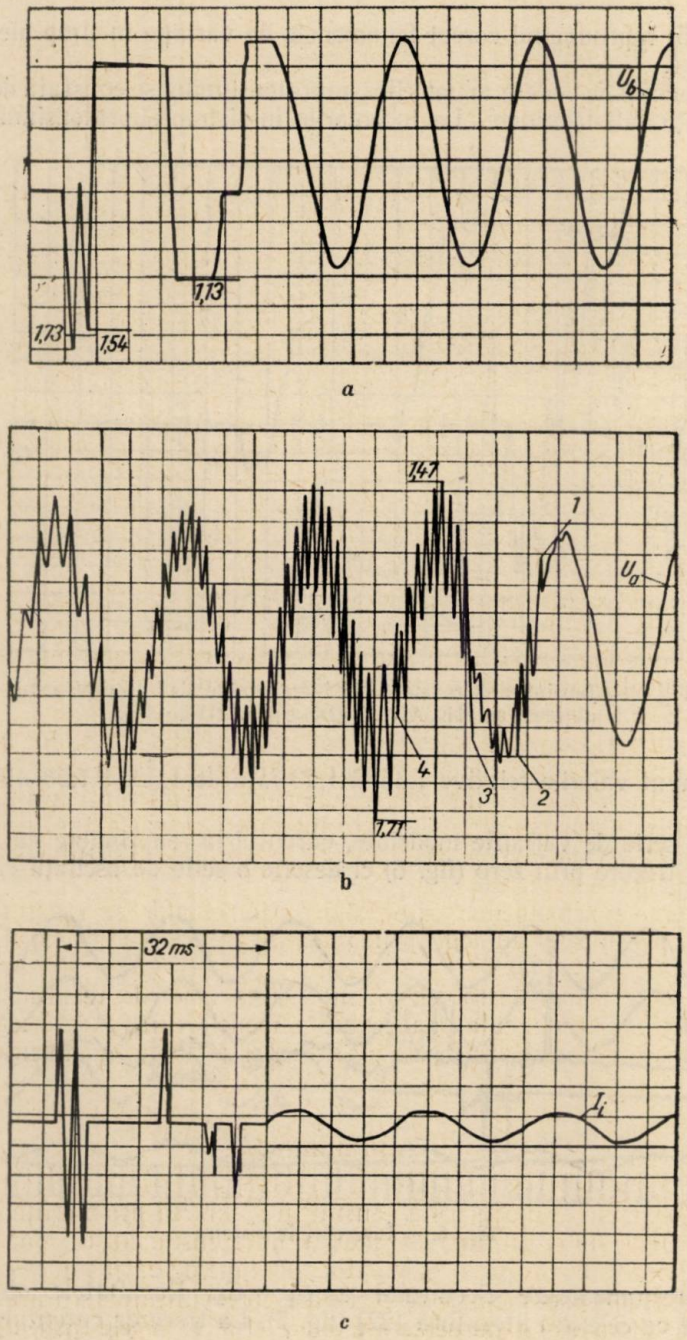


Fig. 6. — Influența frecvenței curentului asupra momentului stingerii.

I. rezultate la mașina analogică: Diagrama III-44

a — supratensiunea pe linie;

b — supratensiunea pe bare;

c — curentul i_i.

Mărirea inductanței sau a capacităților înlătură acest fenomen.

Modelarea efectuată cu întreruptorul ideal, arată că tensiunea între contactele întreruptorului este prea mare — peste valoarea posibilă a rigidității

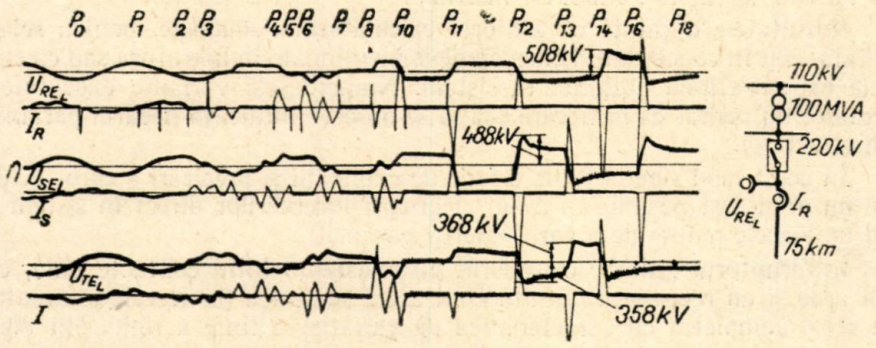


Fig. 7. — II Baatz [22] (fig. 195).

— și de aceea arcul se menține la cîteva treceri prin zero al curentului de înaltă frecvență.

Unele diferențe ce există între curbele care descriu fenomenul real și cele obținute la modelul analogic se datoresc următoarelor cauze:

— întreruptorul ideal nu se găsește în natură;

— modelul ales nu poate reproduce reflexiile de unde ce au loc la capetele liniei. De aici rezultă că trecerile pe model de la un regim la altul se fac în condiții puțin diferite. Modelul dînd soluția unor ecuații diferențiale integrate pe etape cu condiții inițiale rezultate din calculul anterior, rezultatul final al modelului va diferi ca formă față de cazul real experimentat, diferențele crescînd în timpul procesului de integrare;

— frecvențele armonicilor curentului și tensiunilor se regăsesc aproximativ aceleași pe modelul analogic și pe rețea, cu observația că amortizările sînt diferite.

Rezultă că schema aleasă pentru modelarea liniei dă rezultate suficient de bune îndeosebi în cazul liniilor mai scurte; o modelare mai exactă este posibilă prin perfecționarea schemei astfel ca să fie descrise toate fenomenele.

4. CONCLUZII

Scopul principal al modelării a constat în stabilirea posibilității extinderii studiului supratensiunilor interne, respectiv a supratensiunilor ce apar la declanșarea liniilor în gol, cu ajutorul calculatoarelor analogice și o dată cu aceasta în determinarea unei metodologii de cercetare corespunzătoare. Paralel cu stabilirea acestei metodologii de cercetare s-au studiat unele aspecte privind fenomenologia supratensiunilor de declanșare a liniilor în gol, ceea ce a permis deducerea a o serie de concluzii și anume:

Calculatorul analogic poate modela fenomenele tranzitorii de deconectare, ținînd seama de caracteristica întreruptorului. Pentru realizarea trecerii de la un regim de calcul al mașinii la altul (situația cînd arcul arde sau nu) o schemă cu relee poate asigura schimbarea conexiunilor între blocurile operaționale funcție de valorile anumitor mărimi.

Rezultatele obținute cu ajutorul calculatorului analogic, pentru schema studiată, sînt în concordanță cu exemplele menționate în literatură sau cu rezultatele experimentale obținute în sistem. Numeroasele variante executate pe calculator au permis ca în fiecare caz să se observe influența fiecărui parametru în limite largi.

În acest mod s-au obținut o serie de explicații și precizări a căror evidențiere nu ar fi fost posibilă în cazul efectuării încercărilor direct în sistem dat fiind mijloacele reduse de a varia diferiți parametri.

Întreruptorul „ideal" considerat cu rezistența între contacte nulă, cînd arcul arde și cu rezistența infinită cînd arcul se stinge (la trecerea curentului prin zero) completat cu caracteristica de variație în timp a rigidității dielectrice, a permis obținerea unor rezultate bune. Pentru modelarea exactă va fi necesar a se ține seama și de ecuațiile ce descriu legătura între tensiunea arcului electric și curentul întreruptorului real în condițiile suflajului existent.

Este indicat ca pe viitor cercetările să se așeze pe direcția studierii supratensiunilor interne cu ajutorul auxiliarelor de calcul, în speță a calculatoarelor analogice adoptîndu-se scheme mai complexe care să reprezinte mai exact sursa de tensiune, partea deconectată să țină seama de influențele diferiților parametri. Paralel cu aceasta în scopuri de verificare, se impune a se efectua încercări în sistem pentru a ține seama de condițiile reale ce apar în exploatare și pentru a se preciza parametrii ce determină amplitudinea și forma supratensiunilor.

ANEXĂ

1. MODELAREA FUNCȚIEI SINUSOIDALE DE AMPLITUDINE CONSTANTĂ

Obținerea unei funcții sinusoidale pentru alimentarea montajului s-a făcut indirect prin rezolvarea pe calculator a ecuației diferențiale

$$\frac{d^2z}{d\tau^2} + \left(\frac{\omega}{\alpha}\right)^2 z = 0, \tag{1A}$$

ω – pulsația tensiunii,
τ – timpul pe mașină,
$\alpha = \frac{\tau}{t}$ – coeficientul de dilatare al timpului cu condiția inițială $(Z)_{\tau=0} = 100\,V$.

În figura A1 se indică schema de programare adoptată pentru obținerea unei funcții sinusoidale.

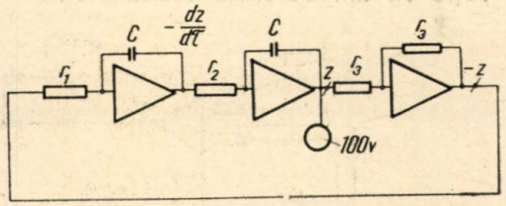


Fig. A1. — Schema de programare a ecuației $\frac{d^2z}{dt^2} + \left(\frac{\omega}{\alpha}\right)^2 z = 0$ cu $z\,(0) = 100$ V pentru obținerea funcției sinusoidale.

De valorile rezistenței r_1, r_2, c depinde frecvența de oscilație a tensiunii Z

$$\frac{1}{r_1 r_2 c^2} = \left(\frac{\omega}{\alpha}\right)^2. \qquad (2A)$$

Măsuri speciale (fig. 2) au asigurat ca amplitudinea tensiunii să rămînă constantă în timp.

2. MODELAREA ÎNTRERUPTORULUI

Modelarea analogică a fenomenelor de întrerupere are ca scop analiza unui proces format dintr-o succesiune de regimuri ce diferă funcțional. Aceste regimuri sînt în principiu de trei feluri :

a) funcționarea cu arc, continuare a curentului de regim stabil ;

b) funcționarea în situația fără arc — curenul egal cu zero ;

c) funcționarea cu arcul reaprins.

Din punctul de vedere al programării matematice faza „c" nu diferă de faza „a".

Întreruptorul are sarcina de a schimba regimurile de funcționare a mașinii respectiv modelului, asigurînd condiții cît mai apropiate de cele naturale. Modelarea întreruptorului real este o problemă dificilă datorită caracteristicii neliniare a arcului electric [12], [13]. De aceea, întreruptorul se consideră ideal, atît în practica modelării [14], [15], [16], [17] cît și în calculul analitic [18], [19].

Idealizarea caracteristicii funcționale a întreruptorului constă în aceea că arcul se consideră avînd rezistența nulă, iar după stingerea arcului spațiul disruptiv recîștigă brusc rigiditatea dielectrică corespunzătoare distanței dintre contacte și a caracteristicilor izolante a mediului de stingere [15], [20]. Curentul întrerupt fiind alternativ se consideră că stingerea lui are loc la prima trecere prin zero. Trecerea de la un regim de funcționare la altul, în schema de programare la calculatorul analogic, menționată la capitolul 3, se realizează cu ajutorul comutatorului K_1.

Pentru manevrarea comutatorului K_1, s-a conceput o schemă de automatizare cu relee ce sesizează trecerile prin zero ale curentului și care compară tensiunea dintre contactele întreruptorului U_{ab} (obținut din calculatorul analogic) cu caracteristica $U_{st}(t)$ și comandă corespunzător închiderea sau deschiderea.

În figura A2 se prezintă principial această schemă.

Releul R_{p_1} acționează cînd $|U_{ab}| - U_{st} > 0$. Releul R_{p_2} acționează cînd I_i are o valoare foarte mică (pragul de sensibilitate al releului R_{p_2}) în comparație cu amplitudinea mărimii I_i.

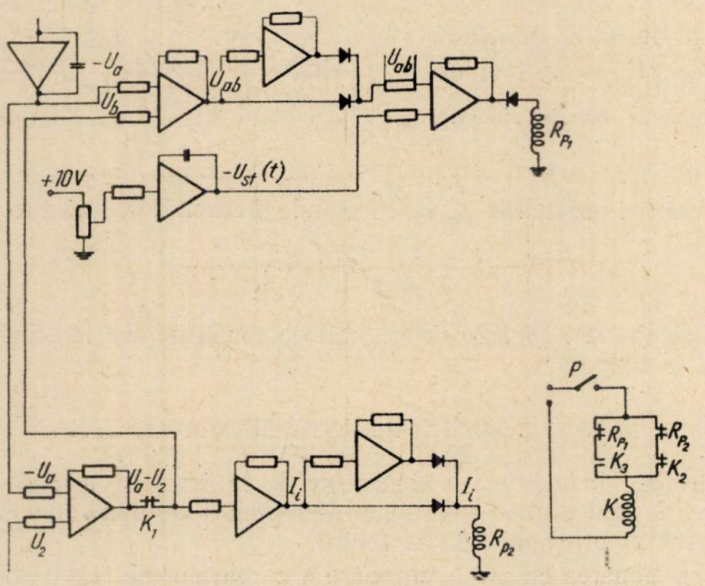


Fig. A2. — Schema de principiu a modelării întreruptorului ideal.

În regimul permanent al schemei, contactul K_1 este închis.

Cînd se comandă pornirea schemei se închide cheia P care pornește totodată și funcția $U_{st}(\tau)$. Aceasta corespunde momentului separării contactelor întreruptorului.

Arcul se stinge la prima trecere a curentului prin zero, adică la $I_i = 0$; R_{p_2} se dezexcită și contactul R_{p_2} se închide comandînd releul K. Acesta prin contactul normal închis K_1 desface legătura blocurilor operaționale.

Cînd se produce reaprinderea arcului, $|U_{ab}| - U_{st} > 0$, releul R_{p_1} se excită și prin contactul R_{p_1} taie alimentarea releului K, determinînd amplificatoarele operaționale să integreze, de la condițiile rămase din etapele anterioare, ecuațiile corespunzătoare existenței arcului.

Schema lucrează în acest fel pînă cînd nu mai este posibil ca $|U_{ab}|$ să depășească $U_{st}(\tau)$.

Modelarea caracteristicii întreruptorului $U_{st}(t)$ s-a făcut în prima aproximație considerînd că dependența tensiunii de străpungere funcție de timp este o dreaptă (fig. A3). Obținerea unei tensiuni proporționale cu timpul (curba *3*) se face cu ajutorul unui bloc integrator căruia i se aplică la intrare o tensiune constantă. Acesta ar fi echivalentul rezolvării ecuației diferențiale

$$\frac{du}{dt} = A \qquad \text{care are soluția} \qquad (3A)$$

$$u = At + B \qquad B = 0. \qquad (4A)$$

În schemă (fig. 2) se observă că acest serviciu este îndeplinit de blocul IX ce are la intrare potențiometrul P_1 cu ajutorul căruia se poate varia panta dreptei modelate.

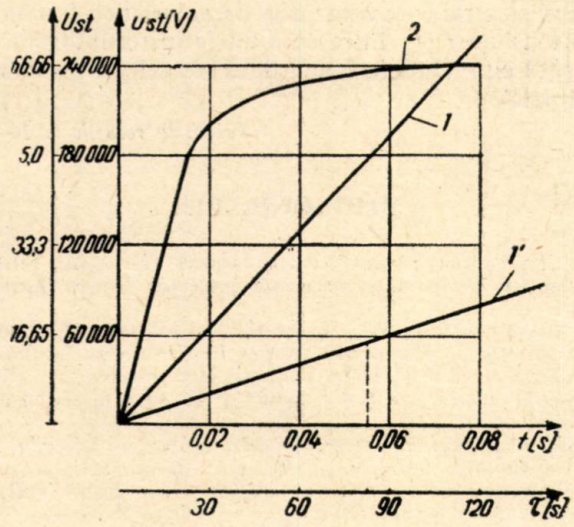


Fig. A3. — Caracteristica întreruptorului.

Pornirea integratorului se face prin contactul cheii P (fig. A2 și 2) simultan cu pornirea schemei care comută blocurile de calcul conform rezultatelor intermediare.

În cazul în care se dorește modelarea unei caracteristici nelineare (fig. A3 curba 2) aceasta se realizează prin introducerea unui bloc funcțional special la ieșirea blocului IX descris mai sus (fig. 2).

3. OBȚINEREA VALORII ABSOLUTE A UNEI VARIABILE

O problemă deosebită a constituit-o realizarea unui montaj care să primească la intrare o funcție, iar la ieșire să se obțină valoarea absolută a ei.

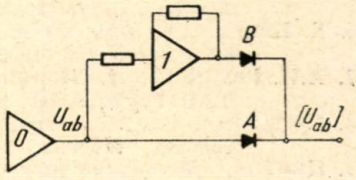


Fig. A4. — Schema de montaj pentru modelarea valorii absolute a unei variabile.

În figura A4 se prezintă acest montaj. Funcția care se obține la ieșirea amplificatorului „O" intră în amplificatorul operațional 1 (care avînd rezistențele la intrare și reacție egale, este un bloc ce realizează numai schimbarea semnului funcției ce trece prin el) după care trece printr-o diodă la ieșirea montajului.

Cînd ieșirea amplificatorului „O" este pozitivă, tensiunea la borna de ieșire se transferă prin dioda *A*, cînd este negativă își schimbă semnul prin inversorul 1 și apare la ieșirea montajului prin dioda *B*.

Această problemă se pune la compararea tensiunii U_{ab} cu tensiunea de restabilire a arcului electric corespunzător caracteristicii funcționale a întreruptorului, deoarece tensiunea U_{ab} între contactele întreruptorului este alternativă și trebuie comparată cu o caracteristică dată numai prin ramura pozitivă (rigiditatea între contacte).

Primit la redacție la 10 martie 1964.

BIBLIOGRAFIE

1. А. Долгинов, *Перенапряжения в электрических системах*, ГЭИ, Москва, 1962.
2. И. Л. Сиротински, *Техника высоких напряжений*. Часть третья. ГЭИ, Москва, 1962.
3. G. Drăgan, I. Adămuț, M. Petcu, B. Popa, Al. Ionescu, M. Tendler, *Determinarea supratensiunilor produse de declanșarea liniilor în gol pentru alegerea nivelului de izolație a liniilor de înaltă tensiune* (sub tipar).
4. G. Drăgan, *Studiul analitic al supratensiunilor ce apar la declanșarea liniilor în gol*. Com. Inst. polit., 1962.
5. B. Popa, *Stabilirea schemei de încercare pentru măsurarea nivelului supratensiunilor ce apar la declanșarea liniei în gol*. St. cerc. energ., Seria A, **12**, *4* (1962).
6. — *Erorile de măsură ale schemelor de înregistrare a supratensiunilor interne*. St. cerc. energ., seria A, **12** 2, 324 (1962).
7. A. Ionescu, B. Popa, M. Tendler, *Încercări pentru determinarea comportării întreruptorului I.U.P. — 110 la ruperea curenților de scurtcircuit și la declanșarea liniilor în gol*. Energetica, *7* (1963).
8. B. Mathe, Cîrstea și alții, *Cercetarea capacității de comutație a întreruptorului I.U.P. — 110 în condiții de laborator și de rețea*. St. cerc. energ., *4* (1963).
9. I. Adămuț, *Analiza fenomenului de deconectare a unei linii în gol, la un întreruptor cu ulei puțin*. St. cerc. energ., A, *1* (1964).
10. P. Coroller, *The analogue computer, its employment and importance in the computer centre*. BBC Rev., **48**, *5/6* 309 (1961).
11. E. Fassler, *Methods of investigation electricity networks*. BBC Rev., **48**, *5/6* 313 (1961).
12. A. Kopplin, *Untersuchung des Löschverhaltens eines 110-KV Expansionsschalter mit Hilfe einer Nachstrom-Messapparatur*. Diss. TU Berlin D. 83 s. (1952).
13. O. Mayer, *Aufgaben und Lösungen aus der Theorie der Gasentladungen, vor allem des Lichtbogens*. VDE Buchreihe Band 3. Anwendung elektrischer Rechenanlagen in der Starkstromtechnik, Berlin, 1958, 77.
14. Gh. Hortopan, *Analizatorul de rețea pentru studiul fenomenelor tranzitorii*. Electrotehnica, **8**, *12*, 417 (1960).
15. H. Kindler, *Beitrag zur Untersuchung der Vorgänge beim Abschalten leerlaufender Leitungen in Hochspannungsnetzen*. ENZ A, **78**, *13*, 449 (1957).
16. K. Kriechbaum, *Über die Messung der Einschwingspannung im Netzanalysator*. ETZ-A, **80**, *7* aprilie 193 (1959).
17. А.И. Груздев, Л. Левинштейн, *Электродинамические модели лабораторий*, ТВН Труды ЛПИ 195 (1958).
18. Герштонович, *Выключатели переменного тока высокого напряжения*. Госэнергоиздат, Москва, 1958.
19. Цеиров, *Воздушные выключатели высокого напряжения*, Госэнергоиздат, Москва, 1957.
20. K. Kriechbaum, *Netzanalysator zur Messung der Einschwingspannung*. ETZ-A, **78**, *17*, 593 (1957).
21. Horst Nasko, *Beitrag zur Untersuchung der Vorgänge beim Abschalten leerlaufender homogener Leitungen in Hochspannungsnetzen*. ETZ-A, **2**, 39—45 (1962).
22. H. Baatz H., *Überspannungen in Energieversorgungsnetzen*. Berlin-Heidelberg, 236 (1956).

ANALIZA FACTORILOR CE DETERMINĂ REPARTIŢIA ECONOMICĂ A PUTERILOR ÎNTRE CENTRALELE UNUI SISTEM ELECTROENERGETIC

DE

E. ARIE, M. POMÎRLEANU şi P. NICOLAE

621.311.162.003.1

1. INTRODUCERE

Cantităţile mari de combustibil ce se consumă anual de către centralele termoelectrice, fac ca economii relativ mici de ordinul unor fracţiuni de procente să reprezinte sume însemnate la scara sistemelor electroenergetice în dezvoltarea lor actuală. Aceasta explică interesul crescînd manifestat în ultimul deceniu pentru repartiţia economică a puterilor între centralele termoelectrice, cît şi între acestea şi centralele hidroelectrice [1], [2].

Repartiţia economică a puterilor între centralele unui sistem electroenergetic depinde de cantitatea de apă disponibilă pentru centralele hidroelectrice, de fluctuaţiile puterii cerute de consumatori, de caracteristicile economice ale centralelor şi de pierderile în reţele [3], [4]. Pentru a determina importanţa acestor factori în exploatarea economică a sistemului, precizia şi volumul de informaţii necesare precum şi pentru a deduce eventuale posibilităţi de simplificare a calculelor, s-au studiat efectele acestor factori asupra repartiţiei optime a puterilor, în cazul unui sistem electroenergetic complex, fomat din cinci centrale termoelectrice şi două centrale hidroelectrice. Calculele au fost efectuate cu ajutorul calculatorului analogic MECAN-II, al Institutului de energetică al Academiei R.P.R. [5].

Calculul repartiţiei optime a puterilor între centrale s-a făcut în următoarele ipoteze:

a) Criteriul de optimizare admis este acela al consumului minim de combustibil convenţional;

St. cerc. energ. electr. Tom. 14 Nr. 2 p. 337–356 Bucureşti 1964

b) La calculul repartiţiei optime, s-a ţinut seama de efectul pierderilor în reţeaua electrică de transport;

c) Intervalul pentru care se face optimizarea este de 24 ore;

d) Volumul total de apă disponibil în intervalul de 24 ore considerat pentru una din centralele hidroelectrice este limitat la o valoare fixă; înălţimea de cădere nu variază sensibil, iar centrala funcţionează în paralel cu celelalte centrale în întreg intervalul de timp considerat;

e) O altă centrală hidroelectrică funcţionează ca centrală de vîrf debitînd o putere constantă timp de 5 ore pe zi;

f) Puterile ce pot fi debitate de centrale sînt limitate superior şi inferior.

Considerentele care au stat la baza alegerii exemplului şi a condiţiilor de calcul, au fost:

– alegerea criteriului consumului minim de combustibil convenţional reprezintă un caz particular, a cărui formulare matematică este totuşi aproape identică cu aceea a criteriului minimului de cost al producţiei de energie electrică, astfel încît din punct de vedere metodic, rezultatele obţinute sînt generale;

– exemplul de calcul ales, a permis evidenţierea tuturor factorilor care prezintă importanţă în calculul repartiţiei economice a puterilor într-un sistem electroenergetic: caracteristicile centralelor, variaţia sarcinii, debitul de apă disponibil la centralele hidroelectrice (sau cantitatea totală de combustibil ce trebuie prelucrat de anumite centrale termoelectrice), pierderile în reţelele electrice de transport.

2. ECUAŢIILE CARE DETERMINĂ REPARTIŢIA ECONOMICĂ A PUTERILOR ÎNTRE CENTRALE ŞI SCHEMA DE MODELARE PE CALCULATORUL ANALOGIC NELINIAR MECAN II

Problema repartiţiei optime a puterilor între centralele termo-şi hidroelectrice ale unui sistem electroenergetic, revine la calculul minimului unei funcţii

$$C = \int_0^T C_0 (P_1, P_2 \ldots P_n) \cdot \mathrm{d}t \tag{1}$$

respectînd condiţiile

$$\int_0^T V_{0j} (P_j) \cdot \mathrm{d}t = V_j \qquad j = m + 1, \ldots, n, \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} P_i - \mathrm{p} = P_s(t), \tag{3}$$

$$P_{i\,\min} \leqslant P_i \leqslant P_{i\,\max} \qquad i = 1 \ldots n \tag{4}$$

unde

$P_1, \ldots, P_n$ sînt puterile electrice debitate în reţea de către cele n centrale termo-şi hidroelectrice, p – reprezintă pierderile în reţele, $P_{i\,\min}$ şi $P_{i\,\max}$ sînt limitele între care variază puterea ce poate fi debitată de centrala i, $P_s(t)$ – puterea cerută de totalitatea consumatorilor din sistem în momentul t.

Din totalul de n centrale, m centrale termoelectrice au un consum total de combustibil nedeterminat. Restul de $(n-m)$ centrale sînt fie centrale hidroelectrice cu rezervor de acumulare permițînd compensarea variațiilor de debit pe un interval mai mare decît T și care consumă un volum total de apă determinat V_j în intervalul de timp T, fie centrale termoelectrice pentru care consumul total de combustibil în intervalul de timp T este impus.

Dacă optimizarea repartiției puterilor generate, se face pe baza criteriului minimului de consum de combustibil convențional, $C_0\ (P_1 \ldots P_n)$ reprezintă consumul de combustibil convențional în unitatea de timp la toate centralele termice, cu consum nedeterminat, iar C consumul total de combustibil convențional în intervalul T.

În acest caz, funcția C_0 are expresia

$$C_0 = \sum C_{0i}\ (P_i), \tag{5}$$

unde C_{0i} este consumul de combustibil convențional în unitatea de timp la centrala i, care pentru o schemă de funcționare cunoscută a centralei, este o funcție neliniară cunoscută de puterea P_i debitată de centrala respectivă în sistem.

Datorită funcționării continue a calculatorului analogic este indicată formularea problemei în modul prezentat, adică folosind variabile continue și rezolvarea ei prin metoda variațională, folosind ecuațiile Euler-Lagrange care conduc la următoarele relații pentru determinarea regimului optim:

$$\frac{\dfrac{\mathrm{d}C_{0i}}{\mathrm{d}P_i}}{1-\dfrac{\partial p}{\partial P_i}} = \ldots = \frac{\dfrac{\mathrm{d}C_{0m}}{\mathrm{d}P_m}}{1-\dfrac{\partial p}{\partial P_m}} = \frac{\gamma_j \cdot \dfrac{\mathrm{d}V_{0j}}{\mathrm{d}P_j}}{1-\dfrac{\partial p}{\partial P_j}} = b_0 \qquad \begin{matrix} i = 1 \cdots m \\ j = m+1 \cdots n \end{matrix} \tag{6}$$

Sistemul de ecuații (6) trebuie completat cu condițiile la frontieră (2), (3), (4). Parametrii Lagrange γ_j se aleg astfel încît să fie satisfăcute aceste condiții.

Pentru modelarea pe calculatorul analogic, relațiile (6) se exprimă sub forma

$$b_i = b_0\,(1-\sigma_i) \qquad i = 1 \ldots m \tag{7}$$

$$q_j = \frac{1}{\gamma_j} \cdot b_0\,(1-\sigma_j) \qquad j = m+1 \ldots n \tag{8}$$

unde

$b_i = \dfrac{\mathrm{d}C_{0i}}{\mathrm{d}P_i}$ – este creșterea relativă a consumului orar de combustibil convențional la centrala i;

$q_j = \dfrac{\mathrm{d}V_{0j}}{\mathrm{d}P_j}$ – este creșterea relativă a debitului de apă consumat de centrala hidroelectrică j;

$\sigma_i = \frac{\partial p}{\partial P_i}$ — este creşterea relativă a pierderilor de transport datorită creşterii unitare a puterii debitate de centrala i;

b_0 — este o constantă a cărei interpretare fizică este creşterea relativă a consumului total orar de combustibil la o creştere unitară a puterii totale cerute de consumatori.

În figura 1, este reprezentată schema de modelare a relaţiilor de optimizare a repartiţiei pentru exemplul de calcul considerat.

Curba de durată a puterii totale, generate de cele 7 centrale considerate fiind liniară, s-au modelat relaţiile

$$P_T(t) = P_{T\min} + \frac{P_{T\max} - P_{T\min}}{T} \int_0^t dt, \text{ şi } P_T = \sum P_i$$

cu ajutorul integratorului I_1 (fig. 1).

În calculele comparative efectuate pentru analiza efectului diferiţilor factori asupra repartiţiei economice, s-a avut în vedere ca pentru comparaţie să se calculeze de fiecare dată consumul total de combustibil corespunzător aceleiaşi curbe de durată $P_s(t)$ a consumului de energie electrică, unde

$$P_s(t) = P_T(t) - p. \tag{9}$$

În locul relaţiei

$$P_T = \sum P_i \tag{10}$$

s-a folosit relaţia integrală

$$\int (P_T - \sum P_i) \cdot dt = b_0, \tag{11}$$

relaţie care conduce la o valoare staţionară pentru b_0 numai dacă relaţia (10) este îndeplinită.

Folosind pentru modelarea relaţiei (11) un integrator, I_2, cu o constantă de timp suficient de mică pentru ca $P_T(t)$ să poată fi considerat constant în intervalul în care integratorul I_2 se găseşte în regim tranzitoriu şi introducînd valoarea b_0 din termenul al doilea al relaţiei (11) în egalităţile (7,8) se determină pentru fiecare valoare P_T valorile corespunzătoare ale puterilor ce trebuie debitate de fiecare centrală, pentru a satisface relaţiile (7), (8) şi (10). Pentru aceasta se modelează funcţiile neliniare:

$$P_i = f_i(b_i) \text{ şi} \tag{12}$$

$$P_j = f_j(q_j), \tag{13}$$

ce dau dependenţa puterilor active P_i, P_j de creşterile relative b_i ale consumului orar de combustibil convenţional respectiv q_i ale debitului cu ajutorul generatoarelor de funcţii $F_1 \ldots F_7$.

Pentru modelare, caracteristicile neliniare din relaţiile (12) şi (13) au fost aproximate prin segmente de dreaptă cu pante monoton crescătoare (vezi fig. 2) modelarea s-a făcut cu generatoarele de funcţii ale maşinii.

Pentru verificarea respectării condiţiei (2) s-a prevăzut integratorul I_6.

Volumul total de combustibil C al centralelor termoelectrice s-a calculat cu ajutorul relațiilor

$$C = \int_0^T (\sum C_{0i}) \cdot dt, \tag{14}$$

$$C_{0i} = F_i(P_i), \tag{15}$$

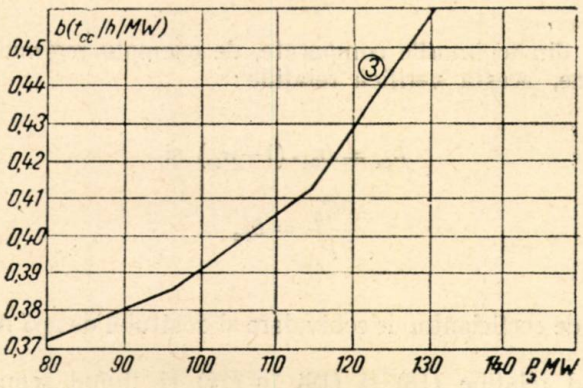


Fig. 2. — Caracteristică de creșteri relative ale consumului de combustibil orar al unei centrale termice.

modelate cu generatoarele de funcții $F_8 \ldots F_{10}$ și integratorul I_5; $F_i(P_i)$ sînt funcțiile neliniare care exprimă consumurile orare de combustibil ale centralelor termice în funcție de puterile debitate în rețea.

Astfel, în ipoteza unor erori asupra caracteristicilor creșterilor relative de consum de combustibil introduse voit în calculul repartiției, se obține totuși în mod corect consumul total de combustibil și deci consumul suplimentar, datorit acestor erori.

Respectarea condiției (4) a fost asigurată prin adăugarea unor limitatori formați din diode, la amplificatorii operaționali, $\Sigma_8 \ldots \Sigma_{13}$ ceea ce a limitat valorile mărimilor $b_i' = b_i - b_{i\min}$ în domeniul

$$0 \leqslant b_i' \leqslant b_{i\max}',$$

căruia îi corespunde pentru P_i domeniul

$$P_{i\min} \leqslant P_i \leqslant P_{i\max},$$

unde $P_{i\min}$ și $P_{i\max}$ sînt limitele între care pot varia puterile debitate de centrale în rețea, iar $b_{i\min}$ și $b_{i\max}$ sînt valorile corespunzătoare ale creșterilor relative ale consumului orar de combustibil convențional.

La compararea diferitelor variante, dacă diferențele consumurilor de combustibil au rezultat relativ mici, s-au folosit pentru calculul diferențelor

consumurilor orare de combustibil și apă, relațiile

$$\Delta C_0 = \sum_i \int_{P_{ia}}^{P_{ib}} b_i \cdot dP_i + \frac{\partial C_0}{\partial P_s} \cdot \Delta p, \tag{16}$$

$$\Delta V_{0j} = \int_{P_{ja}}^{P_{jb}} q_j \cdot dP_j + \frac{\partial V_0}{\partial P_s} \cdot \Delta p. \tag{17}$$

Dacă unul din regimurile comparate, de exemplu regimul a, corespunde repartiției optime, acesta verifică relațiile:

$$b_{ia} = b_{0a} \cdot (1 - \sigma_{ia}) \text{ și} \tag{18}$$

$$\frac{\partial C_0}{\partial P_{sa}} = b_{0a} \tag{19}$$

(ținînd seama și de coeficientul de echivalare al debitului de apă necesar la repartiție optimă).

Introducînd relațiile (18) și (19) în (16) și ținînd seama de faptul că $\sum_{i=1}^{n} \Delta P_{i,b-a} = 0$ rezultă

$$\Delta C_0 = \sum \int_{P_{ia}}^{P_{ib}} h_i \cdot dP_i + b_{0a} \cdot \sum_e \sum_k B_{ek} \cdot \Delta P_{e,b-a} \cdot \Delta P_{k,b-a} \tag{20}$$

unde

$$h_i = b_i - b_{0a} \cdot (1 - \sigma_{ia}).$$

Relația (20) a permis combinarea calculului analogic al repartiției optime a puterilor între centrale, cu calculul numeric al diferențelor de consum de combustibil corespunzătoare variantelor comparate, de exploatare a sistemului electroenergetic.

Pentru a verifica precizia de calcul a diferențelor de consum de combustibil, realizabilă la aplicarea relației (20) s-a calculat eroarea probabilă pentru valori medii ale mărimilor ce intervin în relație.

În ipoteza unor erori relative probabile de 1% la determinarea puterilor corespunzătoare repartiției optime, a rezultat o eroare relativă probabilă de 7%, asupra diferenței de consum orar de combustibil în cazul a două variante comparate, caracterizate prin diferențe ale puterilor repartizate pe centrale de 10–20%. Întrucît valoarea diferențelor consumului de combustibil în cazul variantelor comparate a fost în general sub 1% din consumul total de combustibil, rezultă că mărimea absolută a erorii reprezintă 0,07% din consumul total de combustibil, astfel încît precizia realizabilă prin aplicarea relației (20) este satisfăcătoare.

3. COMPARAREA ECONOMICITĂȚII DIFERITELOR MODURI DE REPARTIȚIE A ABATERILOR PUTERII SARCINII FAȚĂ DE PROGNOZĂ

Pentru a deduce cu ce exactitate trebuie cunoscută puterea absorbită de totalitatea consumatorilor și a compara eficacitatea diferitelor moduri de reglaj a puterilor centralelor, s-au comparat consumurile de combustibil ale centralelor termoelectrice din schema din figura 1, în ipoteza că prognoza graficului de sarcină este corectă în medie, dar apar abateri ale sarcinii față de această prognoză medie, avînd aceleași caracteristici statistice cu cele observate în sistemul electroenergetic național.

Caracteristicile statistice ale abaterilor față de prognoză au fost determinate experimental pe un eșantion al curbelor de sarcină ale sistemului electroenergetic național, corespunzător unei perioade de două săptămîni (zile de lucru). S-a presupus curba prognozei identică cu graficul de sarcină mediu pentru perioada considerată.

Din prelucrarea datelor obținute, au rezultat următoarele caracteristici statistice ale abaterilor sarcinii față de curba medie (prognoză):

– Dispersia abaterilor este maximă în zonele curbei de sarcină în care panta de variație a sarcinii este mare. Deoarece curba de sarcină parcurge în aceste ore întregul domeniu de variație a puterilor, se poate trage concluzia că valoarea dispersiei abaterilor nu depinde de valoarea puterii medii în jurul căreia oscilează. Se poate deci folosi valoarea abaterii medii pătratice pe întregul interval, care a rezultat egală cu 2,8%.

– Istoriograma abaterilor sarcinii față de curba prognoză, verifică cu o bună aproximație o lege de repartiție normală, lege care a fost admisă în calculele în care abaterea sarcinii față de prognoză a intervenit ca mărime statistică.

S-a presupus că pentru graficul prognoză s-au stabilit programele de bază ale centralelor cu ajutorul unui calcul de repartiție optimă iar abaterile față de prognoză pot fi acoperite în unul din următoarele moduri:

a) Abaterile de putere se repartizează în fiecare moment între centrale conform relațiilor ce conduc la consum de combustibil minim;

b) Abaterile de putere sînt preluate în întregime de o centrală hidroelectrică;

c) Abaterile de putere sînt repartizate între centrale proporțional cu puterile acestora, pînă la atingerea puterilor maxime.

Pentru diferite valori medii ale sarcinii $\overline{P}_s$ s-au determinat consumurile orare suplimentare de combustibil și debitul de apă orar suplimentar în funcție de abaterea sarcinii față de prognoză ΔC_0 $(\Delta P_s, \overline{P}_s)$ și $\Delta q\,(\Delta P_s, \overline{P}_s)$, la reglajul conform alternativelor *b* și *c*, față de aplicarea reglajului după alternativa *a* (repartiție optimă momentană).

În acest calcul, s-au folosit relațiile (17) și (20) cu

$$P_{ib} - P_{ia} = \Delta P_i = \frac{K_i}{\Sigma K_i} \Delta P_T. \tag{21}$$

În ipoteza că reglajul frecvenței este realizat numai cu centrala hidroelectrică 7

$$K_7 = 1;\ K_i = 0 \quad \text{pentru } i \neq 7.$$

În ipoteza că toate centralele participă la reglajul frecvenţei, s-au luat pentru K_i valori proporţionale cu puterea maximă pentru toate centralele pentru care

$$P_i + \Delta P_i \leqslant P_{i\max}. \tag{22}$$

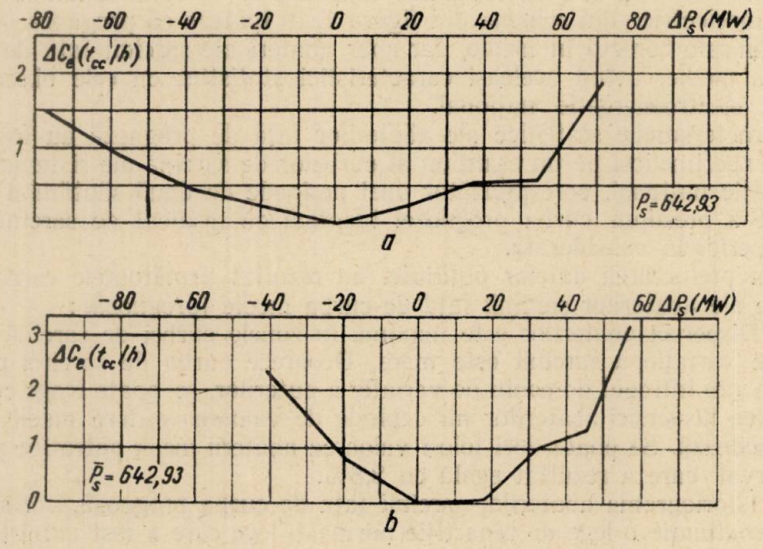


Fig. 3. — Caracteristicile consumului de combustibil orar suplimentar în funcţie de abaterile de putere de la program ; *a* — în ipoteza reglării cu toate centralele ; *b* — în ipoteza reglării cu centrala hidroelectrică nr. 7.

După atingerea limitei superioare $P_{i\max}$ s-a admis $K_i = 0$.

Mărirea consumului de apă acumulată conduce la o micşorare a volumului de apă disponibil pentru acoperirea curbei de sarcină în zilele următoare şi deci la o mărire a consumului de combustibil. Studiul variaţiei consumului de combustibil în funcţie de volumul de apă disponibil (vezi punctul 4) a permis determinarea unui coeficient mediu de echivalare al consumului de apă suplimentar, cu ajutorul căruia au rezultat caracteristicile de consum suplimentar orar echivalent de combustibil în funcţie de abaterea sarcinii ΔP_s faţă de prognoză $\overline{P}_s$: ΔC_e (ΔP_s, $\overline{P}_s$), la reglajul conform alternativelor *b* şi *c*, faţă de aplicarea reglajului după *a* (repartiţia optimă momentană) redate în figurile 3 *a*, *b*.

Ţinînd seama de probabilitatea ca abaterile reale să ia anumite valori, s-au dedus din caracteristicile de consum suplimentar de combustibil şi de debit de apă suplimentar, valoarea probabilă a consumului suplimentar zilnic de combustibil şi de apă acumulată şi anume :

— În ipoteza *b* (reglaj cu o centrală hidroelectrică)

$\Delta C_e = 0{,}33\%$ din consumul total zilnic de combustibil convenţional (respectiv 31% din economia realizabilă prin optimizarea repartiţiei) ;

— În ipoteza *c* (reglaj cu toate centralele)

$\Delta C_e = 0{,}26\%$ din consumul total zilnic din combustibil convențional (respectiv 25% din economia realizabilă prin optimizarea repartiției).

Se observă că cele două ipoteze de reglaj sînt practic echivalente, cea de-a doua fiind ceva mai favorabilă în cazul particular al schemei considerate.

Rezultatele obținute exemplifică posibilitățile de aplicare a metodei de calcul elaborate, la problema găsirii soluțiilor optime pentru reglajul operativ al puterilor centralelor.

4. INFLUENȚELE INEXACTITĂȚILOR ÎN MODELAREA CARACTERISTICILOR ECONOMICE A CENTRALELOR TERMOELECTRICE

Adeseori se pune problema stabilirii gradului de precizie cu care trebuie cunoscute caracteristicile economice ale centralelor pentru a nu obține o repartiție eronată. Este în principal vorba de caracteristicile creșterilor relative de consum de combustibil, care se pot abate de la valorile corecte atît datorită măsurătorilor imprecise la stabilirea curbelor de consum de combustibil în funcție de putere, cît și datorită modificării sezoniere a performanțelor termodinamice a agregatelor. La acestea mai trebuie adăugate influențele datorate combustibililor care își pot schimba între anumite limite, caracteristicile în timp, precum și altor cauze puțin controlabile.

Din studiile existente în literatura de specialitate, pînă în prezent nu reiese o părere unanimă asupra influenței erorilor de determinare a caracteristicilor asupra repartiției economice. De menționat că, dacă problema mărimii erorilor diferitelor date de bază pentru calculul repartiției optime este studiată într-o oarecare măsură în literatura de specialitate, problema efectelor acestor erori asupra economiei de combustibil în sisteme este studiată mai puțin și numai în cazuri particulare, simplificate.

Astfel s-a studiat influența caracteristicilor creșterilor relative de combustibil asupra repartiției optime, făcînd următoarele ipoteze simplificatoare [6], [7]:

a) Caracteristicile sînt liniare și nu se iau în considerație pierderile de putere activă în rețea;

b) Studiile se fac în general pe cazuri cu două centrale cu caracteristici identice și nu se iau în considerație centralele hidroelectrice. În aceste lucrări se fac în general aprecieri calitative asupra influenței acestor caracteristici asupra economiei de combustibil în sisteme.

Întrucît studiile menționate sînt făcute pe cazuri simplificate, ele nu pot fi generalizate în cazul unui sistem complex cu multe centrale.

Un astfel de studiu este posibil cu ajutorul unui calculator electronic analogic, cu care se poate studia un număr mare de regimuri, necesar pentru scoaterea în evidență a influenței diferitor factori.

Exemplul ales în lucrarea de față este, din acest punct de vedere, destul de general deoarece el posedă centrale cu performanțe economice bune, mediocre și slabe, cu caracteristici ale creșterilor relative ale consumului de combustibil cu pante mult diferite între ele, cu diverse localizări în sistem etc.

Pentru a stabili limitele în care se pot abate caracteristicile creşterilor relative ale consumului de combustibil de la valorile reale, fără ca prejudiciile aduse repartiţiei optime să fie esenţiale, s-au analizat, pe exemplul descris în capitolul 1, influenţele cîtorva cazuri tipice de modificări ale caracteristicilor creşterilor relative.

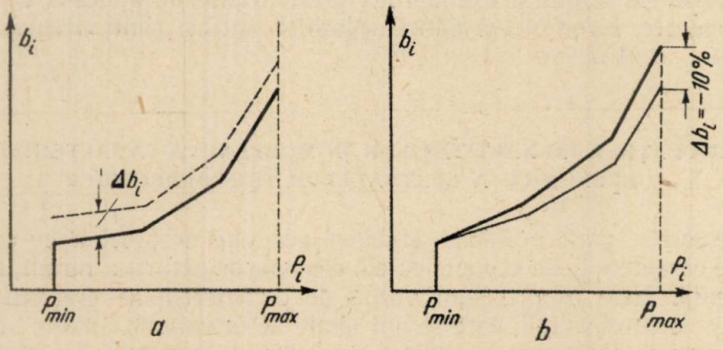


Fig. 4. — Modificări ale caracteristicilor de creşteri relative considerate în lucrare : *a* — modificări de tip 1 ; *b* — modificări de tip 2.

În figura 4 sînt arătate două tipuri de modificări ale caracteristicilor creşterilor relative ale consumului de combustibil utilizate ; primul tip de schimbări (fig. 4*a*) este datorat în principal unor erori sistematice efectuate la măsurătorile de ridicare a acestor caracteristici sau unor schimbări survenite în calitatea combustibilului utilizat, iar al doilea tip de modificări (fig. 4 *b*) s-ar datora unor schimbări intervenite în performanţele termodinamice ale agregatelor.

Pentru a stabili felul cum modificarea caracteristicilor creşterilor relative înrăutăţeşte regimul optim s-au făcut numeroase calcule de regimuri în care s-au variat pe rînd sau simultan, în sensuri contrare valorile acestor caracteristici modelate pe maşină atît pentru centrale economice cît şi pentru cele puţin economice etc. Criteriul de analiză l-a constituit consumul total de combustibil în 24 ore. Pentru a se putea compara între ele diferite rezultate obţinute, regimurile au fost determinate în aceleaşi condiţii din punctul de vedere al curbei de sarcină, al regimului centralelor hidroelectrice, al caracteristicilor celorlalte centrale termice, al modului de introducere al pierderilor în reţele etc. S-a stabilit astfel că modificări relativ importante în repartiţie (în raport cu regimurile de bază corespunzătoare caracteristicilor nemodificate) apar pentru centralele mai puţin economice sau îndepărtate de centrul echivalent al sarcinii precum şi pentru centralele mari şi cu pante mari ale caracteristicilor creşterilor relative. Pentru aceste centrale este deci necesar să se modeleze cît mai corect caracteristicile de creşteri relative ale consumului de combustibil.

În scopul stabilirii modificărilor cantitative care pot să apară în consumul total de combustibil pe perioada în care se determină regimul optim, pentru centralele care îndepărtau cel mai mult regimul de la situaţia optimă, s-au variat valorile creşterilor relative ale consumului orar în limitele de $\pm 10\%$ ($\Delta b_i = \pm 10\%$; fig. 4).

În figura 5*a*, *b*, şi în tabela 1, sînt date cîteva rezultate ale felului în care se modifică consumul total de combustibil. Se observă că valorile maxime ale

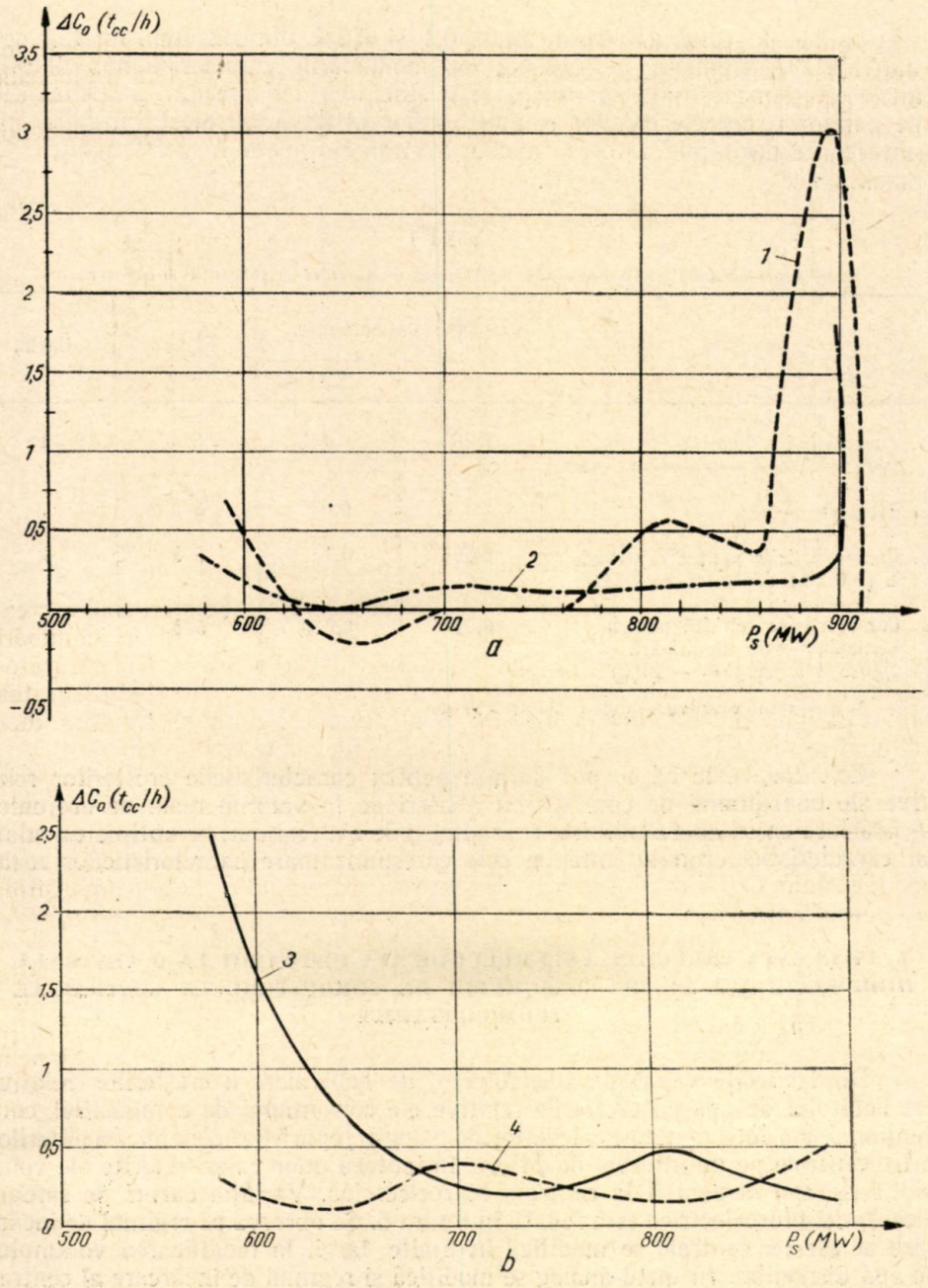


Fig. 5. — *a*, *b* Curbele consumului orar suplimentar de combustibil la diferite modificări ale caracteristicilor creşterilor relative : *1* — caracteristica folosită pentru centrala 6 este deplasată cu 10% ; *2* — idem cu — 5% ; *3* — caracteristicile pentru centralele 2 şi 6 sînt deplasate cu 5% ; *4* — caracteristica pentru centrala 6 este modificată ca în figura 4*b* cu $\Delta b_i = -10\%$.

surplusului de combustibil sînt între 0,1 şi 0,2% din consumul total de combustibil. De asemenea se observă că modificările caracteristicilor datorate inexactităţilor măsurătorilor efectuate la stabilirea lor precum şi schimbărilor pe parcurs a caracteristicilor combustibililor utilizaţi, au efecte negative mai importante decît cele datorate micilor variaţii sezoniere în performanţele termodinamice.

Tabela 1

Schimbările consumului total de combustibil zilnic datorat modificărilor caracteristicilor de creşteri relative

Ipoteza	Surplus de combust.		Figura	Curba
	tcc/zi	%[1])		
1. Caracteristica folosită pentru centrala 6 este deplasată cu +10%	9,266	0,113	5 *a*	1
2. Idem cu − 5%	3,1	0,038	5 *a*	2
3. Caracteristicile pentru centralele 2 şi 6 sînt deplasate cu +5%	8,364	0,1	5 *b*	1
4. Caracteristica folosită pentru centrala 6 este modificată ca în figura 4 *b* ($\Delta b_i = -10\%$)	6,21	0,075	5 *b*	2

[1]) Raportat la consumul total de combustibil zilnic.

Concluzia este că se pot admite pentru caracteristicile creşterilor relative ale consumului de combustibil abateri de la valorile reale de ordinul a ± 5% fără ca să apară înrăutăţiri inadmisibile ale regimurilor optime calculate cu caracteristici eronate, faţă de cele corespunzătoare caracteristicilor reale.

5. INFLUENŢA VARIAŢIEI VOLUMULUI DE APĂ DISPONIBIL LA O CENTRALĂ HIDROELECTRICĂ ASUPRA CONSUMULUI DE COMBUSTIBIL LA CENTRALELE TERMOELECTRICE

Dînd diferite valori parametrului γ_j de echivalare a creşterilor relative ale debitului de apă cu creşterile relative ale consumului de combustibil convenţional, s-a determinat pe calculatorul analogic, repartiţia economică a puterilor între centrale pe un interval de 24 ore, în ipoteza unor valori diferite ale volumului de apă disponibil la centrala hidroelectrică. Variaţia curbei de sarcină a centralei hidroelectrice este redată în figura 6. Se observă că regimul de încărcare al acestei centrale se modifică în limite largi, la modificarea volumului de apă disponibil. În mod analog se modifică şi regimul de încărcare al centralelor termoelectrice.

Pentru fiecare valoare a volumului de apă acumulată V, consumat zilnic de centrala hidroelectrică, s-a determinat valoarea corespunzătoare a terme-

mului variabil al consumului de combustibil al centralelor termice C', întrucît termenul constant, corespunzător consumului la minimul tehnic, nu depinde de regimul centralelor hidroelectrice.

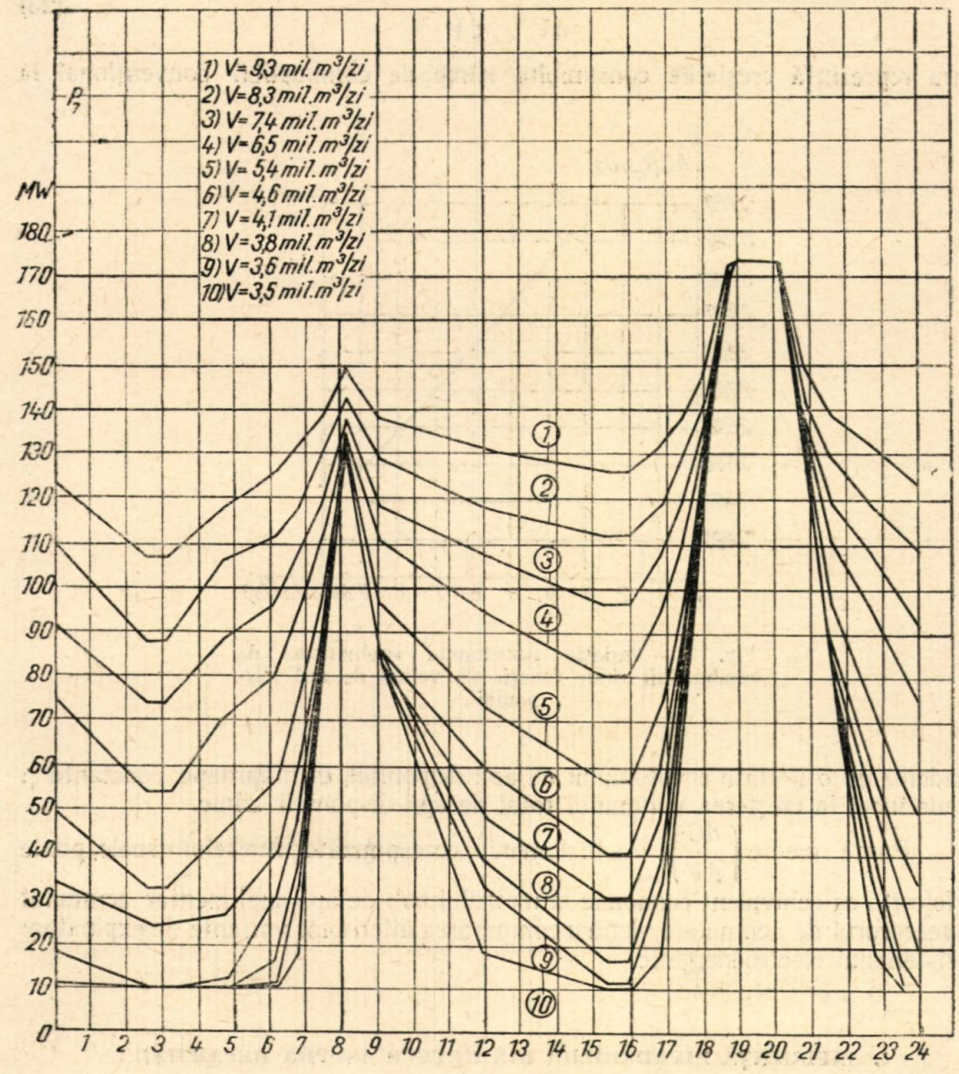


Fig. 6. — Curbele puterilor programate pe o centrală hidroelectrică la diferite valori ale volumului de apă disponibil pe 24 ore.

Variația mărimii C' în funcție de volumul de apă V, în ipoteza unei curbe de sarcină unice a fost reprezentată pe figura 7.

Se observă că modificarea volumului de apă consumat zilnic de centrala hidroelectrică are o influenţă esenţială asupra consumului de combustibil la centralele termice. Panta curbei $C'(V)$

$$\frac{dC'}{dV} = \frac{dC}{dV}, \tag{23}$$

care reprezintă creşterea consumului zilnic de combustibil convenţional la

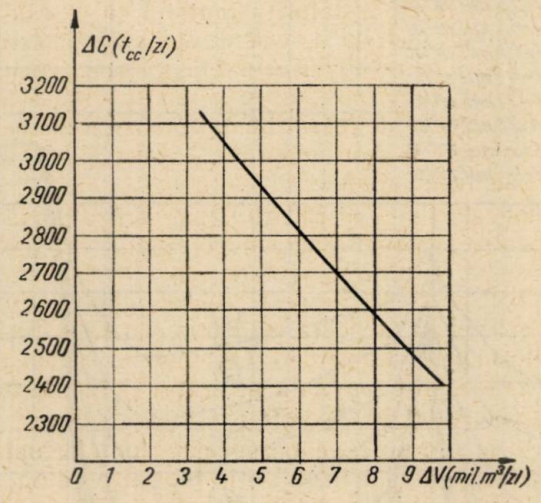


Fig. 7. — Variaţia consumului suplimentar de combustibil zilnic funcţie de volum de apă disponibil.

scăderea cu o unitate a volumului de apă disponibil, este aproape constantă şi scade încet la creşterea volumului total de apă disponibil zilnic.

Panta medie $\left(\frac{dC}{dV}\right)_{med.}$, în domeniul corespunzător debitelor uzuale, poate fi folosită ca echivalent economic al metrului cub de apă suplimentar acumulat în rezervorul de acumulare, pentru compararea diferitelor variante de exploatare a sistemului electroenergetic.

6. INFLUENŢA PIERDERILOR DIN REŢELE ASUPRA REPARTIŢIEI OPTIME A SARCINILOR

Pentru stabilirea influenţei pierderilor asupra repartiţiei optime precum şi pentru evaluarea preciziei necesare în determinarea coeficienţilor ce intervin în calculul creşterilor relative a acestor pierderi, s-a luat ca bază de studiu

formula de pierderi a B-urilor care exprimă pierderile active din rețele în funcție numai de puterile active ale centralelor

$$p = \sum_l \sum_k P_l \cdot B_{l \cdot k} P_k + \sum_l B_{l0} P_l + B_{00}, \qquad (24)$$

unde

P_l P_k sînt puterile active ale centralelor l și k; B_{lk}, B_{l0}, B_{00} sînt coeficienți de pierderi.

S-a utilizat această formulă datorită faptului că ea este astăzi cea mai răspîndită și perfecționată metodă de calcul operativ al pierderilor în rețele, că ea corespunde cel mai bine nivelului actual de informații asupra funcționării sistemului electroenergetic, reprezentînd o cale relativ simplă de luare în considerare a pierderilor în calculele de repartiție optimă a sarcinilor și de asemenea pe considerentul că ea poate fi ușor adaptată la calculele pe mașina analogică cu ajutorul căreia s-au făcut studiile.

Pentru ca studiile efectuate cu privire la pierderi să poată fi cît mai concludente, s-a ales pentru sistemul energetic prezentat în capitolul 1, o rețea de transport relativ slabă cu centrale situate mult diferit, față de centrele de consum. Această a făcut ca pierderile de transport să fie relativ importante (8% la sarcina maximă) și deci să se poată evidenția clar influențele diverșilor factori care afectează formulele de pierderi. Criteriul de comparație pentru diversele situații analizate a fost, așa cum s-a arătat și în capitolele anterioare, consumul total de combustibil în 24 de ore.

O primă concluzie obținută pe baza calculelor efectuate este aceea că luarea în considerare a pierderilor în rețele în repartizarea optimă a sarcinilor între centrale duce, pentru situația în care pierderile sînt importante, la o economie de combustibil zilnic ce este de ordinul a 1% din consumul total de combustibil în 24 ore, în comparație cu repartiția realizată numai prin egalizarea valorilor creșterilor relative ale consumului orar de combustibil. Economia fiind deosebit de importantă — aproximativ 30 pînă la 50% din economia obținută printr-o repartiție optimă corectă calculată continuu, se impune ca pierderile să fie luate neapărat în considerație la calculele de optimizarea repartiției în sistemele energetice cu legături slabe, iar neglijarea lor eventuală în asemenea calcule pentru alte sisteme să se facă numai după o analiză atentă a economiei de combustibil.

Pentru a vedea felul în care este influențată repartiția de modul în care sînt determinați coeficienții de pierderi, au fost introduse pe rînd în calculele regimului optim 3 tipuri de matrici de coeficienți B calculate pe căi diferite, cu ipoteze diferite privind reglajele, modul de reducere a schemei, structura formulei de pierderi etc. care fiecare verifică un nou regim numai în cazul cînd sînt împlinite premisele respective considerate.

În tabela 2 este dată spre o exemplificare o matrice a coeficienților de pierderi B_1. Matricea B_1 (a se vedea memoriul IRME privind calculul repartiției optime folosind calculatoare numerice) are la bază formula de deducere a lui Despotovi [8] care consideră că toți curenții generatoarelor și sarcinilor sînt în fază și de asemenea că factorul de putere și tensiunile diverselor bare generatoare rămîn constante în toate regimurile de funcționare. Formula de pierderi

Tabela 2

Matricea coeficienților B_1 (x 10^4)

	1	2	3	4	5	6	7
1	0,51						
2	−5,92	21,12					
3	−2,17	− 3,65	7,92				
4	9,33	− 6,949	−1,77	14,99			
5	5,84	− 6,01	−2,15	5,77	8,06		
6	−1,56	− 7,17	−0,26	−1,77	−0,98	10,9	
7	−4,09	− 9,53	4,2	−4,14	−3,4	6,64	23,68

care are la bază matricea de coeficienți B_1 este de tipul cu o singură grupă de termeni.

– Matricea B_2 pornește de la principiile de reducere și analiză pe schemele REI prin înlocuirea sarcinilor, prin o sarcină unică, în varianta calculului cel mai redus fără corijarea coeficienților constanți, adică varianta denumită cu o constantă pe ramura în lucrarea autorului [9]. Formula de pierderi astfel dedusă este de tipul cu 3 grupe de termeni.

– Matricea B_3 are la bază metoda coeficienților de repartiție, care implică considerarea unei tensiuni medii constante și egale în toate nodurile și coliniaritatea curenților injectați în toate nodurile [10]. Formula de pierderi obținută este de tipul cu o singură grupă de termeni.

La analiza felului în care diferitele matrici de coeficienți influențează repartiția puterilor între centrale, s-au considerat invariabile următoarele elemente:

– caracteristica puterii totale generate în funcție de timp;
– caracteristicile economice ale tuturor centralelor;
– volumul de apă consumat în 24 ore de centrala hidroelectrică nr. 7;
– caracteristica regimului impus pentru centrala hidroelectrică nr. 4;
– valorile minimului tehnic și caracteristicile de supraîncărcare pentru centralele sistemului.

Astfel s-au pus în aceleași condiții de analiză sistemul energetic pentru toate cele 3 moduri mai sus amintite de a ține seamă de pierderile în rețele. Graficul prezentat în figura 8 indică rezultate comparative obținute pe calculator pentru o repartiție optimă, în care pierderile au fost introduse prin două tipuri de matrici (B_1 și B_2).

Din analiza rezultatelor se pot observa următoarele:

– datorită structurii sistemului energetic analizat, nu este indiferent felul în care se ține cont de pierderile din rețele. Ipotezele diferite privind reglajele din sistem, modul de variație a sarcinilor, a puterilor reactive, a factorului de putere la generatoare, modul de reducere a schemelor etc. duc la matrici mult diferite ce aduc schimbări importante în repartiția puterilor între centrale;

— valorile pierderilor de putere activă calculate la aceleași puteri generate sau consumate diferă mult între ele după cum sînt calculate cu una sau alta dintre matricile de coeficienți B.

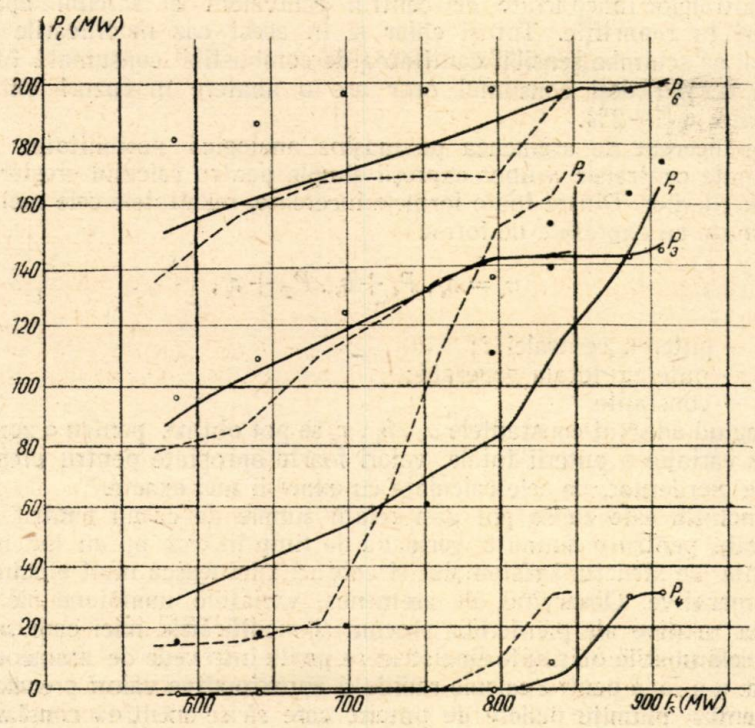


Fig. 8. — Variația puterilor centralelor nr. 3, 4, 6 și 7 cu sarcina sistemului (utilizînd matricea B_1 și B_2).

— Creșterile relative ale pierderilor pentru unele centrale sînt mult diferite de la un caz la altul existînd chiar situații în care ele sînt de semne diferite.

Se observă deci că este necesar să se aleagă cu multă atenție ipotezele care stau la baza calculelor coeficienților formulei de pierderi precum și însăși modul de deducere a acestor formule deoarece pierderile pentru sistemul analizat influențează mult repartiția puterilor între centrale, putînd, în cazul unor deduceri incorecte a matricei coeficienților B, să îndepărteze regimul de cel optim.

S-au analizat, de asemenea, modurile în care este influențată repartiția de unele inexactități sau aproximații de calcul efectuate la stabilirea matricei de coeficienți B. Presupunînd că matricea coeficienților de pierderi este stabilită plecînd de la ipoteze corecte dar că s-au aplicat unele expresii de calcul într-o formă simplificatoare sau calculul a fost efectuat cu o precizie mică, s-au determinat noi matrici, în care coeficienții diverselor linii sau coloane sînt modificate în proporție de 5—20%, față de matricea inițială considerată drept referință.

S-au modificat pe rînd cîte o linie a fiecărei matrici apoi cîte o linie și o coloană și, de asemenea, simultan mai multe linii și coloane în proporție de maximum $\pm 20\%$.

Rezultatele indică că numai atunci cînd se modifică coeficienții corespunzători centralelor îndepărtate de centrul echivalent al sarcinii apar unele modificări în repartiție. Totuși chiar și în acest caz modificările nu sînt de natură să schimbe sensibil cantitatea de combustibil consumată în 24 ore (maxim 0,1%) deși consumul orar are o abatere în cazuri extreme de aproximativ $\pm 1-2\%$.

S-a încercat de asemenea pe mașina analogică posibilitatea utilizării pentru toate centralele a unor expresii simple pentru calculul creșterilor relative al pierderilor. Dintre toate formele încercate, rezultatele cele mai bune au fost obținute cu expresiile de forma

$$\sigma_i = a_i \cdot P_i + b_i \cdot P_T + c_i , \qquad (25)$$

unde

P_i – puterea centralei i;

P_T – puterea totală generată;

a_i, b_i, c_i – constante.

Alegînd adecvat constantele a_i , b_i , c_i se pot obține, pentru o zonă importantă de variație a puterii totale, valori foarte apropiate pentru creșterile relative ale pierderilor, de cele calculate cu expresii mai exacte.

Concluzia este că se pot găsi relații simple de calcul pentru mărimile σ_i valabile pentru o anumită perioadă de timp în care nu au loc modificări importante ale structurii sistemului și care să înlesnească mult efectuarea calculelor operative. Observînd, de asemenea, variațiile monotone ale valorilor creșterilor relative ale pierderilor precum și modificările mici care se obțin o dată cu schimbările obișnuite din sistem se poate întrevede de asemenea posibilitatea de a utiliza pentru calcule rapide și aproximative valori precalculate ale lui σ_i pentru anumite paliere de putere, care să se mențină constante între aceste paliere.

CONCLUZII

Analiza factorilor care determină repartiția economică a puterilor între centralele electrice, a scos la iveală cîteva principii generale privitoare la modul de efectuare a calculelor de repartiție.

Astfel, a rezultat că în cazul general factorii analizați – variația sarcinii, caracteristicile economice ale centralelor termice, debitul de apă disponibil și pierderile în rețele electrice – au efecte comparabile astfel încît trebuie să se țină seama de toți acești factori în calcule.

Precizia de determinare a parametrilor ce intervin în calculul repartiției economice nu trebuie însă să fie foarte mare.

– În funcție de modul de reglare a frecvenței adoptat, fluctuațiile sarcinii față de curba prognoză, se repartizează în proporții diferite între centralele electrice ale sistemului. Diferențele de consum anual suplimentar de combus-

tibil corespunzătoare diferitelor moduri de reglaj nu sînt neglijabile, astfel încît este util ca la alegerea principiilor de reglaj să se întocmească un studiu tehnico-economic, care să țină seama de caracteristicile statistice ale fluctuațiilor sarcinii și de curbele de consum suplimentar de combustibil corespunzătoare diferitelor moduri de reglaj.

— Abaterile uzuale ale caracteristicilor creșterilor relative ale consumului de combustibil de la valorile reale nu impun remodelarea lor pentru calculele repartiției optime a sarcinilor; se pot admite abateri de la valorile reale de $\pm 5\%$ fără ca prin aceasta să apară înrăutățiri inadmisibile pentru regimuri optime.

— Luarea în considerație a pierderilor în rețele poate avea o influență mare în calculele de repartiție în special în sistemele energetice cu legături slabe, prezentînd o pondere mare în economia realizată prin optimizarea repartiției; neglijarea pierderilor în asemenea calcule pentru sisteme electroenergetice cu structuri favorabile este indicat să se facă numai după stabilirea influențelor lor minore în economia de combustibil realizată.

— La calculul coeficienților de pierderi (matricea B) se impune ca structura formulelor de calcul să corespundă unor ipoteze de funcționare ale sistemului cît mai apropiate de situația reală, acordîndu-se mai puțină atenție preciziei calculelor de determinare a acestor coeficienți.

— Volumul de apă disponibil pentru centralele hidroelectrice are o influență esențială asupra regimului de încărcare al centralelor termo- și hidroelectrice ale sistemului, precum și asupra consumului de combustibil la centralele termoelectrice. Este necesar de aceea, să se acorde o deosebită importanță gospodăririi optime a rezervoarelor de acumulare și fixării cu precizie a volumului de apă disponibil zilnic pentru a fi prelucrat în centralele hidroelectrice.

— Repartiția puterilor într-un sistem format din centrale termo- și hidroelectrice poate fi calculată în bune condiții cu ajutorul unui calculator analogic neliniar, datorită elasticității în lucru și a rapidității acestui calculator. Pentru compararea variantelor de exploatare a sistemului, s-a elaborat o metodă de combinare a calculului analogic al repartiției, cu calculul numeric al diferențelor de consum de combustibil.

Primit la redacție la 4 martie 1964.

BIBLIOGRAFIE

1. В.М. Горнштейн, *Наивыгоднейшее распределение нагрузок между параллельно работающими электростанциями*. Госэнергоиздат, 1949.
2. L. K. Kirchmayer, *Economic operation of power systems*. J. Wiley Sons, N. Y., 1958.
3. L. K. Kirchmayer, *Economic control of interconnected systems*. J. Wiley Sons, N. Y., 1959.
4. L. K. Kirchmayer, R. J. Ringley, *Optimal Control of Thermal-hydro System*. Operation IFAC-Rap. 430/1 (1963).

5. V. M. Popov, N. Tătaru, M. Bâjenescu, *Calculatorul analogic neliniar MECAN-II*. St. cerc. energ., seria A, *2* 291 (1963).
6. L. K. Kirchmayer, *Consideraţiuni privind precizia în repartiţia economică în sisteme energetice*, AIEE-Trans. Part III, 1127 (1956).
7. Н.А. Картвелишвили, *Влияние погрешностей характеристик относительных приростов. Эффект оптимального распределения нагрузок*. Известия Академии Наук СССР. Энергетика и Автоматика, *6* (1959).
8. I. Despotović, *Quick Method for Developing Transmission Loss Formula*. Power Apparatus and Systems, oct., 707 (1962).
9. P. Dimo, *Soluţia problemei pierderilor pe echivalenţi REI*. St. cerc. energ., *4* — A (1963).
10. А.Г. Москалев, *Наивыгоднейшее распределение нагрузок в электроэнергетической системе*. Электричество, *10*, (1960).

ELEMENT DE CUADRARE CU DIODE FĂRĂ AMPLIFICATOR OPERAȚIONAL SUMATOR

DE

CORNELIU PENESCU, *membru corespondent al Academiei R.P.R.*,
și MIHAI CEAPÎRU

518.5

1. GENERALITĂȚI

Elementul de cuadrare este un generator de funcție neliniară cu diode, avînd la bază elementul cu diodă tip cuadripol.

Acesta din urmă are un potențiometru de reglare a pantei r_K, un potențiometru R de reglare a tensiunii de blocare — ce realizează totodată și o modificare a pantei — și o rezistență de sarcină — ρ — la intrare.

Un astfel de element arată ca în figura 1, unde:

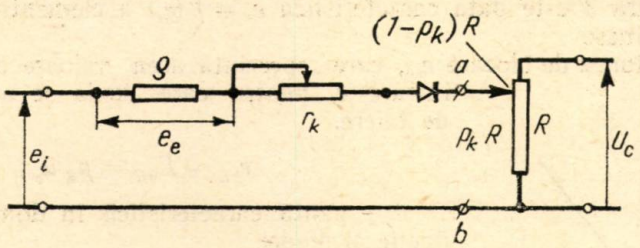


Fig. 1

e_i — tensiunea de intrare;
e_e — tensiunea de ieșire;
u_c — tensiunea de comandă.

St. cerc. energ. electr. Tom. 14 Nr. 2 p. 357–368 București 1964

Notînd cu p_K raportul de divizare al potenţiometrului R de către cursor, tensiunea de blocare va fi : $p_K u_e$.

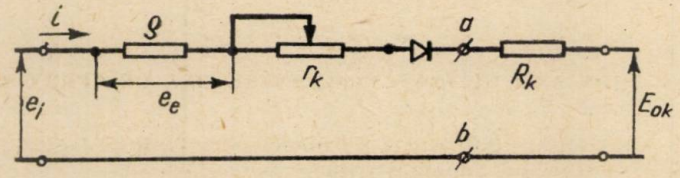


Fig. 2

Cu ajutorul teoremei Thévenin, putem înlocui schema elementului cu o diodă cu un circuit ca în figura 2, unde conform teoremei anunţate

$$E_{0K} = p_K u_e$$

$$\Re_K = R_{ab} = p_K R \| (1 - p_K) R = p_K (1 - p_K) R.$$

Vom avea

$$i = \begin{cases} \dfrac{e_i - E_{0K}}{\rho + \tau_K + \Re_K} & \text{pentru } e_i - E_{0K} \geqslant 0 \\ 0 & \text{pentru } e_i - E_{0K} \leqslant 0 \end{cases}$$

(din cauza diodei ce nu permite trecerea curentului în sens invers).

Cum $i\rho = e_e$,

vom avea

$$e_e = \begin{cases} \rho \dfrac{e_i - E_{0K}}{\rho + r_K + \Re_K} & \text{pentru } e_i - E_{0K} \geqslant 0, \\ 0 & \text{pentru } e_i - E_{0K} \leqslant 0. \end{cases}$$

În figura 3 este dată caracteristica $e_e = f(e_i)$ a elementului cu diodă. Se definesc

– tensiunea de blocare e_{bk}, care reprezintă acea valoare a tensiunii de intrare e_i pentru care dioda se află în punctul de tăiere.

$$e_{bK} = E_{0K} = p_K u_e ;$$

– panta caracteristicii în domeniul de conducţie al diodei

$$\frac{de_e}{de_i} = \frac{\rho}{\rho + r_K + \Re_K}.$$

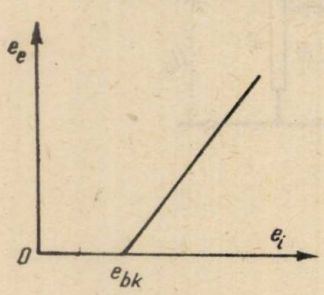


Fig. 3

Prin combinarea adecvată a unor astfel de elemente cu diode şi a unui element fără diodă,

putem obține o caracteristică $e_e = f(e_i)$ linie frîntă, care poate fi astfel construită încît să aproximeze cu eroarea dorită o parabolă

$$e_e = ke_i^2 .$$

2. DETERMINAREA NUMĂRULUI DE INTERVALE DE APROXIMARE

Pentru a avea o aproximare a parabolei cu o eroare $\varepsilon \leqslant \varepsilon_{max}$ [V], numărul necesar de intervale de aproximare este [1]

$$n = \frac{e_{i\max}}{2\sqrt{\frac{\varepsilon_{max}}{k}}} . \tag{1}$$

Alegem

$$\varepsilon_{max} = 1\%\, e_{e\max} = 0{,}01 . e_{e\max} = 0{,}01 . k \cdot e_{i\max}^2 ,$$

$$e_{i\max} = 10 \text{ [V]},$$

și vom avea

$$n = \frac{10}{2\sqrt{\frac{0{,}01 \cdot k \cdot 10^2}{k}}} = 5.$$

Pentru cele 5 intervale de aproximare vom avea 5 elemente cu diodă conectate ca în schema din figura 5.

Deoarece primul segment de dreaptă de aproximare trece prin originea caracteristicii, prima ramură a cuadratorului se realizează fără diodă și deci fără tensiune de blocare ($p_1 = 0$ — nu se mai pune potențiometrul R), avînd doar o rezistență r_1.

Legile Kirchhoff aplicate circuitului din figura 5 și o algebră elementară dau :

3. RELAȚIILE DE CALCUL ALE SCHEMEI

3.1. Dreapta I de aproximare

Avem

$$e_e = e_i \frac{\rho}{\rho + r_1} , \tag{2}$$

deci panta primului segment de dreaptă este

$$k_{11} = \frac{e_e}{e_i} = \frac{\rho}{\rho + r_1} , \tag{3}$$

și putem scrie

$$e_e = e_i \cdot k_{11} . \tag{4}$$

3.2. Dreapta II de aproximare

Avem

$$e_e = (e_i - p_2 u_e k_{22}) k_{21}, \tag{5}$$

unde

$$k_{21} = \frac{\rho}{\rho + \dfrac{r_1(r_2 + p_2 R)}{r_1 + r_2 + p_2 R}}, \tag{6}$$

sau

$$k_{21} = \frac{\rho}{\rho + r_1 \| (r_2 + p_2 R)}, \tag{7}$$

$$k_{22} = 1 - \frac{r_2 + p_2 R}{r_1 + r_2 + p_2 R} = 1 - \frac{k_{11}}{k_{21}} \cdot \frac{1 - k_{21}}{1 - k_{11}}. \tag{8}$$

Pentru a reprezenta parabola $e_e = k e_i^2$ se impune condiția

$$k_{21} > k_{11}, \tag{9}$$

adică

$$\frac{\rho}{\rho + \dfrac{r_1 (r_2 + p_2 R)}{r_1 + r_2 + p_2 R}} > \frac{\rho}{\rho + r_1}, \tag{10}$$

care este îndeplinită, căci

$$r_1 \| (r_2 + p_2 R) < r_1. \tag{11}$$

3.3. Dreapta III de aproximare

Avem

$$e_e = (e_i - p_2 u_e k_{32} - p_3 u_e k_{33}) k_{31}, \tag{12}$$

unde

$$k_{31} = \frac{\rho}{\rho + \dfrac{r_1 (r_2 + p_2 R)(r_3 + p_3 R)}{(r_2 + p_2 R)(r_3 + p_3 R) + r_1 (r_3 + p_3 R) + r_1 (r_2 + p_2 R)}} \tag{13}$$

sau :

$$k_{31} = \frac{\rho}{\rho + [r_1 \| (r_2 + p_2 R) \| (r_3 + p_3 R)]}, \tag{14}$$

$$k_{32} = \frac{r_1 (r_3 + p_3 R)}{(r_2 + p_2 R)(r_3 + p_3 R) + r_1 (r_3 + p_3 R) + r_1 (r_2 + p_2 R)} = (1 - k_{33}) k_{22}, \tag{15}$$

$$k_{33} = 1 - \frac{r_1 (r_3 + p_3 R) + (r_2 + p_2 R)(r_3 + p_3 R)}{(r_2 + p_2 R)(r_3 + p_3 R) + r_1 (r_3 + p_3 R) + r_1 (r_2 + p_2 R)} = 1 - \frac{k_{21}}{k_{31}} \cdot \frac{1 - k_{31}}{1 - k_{21}}. \tag{16}$$

Și aici condiția

$$k_{31} > k_{21} \tag{17}$$

este îndeplinită, deoarece

$$\frac{\rho}{\rho + [(r_1 \| (r_2 + p_2 R) \| (r_3 + p_3 R)]} > \frac{\rho}{\rho + [r_1 \| (r_2 + p_2 R)]}, \tag{18}$$

respectiv

$$r_1 \| (r_2 + p_2 R) \| (r_3 + p_3 R) < r_1 \| (r_2 + p_2 R). \tag{19}$$

3.4. **Pentru dreapta de aproximare de rang K**

Comparînd relațiile: (4), (5), (12), rezultă expresia generală a tensiunii de ieșire e_e pentru segmentul de aproximare de ordin K

$$e_e = (e_i - u_c \sum_{J=2}^{k} p_J K.J) \cdot k_{K1} = (e_i - e_{bK})\, k_{K1}, \tag{20}$$

$$K = 1, 2, \ldots, 5.$$

Privind comparativ relațiile: (3), (7), (14), rezultă expresia lui k_{K1}

$$k_{K1} = \frac{\rho}{\rho + [r_1 \| (r_2 + p_2 R) \| \ldots \| (r_K + p_K R)]}, \tag{21}$$

$$K = 1, 2, \ldots, 5.$$

De asemenea, din compararea expresiilor (8), (16) căpătăm formula generală pentru coeficientul k_{KK}

$$k_{KK} = 1 - \frac{k_{K-11}}{k_{K1}} \cdot \frac{1 - k_{k1}}{1 - k_{k-11}}, \tag{22}$$

$$K = 2, 3, 4, 5$$

iar pentru coeficientul k_{KJ} (vezi (15)) avem

$$k_{kJ} = \left[\prod_{P=J+1}^{K} (1 - k_{PP}) \right] \cdot k_{JJ} \tag{23}$$

$$K = 3, 4, 5,$$

$$J = 2, 3, 4 = K - 1.$$

Din sistemul de 4 ecuații

$$e_{bK} = u_c \sum_{J=2}^{K} p_J k_{KJ} \tag{24}$$

$$K = 2, 3, 4, 5,$$

obțin valorile celor 4 necunoscute: $p_J u_c$ ($J = 2, 3, 4, 5$).
Dacă se pune condiția ca

$$p_5 = 1,$$

vom avea

$$p_5 u_c = u_e .$$

Cunoscînd valorile $p_J u_c$ ($J = 2, 3, 4$) şi avînd valoarea lui u_e, rezultă coeficienţii $p_J (J = 2, 3, 4)$.

4. Condiţiile de funcţionare

Deşi în literatură [1] se arată că schemele pentru realizarea funcţiilor de tipul (20), unde valoarea numitorului se modifică prin modificarea numărului de elemente cu diode aflate în stare conducţie, necesită o sumare a curenţilor (tensiunilor) prin amplificator operaţional sumator, acest lucru nu este necesar, căci expresia (20) este o funcţie fără discontinuităţi de speţa a doua în punctele de frîngere a caracteristicii [2]. Într-adevăr, expresia funcţiei calculată la stînga unui punct de frîngere este egală ca cea calculată la dreapta lui.

Să luăm cazul primului punct de frîngere:

– expresia funcţiei calculată la dreapta punctului (adică valabilă pentru dreapta II de aproximare) este (vezi şi (5))

$$e_{e+} = (e_i - p_2 u_c k_{22}) k_{21} ; \tag{5'}$$

– expresia funcţiei calculată la stînga punctului (adică valabilă pentru dreapta I de aproximare) este (vezi şi (4))

$$e_{e-} = e_i k_{11} , \tag{4'}$$

unde e_i din ambele expresii este valoarea tensiunii de intrare în primul punct de frîngere a caracteristicii.

Făcînd diferenţa: $e_{e+} - e_{e-}$ avem

$$e_{e+} - e_{e-} = e_i (k_{21} - k_{11}) - p_2 u_c k_{22} k_{21} . \tag{25}$$

Dar (vezi (6) şi (3))

$$k_{21} - k_{11} = \frac{\rho}{\rho + \dfrac{r_1 (r_2 + p_2 R)}{r_1 + r_2 + p_2 R}} - \frac{\rho}{\rho + r_1} =$$

$$= \rho \frac{r_1 \left(1 - \dfrac{r_2 + p_2 R}{r_1 + r_2 + p_2 R} \right)}{\dfrac{\rho (r_1 + r_2 + p_2 R) + r_1 (r_2 + p_2 R)}{r_1 + r_2 + p_2 R} (\rho + r_1)} ,$$

$$k_{21} - k_{11} = \frac{\rho r_1}{\rho (r_1 + r_2 + p_2 R) + r_1 (r_2 + p_2 R)} \cdot \frac{r_1}{\rho + r_1} , \tag{26}$$

iar (vezi (8) și (7))

$$k_{22}k_{21} = \frac{r_1}{r_1+r_2+p_2R} \cdot \frac{\rho(r_1+r_2+p_2R)}{\rho(r_1+r_2+p_2R)+r_1(r_2+p_2R)} =$$

$$= \frac{\rho r_1}{\rho(r_1+r_2+p_2R)+r_1(r_2+p_2R)} \cdot \tag{27}$$

Cu (26) și (27), — (25) devine

$$e_{e+} - e_{e-} = \frac{\rho r_1}{\rho(r_1+r_2+p_2R)+r_1(r_2+p_2R)} \left[\frac{r_1}{\rho+r_1} e_i - p_2 u_c\right] \cdot \tag{28}$$

Dar, conform (2)

$$e_i \frac{r_1}{\rho+r_1} = e_e \frac{r_1}{\rho} \cdot \tag{2'}$$

Înlocuind (2') în (28) vom obține

$$e_{e+} - e_{e-} = \frac{\rho r_1}{\rho(r+r_2+p_2R)+r_1(r_2+p_2R)} \left[\frac{r_1}{\rho} e_e - p_2 u_c\right] \cdot \tag{29}$$

Legile Kirchhoff pentru treapta a doua de aproximare dau

$$i_2 = \frac{1}{r_1+r_2+p_2R}\left[\frac{r_1}{\rho} e_e - p_2 u_c\right] \cdot \tag{30}$$

La primul punct de frîngere a caracteristicii, dioda de pe ramura doua se află în punctul de blocare, deci

$$i_2 = 0,$$

de unde rezultă că termenul

$$\frac{r_1}{\rho} e_e - p_2 u_c = 0, \tag{31}$$

și deci că

$$e_{e+} - e_{e-} = 0, \tag{32}$$

adică

$$e_{e+} = e_{e-}. \tag{32'}$$

Tot astfel se demonstrează și pentru celelalte puncte de frîngere.

O altă condiție ce se impune pentru obținerea parabolei $e_e = ke_i^2$ este ca segmentele de dreaptă de aproximare să aibă pantă din ce în ce mai mare, o dată cu creșterea rangului (așa cum am arătat mai înainte). Totodată, pentru ca diodele să se deblocheze în ordinea crescătoare a rangului, se impune condiția ca tensiunile de blocare să crească o dată cu rangul ramurii, adică

$$p_{K+1} u_c > p_K u_c \tag{33}$$

sau, altfel spus

$$(p_K u_c)_{\max} \equiv p_n u_c \quad (n = 5). \tag{33'}$$

După cum se vede din schema principală a cuadratorului (fig. 5)

$$p_K u_c = e_i - e_e, \tag{34}$$

sau

$$p_K u_c = e_i - k e_i^2. \tag{34'}$$

Deci, la punctul de deblocare a ultimei trepte — $(e_i)_{n-1} \equiv (e_i)_4 = 8$ [V] — este

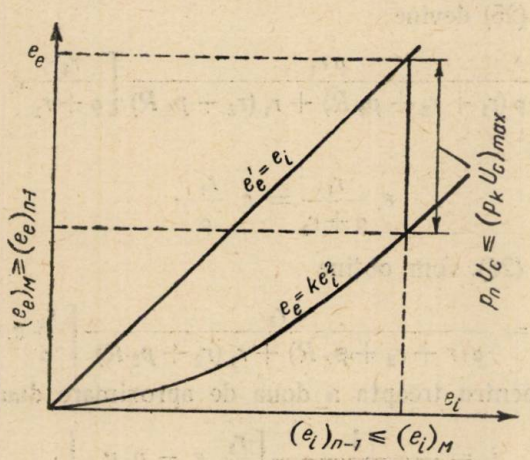


Fig. 4

de dorit să avem chiar $(p_K u_c)_{\max}$. Asta înseamnă că

$$\frac{\mathrm{d}(p_K u_c)}{\mathrm{d}e_i} = 1 - 2 k e_i = 0, \tag{35}$$

de unde rezultă abscisa pentru care avem $(p_K u_c)_{\max}$

$$(e_i)_M = \frac{1}{2k} \tag{36}$$

şi trebuie ca

$$(e_i)_M \geqslant (e_i)_{n-1}. \tag{36'}$$

Din (35) şi (36) rezultă

$$k = \frac{1}{2(e_i)_M} \leqslant \frac{1}{2(e_i)_{n-1}} \tag{37}$$

şi în cazul de faţă

$$k \leqslant \frac{1}{2.8} = 0{,}0625. \tag{37'}$$

Dar coeficientul k mai trebuie să îndeplinească o condiţie, după cum se vede mai jos.

Facem notațiile

$$R_K = r_K + p_K R, \tag{38}$$

$$(K = 1, 2, \ldots, 5)$$

și

$$r'_K = R_1 \| R_2 \| \ldots \| R_K \tag{39}$$

$$(K = 1, 2, \ldots, 5).$$

Vom avea, conform (21), (38) și (39)

$$k_{K1} = \frac{\rho}{\rho + r'_K}, \tag{40}$$

sau

$$r'_K = \frac{\rho (1 - k_{K1})}{k_{K1}}. \tag{41}$$

Dar,

$$r'_K = \frac{r'_{K-1} \cdot R_K}{r'_{K-1} + R_K} = r'_{K-1} \| R_K, \tag{42}$$

de unde

$$R_K = \frac{r'_{K-1} \cdot r'_K}{r'_{K-1} - r'_K}. \tag{43}$$

Ținînd seamă de (41), (43) devine

$$R_K = \frac{(1 - k_{K-11})(1 - k_{K1})}{k_{K1} - k_{K-11}} \rho. \tag{44}$$

Condiția evidentă ca

$$R_K \geqslant 0, \tag{45}$$

se traduce prin

$$k_{K1} \leqslant 1. \tag{46}$$

Conform (33), condiția (46) revine la

$$k_{51} \leqslant 1 \tag{46'}$$

și în cazul de față

$$k_{51} = \frac{(e_e)_5 - (e_e)_4}{(e_i)_5 - (e_i)_4} = \frac{100\,k - (e_i)_4^2 - k}{10 - (e_i)_4} = 18\,k \leqslant 1,$$

deci

$$k \leqslant \frac{1}{18} = 0{,}0555. \tag{47}$$

Ţinînd seama de (37′) şi (47), s-a ales

$$k = 0{,}05.$$

De fapt, condiţia (46) este acoperitoare pentru condiţia (33′) căci dacă pînă la abscisa $e_{i\max}$ pantele segmentelor sînt crescătoare cu rangul ramurii deblocate şi au valoare mai mică decît 1, atunci diferenţa (34′) va avea valoare maximă la abscisă maximă.

Conform metodicii de calcul arătate s-au determinat valorile elementelor din schema din figura 5, plecînd de la o valoare a rezistenţei potenţiometrilor de reglarea pantei $R = 2{,}2$ [k Ω] şi punînd condiţia ca rezistenţa $(r_K)_{\min}$ să fie egală chiar cu rezistenţa diodei în sens direct (în cazul de faţă $r_d = 200$ [Ω])

$$(r_K)_{\min} = r_d. \tag{48}$$

S-a ales o variaţie a tensiunii de intrare de la 0 la 10 [V]. Tensiunea de blocare $u_c = 4{,}8$ [V] a fost dată de sistemul de ecuaţii (24).

Diodele cu germaniu au rezistenţa inversă $r_i \cong 600$ [k Ω] şi vor fi străbătute de curenţi inverşi cu atît mai importanţi cu cît li se aplică o tensiune inversă mai mare. Cea mai mare tensiune inversă se aplică în montajul de faţă pe ultima diodă; deci nesocotind ramurile precedente cu diode în pri-

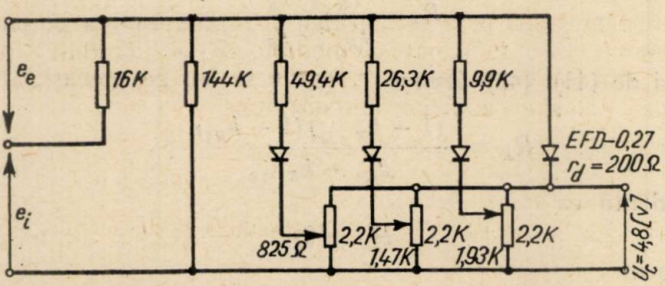


Fig. 5

vinţa aportului de curent invers pe rezistenţa de sarcină, avem pe aceasta o cădere de tensiune negativă în valoare de 0,12 [V].

Ţinînd seama şi de curenţii inverşi mai mici din restul ramurilor se obţine o cădere de tensiune negativă pe rezistenţa de sarcină de circa 0,2 [V] (practic verificat pe montaj). Pentru compensare se foloseşte o tensiune $u' = 2$ [V] ca în figura 6.

Deoarece tensiunea de compensare de 0,2 [V], luată potențiometric din sursa $u' = 2$ [V], modifică valorile curenților prin ramuri, tensiunea u_c se ajustează și ea în sens opus cu 0,2 [V]. Practic, a necesitat alegerea tensiunii de comandă:

$$u_c = 5 \text{ [V]}.$$

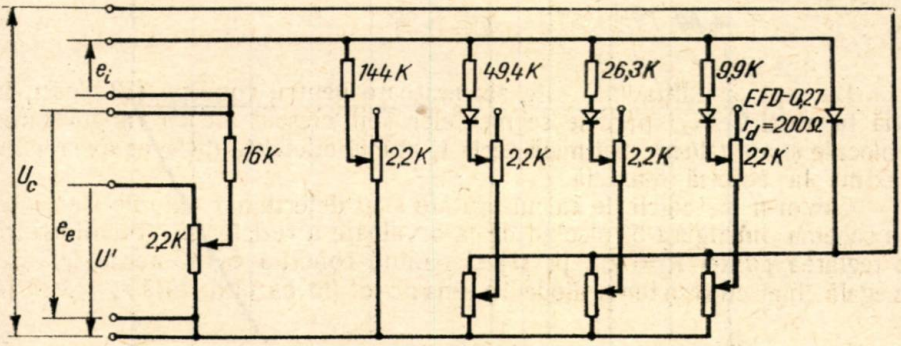


Fig. 6

În figura 6 se dă schema definitivă a cuadratorului; din ea se vede că tensiunile u' și u_c (necesitînd o stabilizare de circa 1%) se pot lua de la aceeași sursă de tensiune.

5. REALIZARE CONSTRUCTIVĂ

Schema se pretează prin simplitatea ei la construirea pe circuite imprimate. S-au realizat plăci imprimate cu modulul 123 × 192 (mm × mm), cuprinzînd doi cuadratori pe o placă. Toate ieșirile se fac pe aceeași latură a plăcii, ceea ce permite folosirea cuplelor de conexiune.

6. REZULTATE, PERFORMANȚE

Cuadratorii aceștia aproximează o parabolă de tip $e_e = ke_i^2$ cu o eroare ce nu depășește $\varepsilon_{max} = 1\%$. Curba teoretică a parabolei și curba de aproximare a ei de către cuadrator sînt date în figura 7.

Într-o nouă variantă, elementul de cuadrare a fost reglat astfel ca segmentele de drepte de aproximare să fie secante la parabolă, dar punctele de frîngere nefiind pe parabolă, ci pe partea convexă a ei, obținînd erori pozitive și negative față de parabola teoretică, dar de valori absolute pînă la 0,7%.

Utilizarea diodelor cu germaniu permite obținerea preciziei dorite la o variație de temperatură foarte mică (în încăperi de laborator) dar pentru variații de temperatură de la 0 la + 40°C (cum se întîlnesc în condițiile de amplasare a

instalaţiilor industriale) variaţia rezistenţei inverse a acestor diode este foarte mare, astfel că erorile cresc considerabil. Cum acest element de cuadrare dorim a-l introduce într-un dispozitiv cu utilizare industrială, în prezent se înlocuiesc

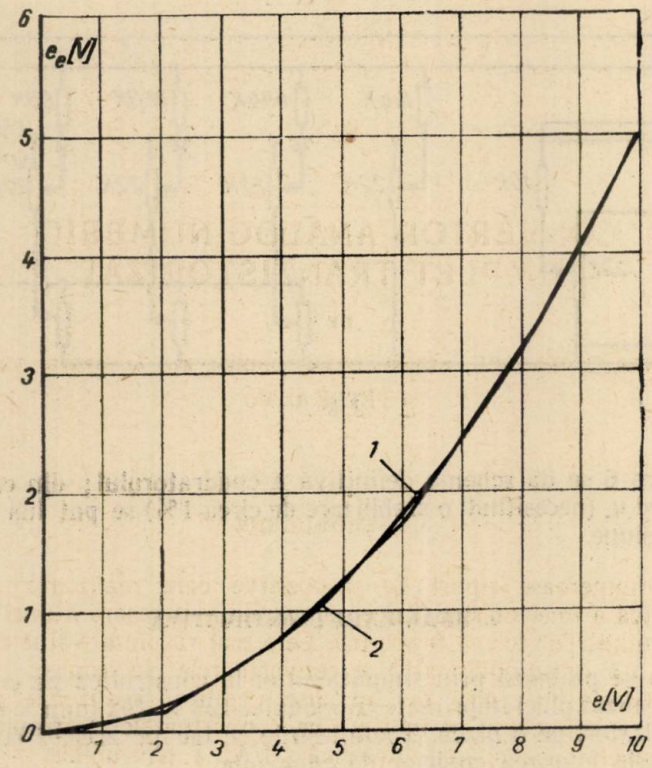


Fig. 7

diodele cu germaniu prin diode cu siliciu — care se fabrică în ţară — , fapt ce simplifică şi construcţia elementului, prin eliminarea tensiunii u' şi a potenţiometrului corespunzător.

Primit la redacţie la 20 februarie 1964.

CONVERTOR ANALOG-NUMERIC COMPLET TRANZISTORIZAT

DE

CORNELIU PENESCU, MEMBRU CORESPONDENT AL ACADEMIEI R.P.R.,
și PETRE DIMO

518.5

I. INTRODUCERE

Există numeroase tipuri de dispozitive care realizează conversiunea analog-numerică a unei mărimi fizice, conversiune necesară atunci cînd se prelucrează informația sub formă numerică. Cele mai răspîndite sînt convertoarele mecanice (de tip „disc codificat") și convertoarele electronice.

Convertoarele mecanice de tip disc codificat realizează conversiunea analog-numerică a unghiurilor în timp ce convertoarele electronice realizează în general conversiunea analog-numerică (A/N) a tensiunilor.

Pentru realizarea conversiunii A/N se compară într-un dispozitiv de comparație o tensiune etalonată, variabilă, generată în interiorul convertorului cu tensiunea necunoscută.

Obținerea tensiunii variabile se poate face în mai multe feluri. Există convertori în care tensiunea variabilă este debitată de un generator de tensiune liniar variabilă în timp la una din intrările comparatorului, în timp ce la cealaltă se aplică tensiunea de măsurat (de convertit). La egalitatea celor două tensiuni, comparatorul debitează un impuls care oprește sistemul.

Între începutul măsurării și impulsul de oprire lucrează un generator de impulsuri de frecvență foarte constantă, iar numărul de impulsuri debitat în acest răstimp este înregistrat într-un numărător. Astfel numărul înregistrat aici este direct proporțional cu tensiunea de măsurat.

Un asemenea sistem prezintă avantajul unei mari simplități constructive, însă apar dificultăți în ceea ce privește constanța frecvenței generatorului de impulsuri și liniaritatea tensiunii etalon.

St. cerc. energ. electr. Tom. 14 Nr. 2 p. 369 — 383 București 1964

Altă metodă este compararea tensiunii necunoscute cu o tensiune etalon variabilă discontinuu. Aici sînt două posibilităţi :

a) Se împarte domeniul de măsură în n subdomenii de amplitudini egale cu $\frac{A}{2^n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Tensiunea de măsură se compară întîi cu $\frac{A}{2}$.

Dacă este mai mică, atunci în sistemul de înregistrare numeric se înregistrează un „O".

Dacă este mai mare, atunci în sistemul de înregistrare numeric se înregistrează un „1".

Dacă tensiunea necunoscută a fost mai mică decît $\frac{A}{2}$, atunci ea va fi în continuare comparată cu $\frac{A}{2^2}$, iar dacă a fost mai mare, va fi comparată cu $\frac{A}{2} + \frac{A}{2^2}$. Se va înregistra „O" sau „1" după cum tensiunea necunoscută este mai mică (respectiv mai mare) decît valoarea nouă ce i se propune. Procesul de comparaţie continuă aşa mai departe, fiind ilustrat în figura 1.

b) Se compară tensiunea necunoscută cu o tensiune crescătoare în trepte, începînd de la zero. În momentul cînd diferenţa dintre cele două tensiuni este mai mică decît o treaptă, procesul de comparare încetează iar numărul de trepte înregistrat într-un numărător este reprezentarea numerică a mărimii necunoscute.

Sistemul (*a*) este foarte avantajos pentru cazul folosirii convertorului direct în instalaţii cifrice industriale, legat de exemplu de o maşină numerică de

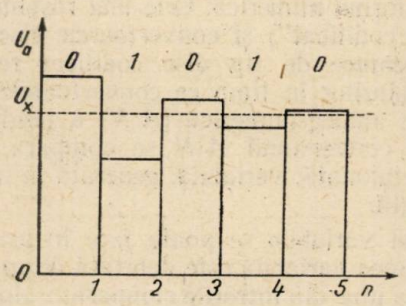


Fig. 1. — Compararea cu tensiune discontinuă

calculat. Este însă incomodă această metodă în cazul în care vrem să facem afişarea numărului obţinut, în sistem zecimal.

Sistemul (*b*) cumulează simplitatea realizării practice cu uşurinţa de obţinere a afişajului numărului în sistem zecimal. Acest lucru este esenţial cînd convertorul respectiv trebuie folosit într-o instalaţie de măsură numerică.

II. CONVERTORUL A/N PROPUS

Convertorul A/N propus este de tipul (b) de mai sus. El se pretează foarte bine pentru realizarea unui voltmetru digital cu afişaj în sistem zecimal.

Domeniul în care poate să varieze mărimea necunoscută este 10 mV – –9,99 V. Precizia măsurătorii trebuie să fie mai bună decît 0,5%. Timpul în care tensiunea variază de la 0 la valoarea maximă este de 0,05 s.

III. PRINCIPIUL CONVERTORULUI

Schema bloc din figura 2 ilustrează principiul de funcţionare a convertorului.

Impulsurile furnizate de generatorul de impulsuri G.I. sînt numărate de numărătorul n cu 10 etaje. Acelaşi numărător comandă o reţea de rezistenţe care realizează tensiunea variabilă în trepte. Reţeaua constituie convertorul N/A şi reprezintă legătura inversă a întregului sistem.

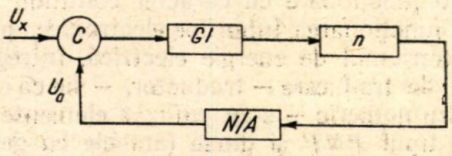


Fig. 2. — Convertor A/N

Tensiunea variabilă în trepte ce se obţine la ieşirea convertorului N/A se compară cu tensiunea necunoscută în comparatorul C. În momentul

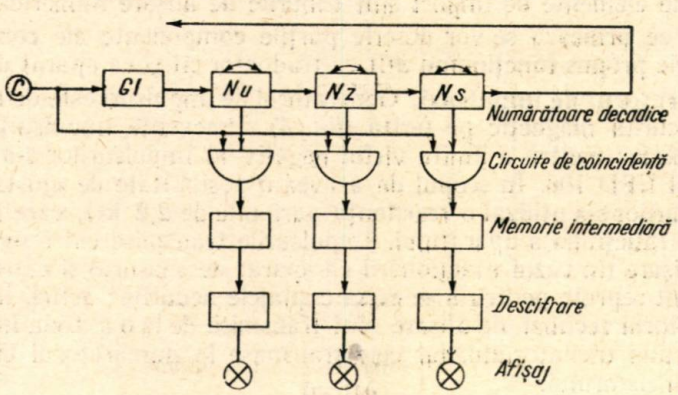


Fig. 3. — Sistem de afişaj

în care cele două tensiuni sînt egale, comparatorul generează un impuls care determină oprirea numărării (încetează sosirea de impulsuri de la generator la numărătorul n), ştergerea şi apoi reluarea de la zero a măsurării.

Deoarece convertorul va folosi într-un aparat de măsură numerică este necesar un sistem de afişaj. Acest sistem este constituit din 3 numărătoare

decadice legate în serie care numără în sistem binar zecimal aceleași impulsuri pe care le înregistrează și numărătorul *n* (fig. 3).

În acest fel, în primul numărător sînt înregistrate unitățile, în al doilea zecile și în al treilea sutele de impulsuri.

După o mie de impulsuri toată instalația revine în starea inițială. În momentul stabilirii egalității dintre tensiunea necunoscută și cea variabilă, procesul de numărare încetează iar informația conținută în circuitele bistabile ale numărătorului zecimal este transferată în circuite de memorie tampon prin intermediul unor circuite de coincidență.

Memoria intermediară acționează direct sistemul de aprindere al lămpilor de afișaj (tuburi Nixie). Dacă între două măsurări succesive nu există nici o deosebire atunci bistabilii care constituie memoria tampon vor rămîne în aceeași stare. Acest lucru este necesar pentru a evita pîlpîirea lămpilor de afișaj.

IV. REALIZAREA CONSTRUCTIVĂ

Pentru a avea o funcționare cu caracter continuu și pentru a se evita defecțiunile legate de funcționarea tuburilor electronice, precum și pentru a se reduce la minimum consumul de energie electrică, întregul convertor, fie că este folosit ca element de traducere – traductor, – fie că este folosit ca element de măsură – voltmetru numeric – s-au utilizat elemente semiconductoare și anume tranzistori de tipul *PNP* și diode (ambele cu germaniu) de fabricație indigenă. De asemenea, celelalte elemente de circuit – rezistențe, condensatoare, materiale feromagnetice – sînt de tipul ce se realizează curent în țara noastră.

Singurele elemente de import sînt tuburile de afișare numerică, cu cifre.

În cele ce urmează se vor descrie părțile componente ale convertorului analog-numeric propus funcționînd atît ca traductor cît și ca aparat de măsură.

1. **Generatorul de impulsuri.** Generatorul de impulsuri este de tipul autoblocat cu circuitul magnetic pe ferită (fig. 4). Frecvența impulsurilor a fost aleasă de 20 kHz; pentru a limita vîrful negativ al impulsurilor s-a utilizat o diodă de tipul EFD 106. În scopul de a avea o posibilitate de ajustare a frecvenței impulsurilor s-a utilizat o rezistență variabilă de 2,2 kΩ, care se reglează la punerea în funcțiune a aparatului. Impulsurile transmise către numărătorul zecimal de afișare (în cazul funcționării ca aparat de măsură) și către numărătorul binar sînt seprate pentru a se evita cuplajele nedorite; astfel, impulsurile către numărătorul zecimal de afișare sînt transmise de la o a treia înfășurare a transformatorului oscilatorului, iar cele transmise la numărătorul binar de la colectorul tranzistorului.

Tranzistorul folosit este de tipul EFT 323 iar transformatorul oscilatorului a fost realizat pe o ferită inelară de 6 mm diametru.

2. **Numărătorul binar.** Numărătorul binar s-a realizat dintr-o succesiune de 10 elemente bistabile cuplate între ele prin intermediul unor condensatoare de cuplaj și diode. Se menționează că comanda fiecărui element bistabil se face prin impulsuri pozitive aplicate simultan pe ambele baze ale celor doi tranzistori ce intră în componența unui element bistabil. Polarizarea bazelor tranzistorilor

din numărător se face automat prin grupuri rezistență capacitate (30 ohmi — — 50 nF).

Pentru a se readuce la zero numărătorul, se aplică un impuls pozitiv la baza unui tranzistor suplimentar ceea ce duce la blocarea momentană a aces-

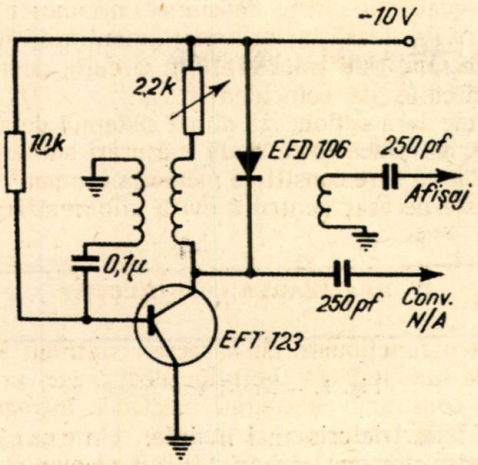


Fig. 4. — Generator de impulsuri

tuia. Deoarece, în stare normală tranzistorul este saturat prin curentul de bază (determinat de rezistența de 82 kohmi) în momentul blocării sale toți tranzistorii din elementele bistabile vor fi dezechilibrați în același mod ceea ce conduce la aducerea simultană a elementelor bistabile în aceeași stare, care corespunde numărului „zero".

Tranzistorii ce formează elementele bistabile sînt de tipul EFT 323, iar diodele ce permit accesul la bazele tranzistorilor sînt de tipul EFD 106.

Ieșirile de la numărător, simetrice pentru fiecare etaj al numărătorului, se fac de la colectorii tranzistorilor prin punctele notate în schema din figura 5 prin a_i, și b_i. Prin aceste ieșiri se face legătura cu convertorul numeric-analog.

3. **Convertorul numeric-analog.** Convertorul numeric analog a fost realizat printr-o rețea rezistivă comandată de numărătorul binar precedent prin intermediul unor tranzistori intermediari (de tipul EFT 352); rețeaua rezistivă se compune din rezistențe cu numai două valori nominale și nu cu rezistențe crescînd progresiv în raportul doi, deoarece în acest din urmă caz s-ar fi ajuns, la valori atît de mari ale rezistențelor încît, pe de o parte, ar fi necesitat comparații între tensiuni extrem de mici, iar pe de altă parte, ar fi provocat funcționări eronate datorită zgomotului mare de fond introdus de asemenea rezistențe.

După cum se vede din figura 6 rețeaua rezistivă este alimentată de o tensiune etalon provenită de la o sursă specială cu o stabilitate foarte bună (rezistență internă de circa 0,01 ohmi); valoarea tensiunii stabilizate este de 15 V.

Rezistențele rețelei, de care depinde în cea mai mare măsură precizia aparatului, au fost realizate la Institutul de metrologie cu precizia de $1^0/_{00}$.

Tranzistorii K_i, K_i' din fiecare rang din convertor sînt comandaţi prin intermediul rezistenţelor limitatoare R_1 de către tensiunile obţinute la colec-

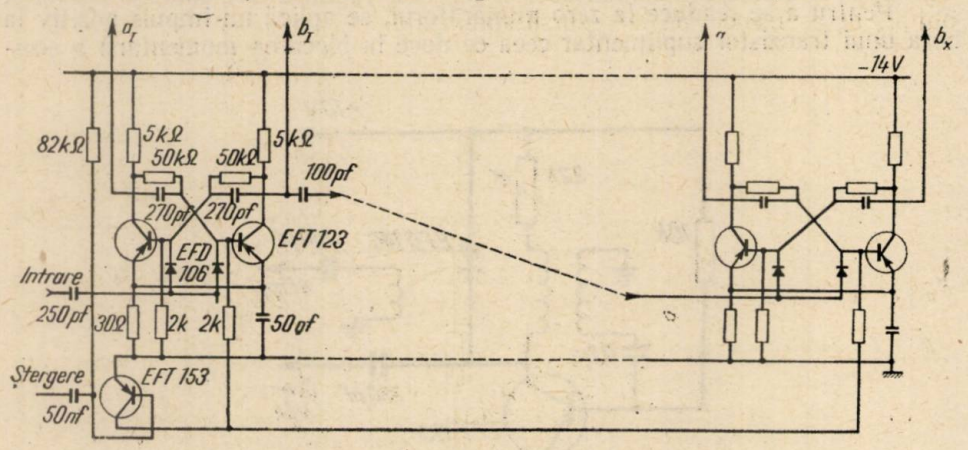


Fig. 5. — Numărător binar

torii numărătorului binar descris mai înainte. Un tranzistor de ordinul K_i va fi în stare de conducţie dacă tranzistorul corespunzător din numărătorul binar este blocat deoarece, în această situaţie, tensiunea la colectorul acestuia

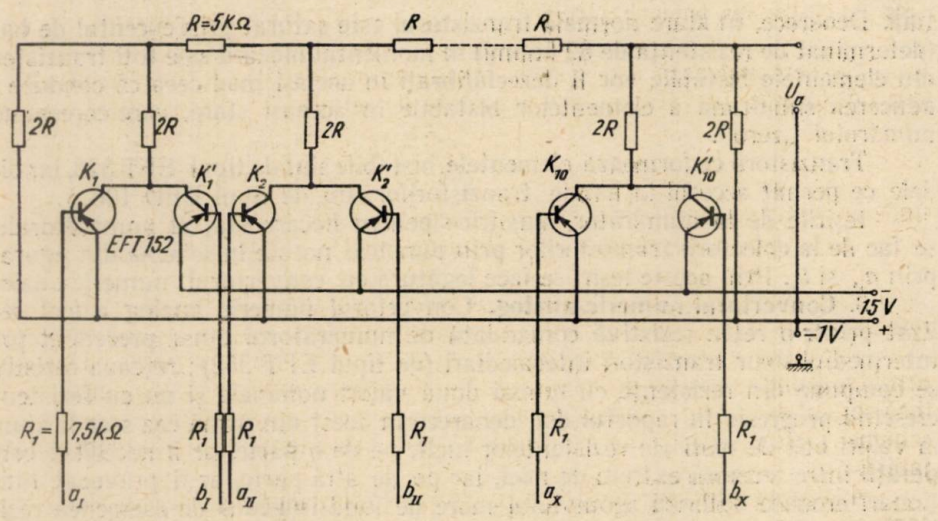


Fig. 6. — Convertor N/A

din urmă este maximă, în valoare negativă, iar curentul de bază al tranzistorului corespunzător din reţea este maxim.

Pentru a fi asigurată blocarea tranzistorilor care comandă reţeaua, legătura comună de potenţial pozitiv a tensiunii etalon se găseşte la un potenţial

mai negativ decît potențialul emiterelor tranzistoarelor din numărătorul binar cînd acestea conduc. Valoarea acestei tensiuni suplimentare este de 1 V și se obține, de asemenea, de la o sursă stabilizată.

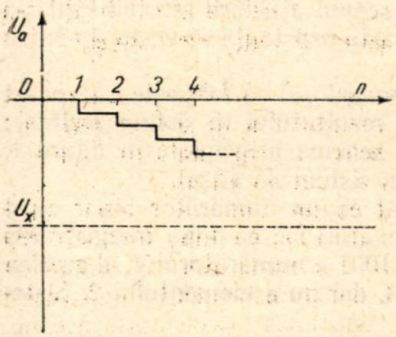


Fig. 7. — Variația tensiunii analoge

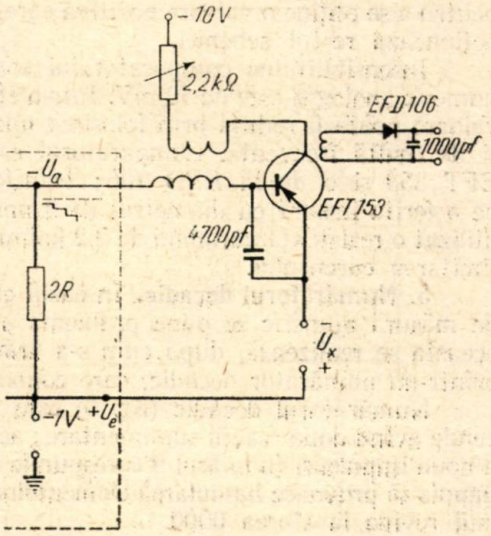


Fig. 8. — Comparatorul

Se demonstrează ușor [1] că tensiunea analoagă la ieșire (în punctul M din fig. 6) este, în valoare absolută, dată de relația

$$U_a = \frac{2}{3} \sum_{0}^{n-1} \frac{U_e}{2^n} k_i 2^i,$$

unde n este numărul de ranguri de cod,
k_i „ cifra în rangul i al codului (0 sau 1),
i „ rangul.

Tensiunea la ieșire U_a are o variație crescătoare în trepte în funcție de numărul impulsurilor înregistrate de numărător.

Această tensiune va depinde evident și de rezistența la intrare a elementului următor (comparatorul) ceea ce ar putea denatura convertirea analogică; ținînd însă seama de faptul că rezistența de intrare a comparatorului este — datorită schemei alese — foarte mare influența acestei rezistențe devine cu totul neglijabilă.

4. **Comparatorul**[1]. Pentru o funcționare cît mai precisă nu s-a ales pentru comparator soluția unui amplificator de curent continuu care datorită derivei sale mari ar fi falsificat rezultatele; soluția aleasă a fost a unui oscilator blocat a cărui stare de blocare este menținută atîta timp cît tensiunea punctului M (același cu punctul M din schema de la fig. 7) nu este mai negativă decît $-U_x$ (tensiunea de măsurat); schema comparatorului este dată în figura 8.

[1]) Se află în studiu o versiune îmbunătățită a comparatorului.

Cînd în punctul M tensiunea devine mai negativă decît $-U_z$ apare un curent în tranzistorul din oscilatorul blocat. Înfăşurările bobinelor sînt legate astfel încît să se obţină o reacţie pozitivă ceea ce duce la apariţia unui impuls de scurtă durată la bornele înfăşurării de ieşire. Acest impuls este redresat pentru a se obţine o valoare pozitivă care, amplificată ulterior printr-un repetor, acţionează restul schemei.

Insensibilitatea comparatorului corespunde unei trepte din convertorul numeric analog şi este de 10 mV. Într-o etapă următoare se apreciază că această valoare poate fi redusă prin folosirea unor tranzistoare de semnale foarte mici şi de înaltă frecvenţă. Comparatorul este echipat cu un tranzistor de tipul EFT 353 şi o diodă EFD 106; transformatorul de oscilaţie a fost realizat pe o ferită inelară cu diametrul de 6 mm. În scopul ajustării sensibilităţii s-a utilizat o rezistenţă variabilă de 2,2 kohmi; această rezistenţă serveşte şi pentru limitarea curentului.

5. **Numărătorul decadic.** În cazul cînd convertorul se foloseşte ca aparat de măsură numeric se pune problema afişării rezultatului în sistem zecimal; aceasta se realizează, după cum s-a arătat în schema principială în figura 1, printr-un numărător decadic, care comandă un sistem de afişaj.

Numărătorul decadic (fig. 9) este realizat ca un numărător binar cu 4 celule avînd două reacţii suplimentare; aceste legături fac ca după înregistrarea a nouă impulsuri (numărul 9 corespunde stării 1001 a numărătorului, al zecelea impuls să provoace bascularea elementelor 1 şi 4, dar nu a elementului 2. Sistemul revine la starea 0000.

În starea 1001 sînt basculate elementele a şi d şi prin urmare tranzistoarele T_1 şi T_4 sînt blocate; potenţialele punctelor A şi D pentru această situaţie sînt foarte negative iar potenţialul punctului C este aproape zero.

La sosirea impulsului al 10-lea, elementul *1* este readus în starea zero; impulsul pozitiv care se obţine în A nu provoacă însă bascularea elementului *2* care este scurtcircuitat de către dioda D_2; în schimb însă, acelaşi impuls provoacă prin dioda D_1 bascularea elementului *4* deoarece impulsul este aplicat la baza tranzistorului T_4.

Ştergerea numărului înregistrat, adică trecerea în poziţia 0000, se face în acelaşi mod ca la numărătorul binar prin intermediul unui tranzistor suplimentar.

Impulsurile sînt primite de la generatorul de impulsuri menţionat mai înainte, iar impulsul de ştergere se primeşte de la comparator printr-un element monostabil despre care se va vorbi mai tîrziu.

Tranzistorii şi diodele folosite în numărătorul decadic sînt de acelaşi tip ca acelea folosite în numărătorul binar, adică tranzistori EFT 323 şi diode de tipul EFD 106.

6. **Memoria.** Pentru a se evita pîlpîirea tuburilor indicatoare atunci cînd convertorul se foloseşte ca aparat de măsură numeric, se intercalează între numărătorii decadici şi sistemul de decodificare, elemente de memorizare care reproduc starea numărătorilor decadici la sfîrşitul fiecărui ciclu de măsurare. Elementele de memorizare sînt de fapt elemente bistabile, independente comandate în paralel prin intermediul unor porţi „şi" de impulsurile amplificate de la comparator prin intermediul unui repetor tranzistorizat şi a impulsurilor de la numărătorii decadici.

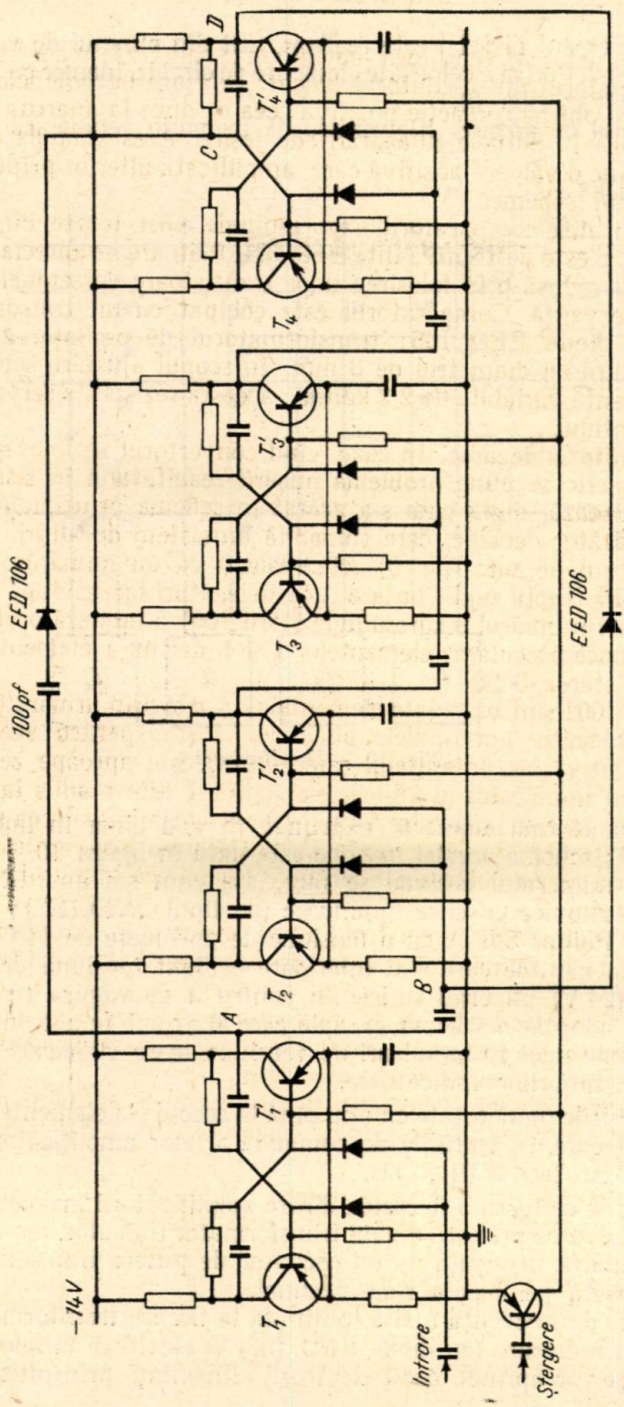


Fig. 9. — Numărător decadic

Fiecare element bistabil este realizat, atît din punctul de vedere al tranzistorilor și diodelor cît și a celorlalte elemente de circuit, identic cu bistabilii de la numărătorul binar (fig. 5).

7. **Sistemul de afișare.** Elementele de memorie acționează o matrice cu

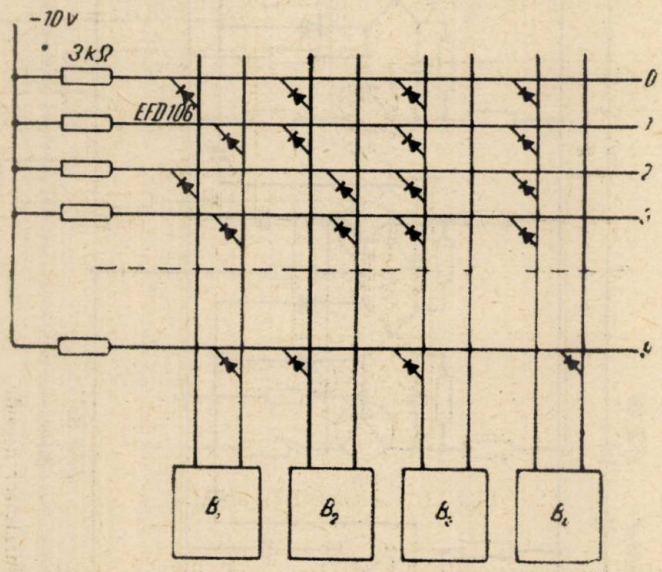


Fig. 10. — Descifratorul

diode care transformă numărul exprimat în cod binar în număr exprimat în cod zecimal; schema acestei matrice este dată în figura 10.

Afișarea numărului zecimal se face, așa cum s-a amintit mai înainte, prin tuburi electronice cu cifre luminoase (de tipul „NIXIE"); deoarece s-au folosit tuburi Philips 502 A cu o tensiune de aprindere de 140 V impulsurile provenite de la matrice care sînt inferioare evident tensiunii de alimentare a tranzistorilor (24 V) nu erau suficiente pentru a se asigura funcționarea. În acest scop, s-a adoptat o schemă specială care are rolul de a transforma impulsurile de tensiune mică în impulsuri de tensiune mare suficiente pentru a excita electrozii tuburilor indicatoare.

Astfel, ieșirile numerotate cu unu pînă la zece de la elementele de memorie alimentează, fiecare, înfășurările de comandă a unor amplificatoare magnetice miniaturizate cu ferită (fig. 11).

Înfășurarea de lucru a fiecăruia dintre amplificatorii magnetici este legată în serie cu înfășurarea primară a unui transformator ridicător, iar ansamblul este alimentat cu înaltă frecvență de un oscilator de putere tranzistorizat; același aranjament există pe fiecare rang zecimal.

Tensiunea de frecvență înaltă, obținută la fiecare transformator ridicător, se aplică după redresare (cu diode EFD 108) la electrozii cifrelor din tuburile de afișaj. Nu se vor aprinde decît electrozii alimentați prin intermediul acelor

amplificatoare magnetice care sînt saturate, adică prin a căror înfăşurare de comandă trece un curent determinat de elementele din matrice.

Transformatorii ridicători sînt obţinuţi din aceleaşi amplificatoare magnetice prin inversarea sensului de înfăşurare a unei jumătăţi a bobinei de co-

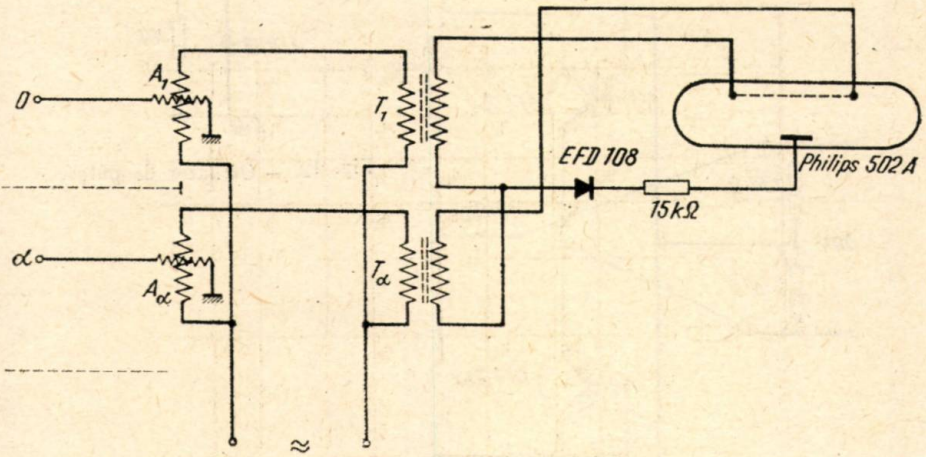


Fig. 11. — Sistemul de afişaj

mandă (amplificatorul magnetic realizat pe două inele de ferită de 6 mm are bobinele de comandă simetric aşezate pe fiecare din cele două ferite, iar bobina de lucru îmbrăţişează ambele ferite; aceasta în scopul binecunoscut de a se reduce efectul de reacţie dat de curentul ce străbate bobina de lucru în bobinele de comandă).

Oscilatorul de putere este un oscilator cu reacţie folosind doi tranzistori de putere EFT 250 montaţi în antifază; transformatorul de reacţie este realizat pe un miez de ferită de tip E; de menţionat că toate feritele utilizate în aparatul prezentat sînt fabricate la ICET iar amplificatoarele magnetice au fost realizate de către Institutul de fizică atomică al Academiei R.P.R.

Schema oscilatorului de putere este dată în figura 12.

Tranzistoarele funcţionează în regim de comutaţie; prin urmare ei nu disipă putere apreciabilă decît în intervalul de timp foarte scurt în care trec dintr-o stare extremă în alta. Acest lucru elimină pericolul unei supraîncălziri a lor şi ca atare au fost montaţi pe radiatoare de dimensiuni reduse.

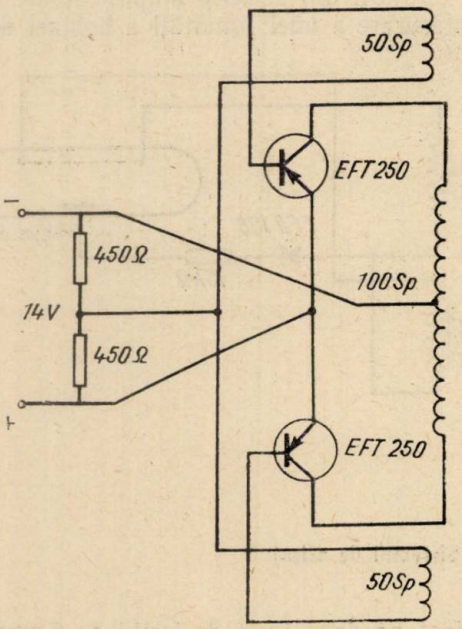
8. **Elemente auxiliare**. Pentru întreaga instalaţie s-au folosit şi o serie de elemente auxiliare care sînt următoarele:

— *Porţi „şi"*

Porţile „şi" utilizate sînt de tipul curent utilizînd două diode EFD 106 (fig. 13);

— *Element monostabil*

Elementul monostabil a fost realizat cu doi tranzistori de tipul EFT 323 cuplaţi în paralel pe emiter (fig. 14);



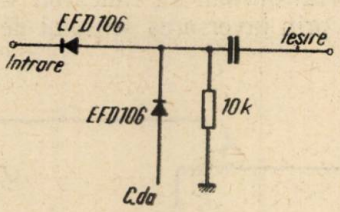


Fig. 12. — Oscilator de putere

Fig. 13. — Porți „și"

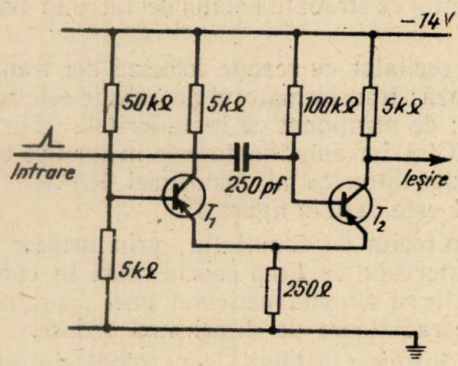


Fig. 14. — Monostabil

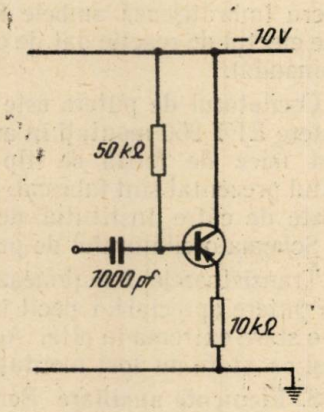


Fig. 15. — Repetor

– *Amplificatorul repetor*

Amplificatorul repetor are un singur tranzistor de tipul EFT 323 (fig. 15); intrarea în amplificator se face pe bază, iar ieşirea pe emiter;

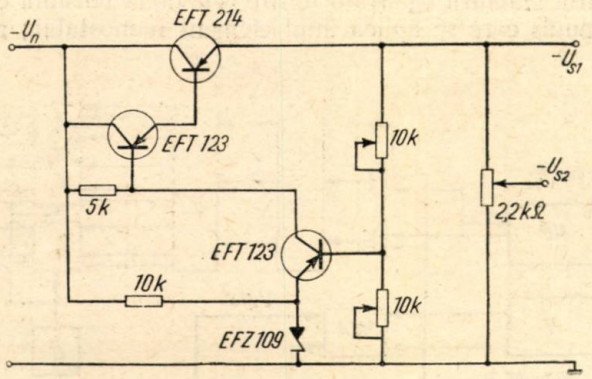


Fig. 16. – Stabilizator

– *Sursele stabilizate*

În aparat s-au utilizat două surse stabilizate separate, din care una serveşte pentru alimentarea convertorului numeric-analog, iar cealaltă pentru alimentarea celorlalte elemente.

Sursele stabilizate sînt alimentate de la reţea prin intermediul unui redresor în punte; stabilizarea se realizează într-o schemă cu trei tranzistori din care două de putere mică de tipul EFT 323 iar unul de putere mare de tipul EFT 214 (fig. 16). Valoarea tensiunii stabilizate, dată de relaţia

$$U_{stab} = \frac{R_1 + R_2}{R_2} U_z$$

este determinată de valoarea tensiunii caracteristice a unei diode Zener (de tipul fabricat în ţară avînd tensiunea Zener de circa 9 V). Întrucît, pe de o parte, sînt necesare la stabilizatorul general mai multe tensiuni (1 V, 10 V şi 24 V) iar pe de altă parte tensiunea Zener depinde de la diodă, la diodă au fost necesari potenţiometrii suplimentari de ajustare.

Stabilizarea tensiunilor este considerată ca foarte bună, rezistenţa internă fiind pentru stabilizatorul tensiunii de comparaţie de ordinul 0,01 Ω.

V. FUNCŢIONAREA ANSAMBLULUI

În figura 17 este dată schema funcţională a întregului aparat.

Funcţionarea se desfăşoară în felul următor:

Generatorul de impulsuri *GI* trimite simultan impulsuri într-un numărător decadic *ND* şi într-un numărător binar *N*.

Numărătorul N comandă mai departe convertorul numeric analog a cărui tensiune variabilă în trepte este aplicată la una din intrările comparatorului C; la cealaltă intrare a comparatorului se aplică tensiunea necunoscută de măsurat U_x.

În momentul stabilirii egalităţii dintre cele două tensiuni comparatorul C transmite un impuls care se aplică unui element monostabil; prin bascularea

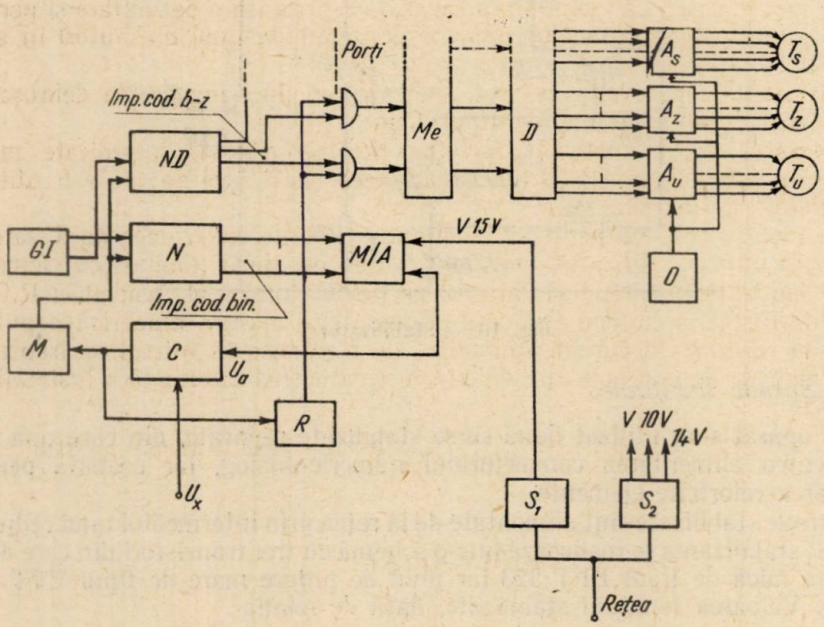


Fig. 17. — Schema funcţională a aparatului de măsură

acestui element monostabil, impulsul este transmis mai departe după amplificarea într-un amplificator-repetor R în paralel la unele din bornele de intrare ale porţilor „şi". Celelalte borne ale porţilor sînt acţionate de ieşirile de la numărătorul decadic.

Ieşirile de la porţi în condiţiile de coincidenţă ale impulsurilor de la repetor şi de la numărătorul decadic acţionează elementele de memorie şi le modifică starea numai dacă acestea din urmă se găsesc într-o stare deosebită decît aceea care le fusese transmisă în ciclul anterior. Memoria comandă permanent descifratorul D care transformă informaţia din cod binar în cod zecimal şi aplică tensiuni convenabile amplificatoarelor magnetice A; acestea, la rîndul lor, determină cu ajutorul oscilatorului O, aprinderea lămpilor de afişaj T.

Ştergerea informaţiilor din N şi ND se face o dată cu revenirea lui M în starea iniţială, procesul de măsurare fiind reluat de la început. Datorită prezenţei memoriei, reluarea ciclului de măsurare nu se face simţită prin pîlpîire la lămpile de afişare.

VI. CONCLUZII

În lucrarea prezentată s-a descris un convertor analog-numeric complet tranzistorizat folosindu-se numai elemente construite în țară (cu excepția tuburilor de afișaj). Acest convertor, de o concepție nouă, poate folosi atît ca traductor numeric de tensiune sau curent, cît și ca aparat de măsură numeric.

Se menționează că instalația prezentată reprezintă o dezvoltare și perfecționare a unui convertor analog-numeric conceput de unul din autori în anul 1961 [2].

Elementele aparatului au fost realizate pe plăci imprimate debroșabile folosind cuple multicontacte de tipul Qanta.

Aparatul se caracterizează printr-o precizie ridicată, rapiditate mare, precum și o mare siguranță în funcționare, ceea ce îl face apt de a fi utilizat în instalațiile industriale.

Se menționează că pentru a se elimina tuburile electronice de afișare se studiază în prezent utilizarea unui nou sistem de afișaj luminos cu elemente complet fabricate în țară, la Institutul de fizică atomică al Academiei R.P.R.

Autorii sînt în curs de a elabora un aparat de măsură numerică a puterii active sau reactive în curent alternativ, de asemenea în întregime tranzistorizat și care va avea o aplicație directă în conducerea automată a instalațiilor energetice.

Primit la redacție la 30 februarie 1964.

BIBLIOGRAFIE

1. E. V. GHITIS, *Convertori de informație pentru dispozitivele electronice cifrice de calcul.* Gosenergoizdat, 1961.
2. C. PENESCU, *L'utilisation des convertcurs analogues-numériques pour le contrôle des installations énergétiques.* Comunicare la Congresul Internațional IMEKO, Budapesta, 1961, AKTA IMEKO, raport RO-130, 1961.
3. — *Automatica și telemecanica sistemelor energetice*, vol. III, Edit. Acad. R.P.R., București, 1961.
4. T. TĂNĂSESCU și alții, *Circuite cu tranzistoare*, Edit. tehnică, București, 1961.
5. R. BUZNEA și alții, *Circuite cu tranzistoare în telecomunicații*, Ed. tehnică, București, 1962.
6. S. S. HAKIM, *Junction transistor circuit analysis.* Editura Wiley, New York, 1962.
7. . . . *Bell System.* Technical Journal, mai 1956.

DIAGRAMA ENTROPICĂ CU AXE CURBE PENTRU 1 KG DE SUBSTANŢĂ

DE

CĂLIN ADRIAN VASILESCU şi VICTOR PIMSNER

536.46 : 662.61

Utilizarea diagramelor entropice la calculul ciclurilor motoarelor cu ardere internă prezintă, în afara rapidităţii calculului, posibilitatea de a determina mai exact transformările fluidului de lucru, deoarece pot reda mai fidel variaţia căldurilor specifice în funcţie de mărimile de stare ale sistemului, cu condiţia ca diagrama utilizată să corespundă fluidului ce evoluează în motor.

În afara aerului aspirat, natura fluidului din motor este determinată de compoziţia combustibilului şi de coeficientul excesului de aer, de unde rezultă necesitatea unui număr mare de diagrame entropice, corespunzător diverşilor combustibili şi coeficienţi ai exceselor de aer utilizaţi, ceea ce constituie impedimentul principal în utilizarea diagramelor entropice. Pentru un anumit tip de combustibil, se ocoleşte această dificultate folosindu-se diagramele entropice cu axe curbe, ce corespund exceselor de aer utilizate în motoarele studiate. În acest caz, pentru a elimina influenţa variaţiei greutăţii moleculare a fluidului de lucru, cînd se modifică coeficientul excesului de aer α diagramele se construiesc pentru un mol de substanţă [1].

În articolul de faţă se prezintă posibilitatea particularizării compoziţiei combustibilului astfel ca diagrama entropică cu axe curbe destinată calculului termodinamic al motorului cu aprindere prin compresiune să fie construită pentru un kilogram de fluid.

1. Compoziţia chimică a motorinei influenţează în mică măsură proprietăţile termodinamice ale gazelor de ardere deoarece preponderent în acestea este azotul şi la excese mari de aer, oxigenul. Pentru exemplificare, în figura 1, se prezintă variaţia procentuală a entalpiei gazelor de ardere, la temperatura $T = 1\,800°K$ pentru patru compoziţii de combustibil la care carbonul variază

St. cerc. energ. electr. Tom. 14 Nr. 2 p. 385 — 390 Bucureşti 1954

de la $c = 0{,}82-0{,}88$ şi hidrogenul de la $h = 0{,}18-0{,}12$. Se constată că variaţia procentuală faţă de combustibilul avînd $c = 0{,}86$ şi $h = 0{,}14$ nu depăşeşte 1,5% ea micşorîndu-se o dată cu creşterea coeficientului excesului de aer.

Pe de altă parte aşa cum se vede din tabela 1, compoziţia motorinelor este mult mai strînsă decît limitele admise în exemplul din fig. 1 şi prin urmare

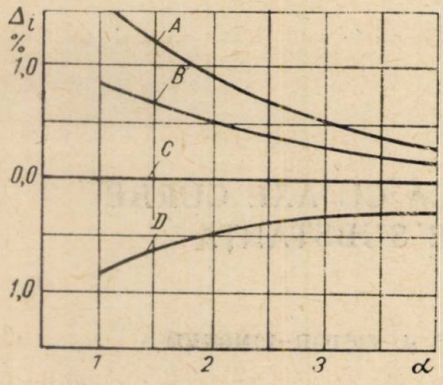


Fig. 1. — Variaţia procentuală a entalpiei gazelor produse ale arderii Δi raportate la combustibilul C pentru diferite valori ale coeficientului excesului de aer α. Temperatura $T = 1\,800°K$. Compoziţia : combustibil A : $c = 0{,}82$; $h = 0{,}18$; combustibil B : $c = 0{,}84$; $h = 0{,}16$; combustibil C : $c = 0{,}86$; $h = 0{,}14$; combustibil D : $c = 0{,}88$; $h = 0{,}12$.

calcularea ciclurilor de motoare cu aprindere prin compresiune punînd la bază un combustibil „standard" este justificată şi de posibilitatea utilizării unor diagrame preconstruite.

Tabela 1

Compoziţia unor motorine

Tipul combustibilului	Analiza elementară		Congelare °C	Indice Diesel
	c %	h %		
Motorină plus 15	85,8	13,3	+6	61
Motorină minus 15	86,2	13,1	−15	38
Motorină minus 10	85,8	13,5	−11	45
Motorină asfaltuasă	85,3	13,8	−20	32

2. Folosirea unei singure diagrame pentru toate fluidele ce evoluează în motorul ce arde motorină, aer şi gaze produse ale arderii pentru diferiţi coeficienţi ai excesului de aer este posibilă luîndu-se o serie de măsuri care conduc la realizarea unei diagrame entropice cu axe curbe. Pentru ca în aceeaşi diagramă să se poată înscrie punctele reprezentînd stări ale unor gaze diferite, este necesar ca reţeaua de izobare, respectiv de izocore, să fie identică pentru toate gazele luate în considerare.

Valoarea entropiei unui amestec de gaze la temperatura T şi la presiunea p, $S_{(T,p)\text{amestec}}$ se poate calcula cunoscîndu-se entropia specifică a fiecărei componente $s_{(T,p_0)_i}\left[\frac{\text{kJ}}{\text{kg}\cdot°\text{K}}\right]$ la temperatura T şi presiunea p_0, cantitatea din fiecare

component m_i [kg] constanta gazului $R_i \left[\frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot °\text{K}}\right]$ cu relaţia

$$S_{(T,p)\text{amestec}} = \sum m_i \, s_{(T,p_0)_i} + \sum m_i \, R_i \ln \frac{m}{m_i} \frac{R}{R_i} - mR \ln \frac{p}{p_0} \qquad (1)$$

unde m [kg] şi $R \left[\frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot °\text{K}}\right]$ reprezintă respectiv cantitatea totală de substanţă şi constanta amestecului de gaze.

Pentru ca aceeaşi reţea de izobare (respectiv izocore) să poată fi folosită pentru gaze diferite va trebui să se respecte condiţia:

$$\left(mR \ln \frac{p}{p_0}\right)_{\text{gaz } A} = \left(mR \ln \frac{p}{p_0}\right)_{\text{gaz } B} = \ldots, \qquad (2)$$

ceea ce se reduce la

$$(mR)_{\text{gaz } A} = (mR)_{\text{gaz } B} = \ldots; \qquad (3)$$

prin urmare necesitatea folosirii aceleiaşi reţele de izobare pune o condiţie în ceea ce priveşte legătura dintre cantitatea şi calitatea gazului (exprimată prin constanta acestuia). Deoarece în mod obişnuit constanta gazului R variază de la substanţă la substanţă, se alege pentru cantitatea de gaz masa unui mol $\mathfrak{M}$ astfel că

$$(\mathfrak{M}R)_{\text{gaz } A} = (\mathfrak{M}R)_{\text{gaz } B} = \ldots \mathfrak{R}, \qquad (4)$$

unde $\mathfrak{R} = 8{,}317 \left[\frac{\text{kJ}}{\text{k mol°K}}\right]$. Prin urmare diagramele entropice cu axe curbe se construiesc pentru un kilomol de substanţă.

3. Există şi o altă posibilitate de a satisface condiţiile exprimate prin relaţia (3); pentru aceasta este suficient să se aleagă gaze la care

$$(R)_{\text{gaz } A} = (R)_{\text{gaz } B} = \ldots = R. \qquad (5)$$

În acest caz cantitatea de substanţă care stă la baza construirii diagramei este aceeaşi pentru toate gazele şi poate fi aleasă oricît, spre exemplu un kilogram.

În cazul particular al gazelor produse ale arderii relaţia (5) poate fi asigurată ţinînd seama că acestea pot fi considerate ca un amestec (în proporţii diferite conform excesului de aer folosit) între aer şi gaze produse ale arderii corect chimice; dacă acestea din urmă au aceeaşi constantă a gazului ca şi aerul, amestecul lor în orice proporţie cu aerul va menţine valoarea constantei gazului [2].

Deoarece gazele produse ale arderii corect chimice ale unei hidrocarburi conţin mult azot (care are constanta gazului apropiată cu a aerului), vapori de apă (avînd constanta gazului mai mare decît a aerului) şi bioxid de carbon (avînd constanta gazului mai mică decît a aerului) rezultă că este posibil să se realizeze o constantă a gazului produs al arderii egală cu constanta gazului aer alegînd convenabil compoziţia combustibilului; în măsura în care combus-

tibilul astfel definit se integrează printre combustibilii reali de motoare cu aprindere prin compresiune, el va putea să fie utilizat în continuare la construirea unei diagrame entropice avînd drept bază un kilogram de substanţă.

Se notează cu $\mathfrak{M}_C$, $\mathfrak{M}_{H_2}$ şi $\mathfrak{M}_{aer}$ $\left[\frac{kg}{kmol}\right]$ masa unui kilomol respectiv de carbon, de hidrogen şi de aer. Admiţîndu-se că 1 kg de combustibil are c kg de carbon şi $h = (1-c)$ kg de hidrogen, ecuaţia arderii, corect chimice, se scrie

$$\left(\frac{c}{\mathfrak{M}_C} + \frac{1-c}{\mathfrak{M}_{H_2}}\right) \text{kmol combustibil} + \left(\frac{c}{\mathfrak{M}_C} + \frac{1}{2}\frac{1-c}{\mathfrak{M}_{H_2}}\right)\frac{1}{0{,}2099} \text{ kmol aer} =$$

$$\frac{c}{\mathfrak{M}_C}\text{kmol } CO_2 + \frac{1-c}{\mathfrak{M}_{H_2}}\text{kmol } H_2O + \left(\frac{c}{\mathfrak{M}_C} + \frac{1}{2}\frac{1-c}{\mathfrak{M}_{H_2}}\right)\frac{0{,}7803}{0{,}2099}\text{kmol } N_2 + \quad (6)$$

$$+ \left(\frac{c}{\mathfrak{M}_C} + \frac{1}{2}\frac{1-c}{\mathfrak{M}_{H_2}}\right)\frac{0{,}0098}{0{,}2099}\text{kmol Ar.}$$

Pentru a scrie această ecuaţie s-a considerat că aerul are următoarea compoziţie în părţi de volume:

0,7803 azot; 0,2099 oxigen; 0,0098 argon.

Masa kilomolului de gaze produse ale arderii corect chimice $\mathfrak{M}_p$ se calculează cu relaţia

$$\mathfrak{M}_p = \frac{1 + \left(\frac{c}{\mathfrak{M}_C} + \frac{1}{2}\frac{1-c}{\mathfrak{M}_{H_2}}\right)\frac{1}{0{,}2099}\mathfrak{M}_{aer}}{\frac{c}{\mathfrak{M}_C} + \frac{1-c}{\mathfrak{M}_{H_2}} + \left(\frac{c}{\mathfrak{M}_C} + \frac{1}{2}\frac{1-c}{\mathfrak{M}_{H_2}}\right)\frac{0{,}7803 + 0{,}0098}{0{,}2099}}, \quad (7)$$

unde s-a ţinut seama că membrul stîng al ecuaţiei (6) exprimă aceeaşi masă ca şi membrul drept.

Punîndu-se condiţia $\mathfrak{M}_p = \mathfrak{M}_{aer}$ se obţine

$$c = 1 - \frac{2\mathfrak{M}_{H_2}}{\mathfrak{M}_{aer}} \quad \text{şi} \quad h = \frac{2\mathfrak{M}_{H_2}}{\mathfrak{M}_{aer}}.$$

Se consideră $\mathfrak{M}_{aer} = 28{,}9692$ kg şi $\mathfrak{M}_{H_2} = 2{,}0156$ kg de unde rezultă compoziţia gravimetrică

$$c = 0{,}8608,$$
$$h = 0{,}1392,$$

valori care se înscriu bine printre compoziţiile motorinelor uzuale, aşa cum se observă comparînd aceste date cu cele din tabela 1. Această motorină va fi denumită în această lucrare „standard".

4. Diagrama entropică alăturată este calculată pe baza motorinei de compoziţie standard stabilită anterior. Deoarece acest combustibil realizează prin ardere cu aer gaze produse ale arderii avînd aceeaşi constantă a gazului ca şi aerul, diagrama a fost construită pentru un kilogram de substanţă. Funcţiile termodinamice utilizate: entropie $s\left[\frac{kJ}{kg \cdot °K}\right]$, energie internă $u\left[\frac{kJ}{kg}\right]$ şi

entalpie $i\left[\frac{kJ}{kg}\right]$ au fost calculate după cele mai noi date din literatură considerîndu-le originea la 0°K [3]. S-au folosit unităţile de măsură ale sistemului MKS. Diagrama are următoarele particularităţi :

Drept scară a entropiilor s-a luat 10^{-2} unităţi de entropie = 0,189 cm, ceea ce conduce la valoarea termenului R ln 10 = 12,5 cm, adică scara logaritmică după care se distribuie pe orizontală izobarele, respectiv izocorele este tocmai scara pătratelor riglei normale de calcul ; aceasta uşurează stabilirea

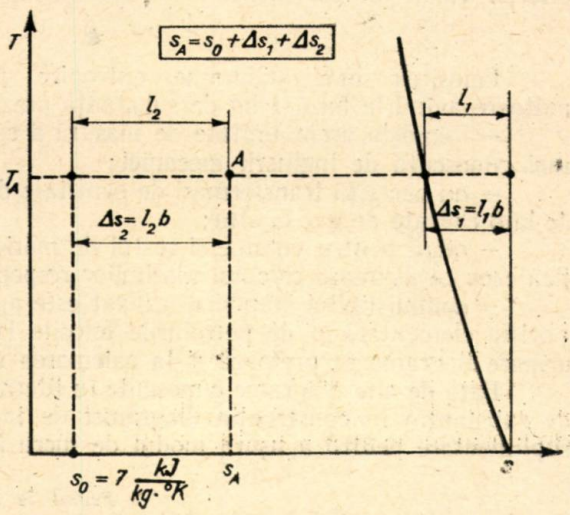


Fig. 2. — Calculul entropiei absolute într-un punct A în diagrama entropică pentru un kilogram de substanţă.

presiunilor sau volumelor intermediare deoarece pe diagramă nu s-au trasat decît curbele izobare $p = 0,1$; 1 ; 10 şi 100 bar şi curbele izocore $v = 0,01$; 0,1 şi 1 m³.

Pentru a se putea marca mai uşor punctele şi trasa diversele evoluţii s-a folosit ca fond al diagramei un caroiaj milimetric. Sistemul de axe curbe se află plasat în cîmpul din dreapta al diagramei pentru a fi mai aproape de regiunea în care în mod uzual se vor duce izentropicele curbe care reprezintă destinderea în motor a gazelor produse ale arderii combustibilului standard cu aer, la diferite valori ale coeficientului excesului de aer. Pentru a uşura construcţia izentropicelor, axele curbe nu au aceeaşi origine ; prin originea fiecărei axe curbe s-a dus verticala respectivă. Entropia absolută pentru una din substanţele ce compun diagrama se poate calcula luînd valoarea entropiei marcată pe axă s_0 la care se adaugă variaţia de entropie de la axa verticală la axa curbă respectivă (şi la temperatura respectivă) $\Delta s_1 = l_1 b$ (fig. 2) şi variaţia de entropie măsurată pe axa absciselor între s_0 şi verticala punctului respectiv $\Delta s_2 = l_2 b$ unde l_1 şi l_2 sînt segmenţi măsuraţi pe diagramă în cm şi b scara diagramei $b = 5,29 \cdot 10^{-2} \frac{kJ.cm}{kg.°K}$.

În stînga axei temperaturilor diagramei se află abaca pentru calculul entalpiei $i\left[\frac{kJ}{kg}\right]$ şi în dreapta abaca pentru calculul energiei interne $u\left[\frac{kJ}{kg}\right]$ în funcţie de inversul coeficientului excesului de aer α şi de temperatură T. Deoarece la aceste abace s-a folosit aceeaşi scară a temperaturilor ca şi pentru diagrama entropică, se pot stabili imediat, pentru orice punct reprezentat în diagramă, mărimile termodinamice căutate.

Diagrama cuprinde un grafic anex, care dă cantitatea de combustibil m_c [kg] ce a ars într-un kilogram de aer pentru a da gaze produse ale arderii la diferite valori ale coeficientului excesului de aer α.

★

Folosirea unei diagrame entropice pentru calculul ciclurilor de motoare avînd la bază 1 kg de substanţă prezintă următoarele avantaje:

– foloseşte drept unitate de măsură a cantităţii de substanţă o mărime mai cunoscută de inginerii mecanici;

– nu necesită transformări de cantitate de substanţă atunci cînd se trece de la o calitate de gaz la alta;

– oferă pentru volume şi restul de mărimi extensive valoarea lor specifică ceea ce uşurează calculul mărimilor respective ale motorului real;

– combustibilul standard utilizat este apropiat în ceea ce priveşte compoziţia elementară şi de petrolurile folosite la turbomotoare cu gaze şi prin urmare diagrama se pretează şi la calcularea unor asemenea cicluri.

Faţă de alte diagrame cunoscute în literatură (şi calculate pentru un mol de substanţă) în construcţia diagramei de faţă s-au luat o serie de măsuri suplimentare pentru a uşura modul de lucru în cîmpul diagramei.

Primit la redacţie la 15 februarie 1964

BIBLIOGRAFIE

1. G. BĂRĂNESCU, *Calculul proceselor de ardere.* Edit. Acad. R.P.R., Bucureşti, 1955.
2. JAMES HODGE, *Gas Turbine. Vol. 1. Cycles and performance estimation.* Butterworths scientific Publications, London, 1955.
3. V. PIMSNER, C. A. VASILESCU, GH. RĂDULESCU, *Energetica turbomotoarelor cu ardere internă.* Edit. Acad. R.P.R., Bucureşti, 1964.

CONTRIBUŢII LA STUDIUL TRANSFERULUI DE CĂLDURĂ FLUID-PARTICULE ÎN SISTEME GAZO-DISPERSE (CU APLICAŢII LA INDUSTRIA CIMENTULUI)

DE

I. TEOREANU

536.3.

I. INTRODUCERE

Intensificarea schimbului caloric în cuptoarele de clincher reprezintă un imperativ dictat nu numai de nevoia îmbunătăţirii randamentului termic şi creşterii productivităţii cuptoarelor, ci şi de necesitatea obţinerii unui clincher calitativ superior.

Cuptoarele rotative asigură condiţii, în special, pentru transmiterea căldurii prin radiaţie, în timp ce schimbul de căldură prin conducţie şi convecţie este puţin intens. Cum la temperaturi mici, gazele de ardere au o capacitate radiantă scăzută, s-a pus în mod expres problema folosirii unor metode, care să asigure, în perioada de pregătire a făinii brute — o intensificare a transferului de căldură, prin convecţie şi conducţie între gaze şi particulele solide. Asigurarea unui contact mai bun între particulele de făină brută şi gazele calde, conduce în mod nemijlocit la realizarea acestui deziderat; în plus se obţine o încălzire uniformă a materialului solid. Un astfel de contact are loc de pildă în strat fluidizat sau în schimbătoare de căldură cu materialul în suspensie în curent de gaz.

Cuptoarele cu schimbătoare de căldură în suspensie cunosc deja aplicabilitate practică şi se extind din ce în ce mai mult. Folosirea reactorilor în strat fluidizat este în stadiu de încercare.

În lucrarea de faţă se examinează unele probleme privind mecanismul transferului caloric gaz-particule în cicloane şi în strat fluidizat.

St. cercet. energ. elect. Tom. 14 Nr. 2 p. 391—399 Bucureşti 1964

II. TRANSFERUL DE CĂLDURĂ GAZ-PARTICULE ÎN CICLOANE SCHIMBĂTOARE DE CĂLDURĂ

În cazul schimbătoarelor de căldură a cuptoarelor tip Humboldt, Polysius, Wedag etc., transferul de căldură are loc de la gaz la particulele solide din amestecul gaz-solid, care circulă prin ciclon cu o viteză determinată.

Pentru acest ansamblu – considerînd, pentru simplificare, particulele sferice – ecuația de transfer de căldură se scrie sub forma

$$v_r \frac{\partial t}{\partial r} + v_\theta \frac{\partial t}{\partial \theta} = \frac{a}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial t}{\partial r}\right), \tag{1}$$

în care v_r, v_θ reprezintă componentele, radială și tangențială, ale vitezei gazului în raport cu particula solidă;

t – temperatura mediului gazos;

a – difuzivitatea termică a mediului gazos;

θ – unghiul pe care-l face raza vectoare cu axa dirijată în sensul mișcării particulei;

r – distanța de la centrul particulei.

Fără a introduce o eroare prea mare, componenta tangențială a vitezei particulelor poate fi considerată aproximativ egală cu viteza mediului gazos. De asemenea, avînd în vedere finețea făinei brute, este foarte probabil ca deplasarea radială a particulelor solide să influențeze puțin hidrodinamica procesului de schimb caloric. Ca urmare, componenta convectivă a transferului caloric poate fi neglijată.

Pentru rezolvarea problemei vom considera particulele solide uniform distribuite în faza continuă, fracția de volum ocupată de ele fiind egală cu φ. Această presupunere nu introduce o abatere prea mare de la realitate și în orice caz – dat fiind stabilitatea mai mare a sistemului – este mai fundamentată decît în cazul stratului fluidizat, unde este adesea luată în considerație. Ne vom imagina deci ansamblul gaz-particule ca fiind format din cuburi elementare în centrul cărora se află particulele solide de rază R. Pentru simplificare se asimilează cubul elementar cu o sferă de rază $\mathfrak{R}$ și ca urmare

$$\mathfrak{R} = \frac{R}{\varphi^{1/3}}. \tag{2}$$

Ținînd seama de cele subliniate anterior, rezultă că transferul de căldură gaz-particule va avea loc prin conductivitate termică prin stratul de gaz de grosime $(\mathfrak{R} - R)$. Neglijînd deci partea stîngă a ecuației (1), un calcul relativ simplu va conduce la[1])

$$\mathrm{Nu} = \frac{2}{1 - \varphi^{1/3}}. \tag{3}$$

În prezent, nu dispunem de date experimentale cu care să se compare rezultatele obținute pe baza expresiei (3). În tabela 1 se prezintă doar valorile

[1]) Aceeași ecuație a fost stabilită de Rukenstein, în lucrarea [1], pentru transferul de masă în cazul unui ansamblu de picături sferice uniform distribuite în faza continuă, în care se găsesc substanțe capilar-active, pentru valori ale numărului Péclet suficient de mici. Menționăm totodată că expresia (3) poate fi folosită și în cazul transportului pneumatic.

coeficientului de transfer calculate cu ajutorul ecuației (3), pentru sistemul făină brută-gaze de ardere (la temperatura de 750°C) ; ele evidențiază intensitatea transferului de căldură gaz-particule (fără luarea în considerație a radiației), în cicloane schimbătoare de căldură. Datele privitoare la productivitatea cuptoarelor la care ne referim reprezintă o confirmare indirectă a acestei concluzii.

Tabela 1

Nr. crt.	Diametrul particulelor d (m)	Coeficientul de conductivitate termică λ(kcal/m oră °C)	Concentrația fazei solide φ	Nr. lui Nusselt Nu	Coeficientul de schimb caloric α(kcal/m² oră °C)	OBS.
1	$7{,}10^{-5}$	$7{,}10^{-2}$	0,004 0,003 0,002 0,001	2,375 2,33 2,29 2,225	2375 2330 2290 2225	Calculul a fost efectuat pentru temperatura gazelor $t_g = 750°C$

Intensitatea schimbului caloric — așa cum rezultă din expresia (3) — este cu atît mai mare, cu cît temperatura gazelor și finețea particulelor solide vor fi mai mari. De asemenea, coeficientul de transfer de căldură gaz-particule crește cu concentrația particulelor solide (fig. 1 și 2). Se știe că, pentru transferul

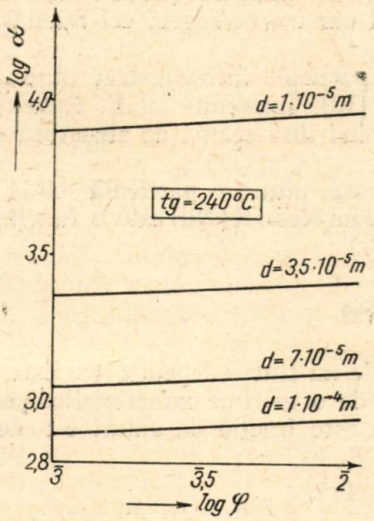


Fig. 1. — Variația coeficientului de transfer de căldură fluid — particule solide, în suspensie de gaz, în funcție de concentrația solidului, la diverse dimensiuni ale particulelor.

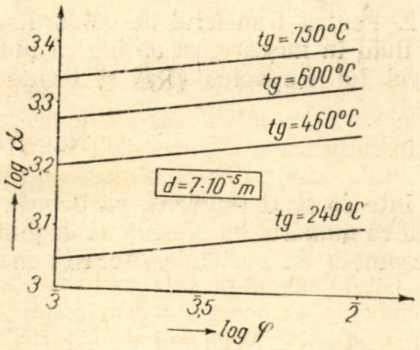


Fig. 2. — Variația coeficientului de transfer de căldură fluid — particule solide, în suspensie de gaz, în funcție de concentrația solidului, la diverse temperaturi ale gazului.

de căldură de la fluid la o particulă staționară în raport cu mediul

$$Nu = 2. \tag{4}$$

Expresia (4) rezultă și din ecuația (3) ; într-adevăr pentru $\varphi = 0$

$$Nu = 2.$$

Comparînd datele obținute pe baza ecuației (3), cu cele rezultate din ecuația (4), pentru particule de același diametru, se constată, în primul caz, o creștere a coeficientului de transfer de căldură — în limitele examinate pentru mărimea φ — care oscilează între 10 — 20%.

III. TRANSMITEREA CĂLDURII GAZ-PARTICULE ÎN REACTOARE CU STRAT FLUIDIZAT

1. Fluidizarea cu gaze este neomogenă. Cea mai mare parte din gaz străbate stratul sub formă de bule relativ mari în raport cu particulele solide ; cealaltă parte formează cu particulele o fază dispersă (agregate de particule), în care contactul solid-gaz este foarte bun în comparație cu cel dintre bule și particule. Atît timp cît bulele sînt stabile, cea mai mare parte din căldură se transmite în agregatele de particule. Cînd bulele sînt instabile are loc o amestecare mai intensă gaz-particule individuale, contactul gaz-particule se îmbunătățește ; lucrurile se petrec ca și cînd o cantitate tot mai mică de gaz trece prin strat sub formă de bule ; stratul tinde, din punct de vedere al transmiterii de căldură gaz-particule, către o comportare asemănătoare fluidizării cu lichide, cînd structura stratului este mai ordonată, gradul de neomogenitate fiind foarte mic [2]) (stratul fluidizat l-am numit în acest caz cvasiomogen, cel fluidizat cu lichide fiind considerat omogen).

Problema schimbului de căldură gaz-particule într-un strat fluidizat a fost abordată într-o serie de lucrări [3] — [10]. Împreună cu E. Rukenstein [11] — [14] am tratat această problemă ținînd însă seama de structura stratului.

2. Pentru transferul de căldură sau masă, dintre o particulă solidă fixă și un fluid în mișcare, se obține că numărul lui Nusselt (Nu) este o funcție de numărul lui Reynolds (Re) și Prandtl (Pr)

$$\mathrm{Nu}=f(\mathrm{Re},\ \mathrm{Pr}). \tag{5}$$

Într-un strat fluidizat, particulele solide nu sînt independente. Este deci normal ca numărul lui Nusselt să depindă și de o mărime caracteristică pentru un ansamblu de particule. Această mărime este fracția de goluri ε ; deci

$$\mathrm{Nu}=f_1(\varepsilon,\ \mathrm{Re},\ \mathrm{Pr}). \tag{6}$$

Dar, pentru un strat fluidizat omogen (în sensul definit în prezenta lucrare), s-a arătat [15] că

$$\varepsilon=F(\mathrm{Re},\ \mathrm{Ar},\ k_a), \tag{7}$$

în care Ar este numărul lui Arhimede, iar k_a este un factor de anizometrie (ține seama de expandarea anizometrică a stratului).

[2]) Și în stratul fluidizat cu lichide sînt neomogenități [2] ; dar acestea — de cele mai multe ori — sînt foarte mici, în comparație cu dimensiunile particulelor.

Se pare că, pentru diametre mari ale reactoarelor, influența factorului de anizometrie este mică, ca atare se poate scrie — pentru fluidizarea omogenă că

$$\mathrm{Nu}=F_1(\mathrm{Re},\ \mathrm{Ar},\ \mathrm{Pr}). \tag{8}$$

Prelucrînd datele experimentale obținute de McCune și Wilhelm [16], cum și pe cele ale lui Evans și Gerald [17], în lucrarea [11] se obține o curbă unică cu maxim pentru $\mathrm{Re}\,\mathrm{Ar}^{-0,4}=2,15$.

Partea ascendentă a curbei, $\mathrm{Re}\,\mathrm{Ar}^{-0,4}<2,15$, este exprimată de relația

$$\mathrm{Nu}=0,426\,\mathrm{Re}^{0,30}\mathrm{Ar}^{-0,17}\,\mathrm{Pr}^{1/3}, \tag{9}$$

iar partea sa descendentă, $\mathrm{Re}\,\mathrm{Ar}^{-0,4}>2,15$, de către

$$\mathrm{Nu}=0,943\,\mathrm{Re}^{-1}\mathrm{Ar}^{0,69}\,\mathrm{Pr}^{1/3}. \tag{10}$$

Este important de subliniat că aceste relații sînt valabile și pentru domeniul cvasiomogen (așa cum a fost el definit anterior).

3. În cazul fluidizării neomogene și a domeniului de tranziție către fluidizarea cvasiomogenă, nu este posibil de definit un coeficient de transfer de căldură — în sensul strict al noțiunii — pentru întregul strat fluidizat. În acest caz, la procesul de schimb caloric gaz-particule, nu participă decît o parte din gaz — cea care trece prin agregatele de particule. Ca urmare, se poate defini un coeficient de transfer prin

$$q=\mathrm{d}A\,\Delta t'_m. \tag{11}$$

Dacă[3])

$$\frac{\Delta t_i}{\Delta t'_f}\leqslant 2,$$

rezultă că

$$\Delta t'_m\approx 0,5\ (\Delta t_i+\Delta t'_f)=\frac{t_i+t'}{2}-\frac{T_i+T_f}{2}$$

și deci

$$q=\alpha A\left(\frac{t_i+t'}{2}-\frac{T_i+T_f}{2}\right), \tag{11'}$$

în care t' este temperatura cu care iese gazul din agregatele de particule;
t_i — temperatura cu care intră gazele în strat;
T_i — temperatura particulelor solide la intrarea în strat;
T_f — temperatura particulelor solide la ieșirea din strat;
α — coeficient de transfer caloric;
q — căldura transmisă;
A — suprafața particulelor solide din strat.

În relația (11') coeficientul α — ținînd seama de structura ordonată a agregatelor de particule — se poate calcula cu expresiile stabilite pentru fluidizarea omogenă. Calculul căldurii transmise cu ecuația (11') este însă inoperant,

[3]) Această condiție, în cazul examinat, nu conduce la erori prea mari.

deoarece mărimea t' nu poate fi determinată. De aceea, în calculele obișnuite, este convenabil să se folosească relația

$$q = \alpha' A\left(\frac{t_i + t}{2} - \frac{T_i + T_f}{2}\right), \tag{12}$$

în care t este temperatura de ieșire a gazelor din strat;

α' – coeficient pe care îl vom numi *coeficient fictiv de transfer caloric.*

Se pune problema stabilirii unei relații pentru α'. Se știe că o parte din căldura cedată de gaze este preluată de particule, iar o altă parte se pierde în mediul ambiant.

Pentru un reactor continuu, bine izolat termic, căldura pierdută în mediul ambiant este mică în raport cu întreaga cantitate de căldură cedată de gaze, iar fracțiunea pe care o reprezintă este practic constantă în timp. Rezultă deci că

$$K_c Gc\,(t_i - t) = A\alpha\left(\frac{t_i + t'}{2} - \frac{T_i + T_f}{2}\right) = A\alpha'\left(\frac{t_i + t}{2} - \frac{T_i + T_f}{2}\right), \tag{13}$$

în care k_c este fracțiunea din căldura cedată de gaze preluată de particulele solide;

G – debitul de gaze;

c – căldura specifică a gazului.

În lucrări anterioare [13], [18] s-a subliniat existența a două comportări limită a straturilor fluidizate, care, din punctul de vedere care ne interesează, se traduc prin:

– fracțiunea de gaz care trece prin agregatele de particule ξ rămîne constantă pe toată înălțimea stratului fluidizat;

– fracțiunea de gaz ξ crește pe înălțimea stratului.

Indiferent de natura stratului fluidizat, între temperaturile gazului și fracțiunea de gaz care trece prin agregatele de particule se stabilește relația generală

$$t = \xi_i t' + (1 - \xi_i) t_i, \tag{14}$$

ξ_i reprezentînd valoarea mărimii ξ la baza stratului fluidizat (care pentru unele straturi rămîne constantă pe toată înălțimea stratului).

Din expresiile (13) și (14) se obține, prin cîteva transformări, ecuația:

$$\alpha' = \alpha \frac{\dfrac{K_c Gc}{\alpha A}}{\dfrac{K_c Gc}{\alpha A} + \dfrac{1 - \xi_i}{2\xi_i}}. \tag{15}$$

În cazul fluidizării omogene întreaga cantitate de gaz ia parte la procesul de transfer de căldură gaz-particule; ca urmare $\xi_i = 1$ și deci $\alpha' = \alpha$.

De obicei $\frac{K_c Gc}{\alpha A} \ll \frac{1-\xi_i}{2\xi_i}$ și ca urmare expresia (15) devine

$$\alpha' \approx \frac{K_c Gc}{A} \cdot \frac{2\xi_i}{1-\xi_i}. \tag{16}$$

Menționăm că în lucrarea [13] sînt prezentate relații de calcul relativ ușor de mînuit, pentru mărimea ξ.

În scopul utilizării lor curente în calculele de proiectare, relațiile (15) și (16) se pot transcrie sub formă criterială. Cum pentru cazurile examinate K_c este apropiată de unitate, considerînd $K_c = 1$, se obține[4])

$$St' \approx \frac{1}{\frac{1}{St} + \frac{1}{P_N}}; \tag{17}$$

cum în mod obișnuit $St \gg P_N$ rezultă că

$$St' \approx P_N, \tag{18}$$

unde $St' \equiv \frac{\alpha'}{wc\gamma_f}$ este numărul lui Stanton definit cu α';

$St \equiv \frac{\alpha}{wc\gamma_f}$ numărul lui Stanton definit cu α;

$P_N \equiv \mathfrak{F} \frac{2\xi_i}{1-\xi_i}$ număr fără dimensiuni;

$\mathfrak{F} \equiv \frac{S}{A}$ raport geometric;

S aria secțiunii transversale a coloanei.

NOTĂ

O evaluare a coeficienților de transfer de căldură, în strat fluidizat și în cicloane schimbătoare de căldură, dă posibilitatea să se compare intensitatea acestui proces în cele două tipuri de instalații. Fie de pildă făină brută pentru clinker de ciment portland, avînd diferite valori ale fineței de măcinare; caracteristicile gazelor de ardere se consideră la 750°C. Calculul coeficientului de transfer de căldură în strat fluidizat se efectuează pentru condițiile optime: fluidizare cvasiomogenă și viteză a gazelor care să determine o valoare maximă pentru α, adică să se respecte egalitatea $Re\, Ar^{-0,4} = 2,15$; se folosește ca urmare,

[4]) Aproximația introdusă conduce la o anumită subevaluare a coeficientului fictiv de transfer de căldură, care depinde de mărimea pierderilor de căldură în mediul ambiant. Cunoașterea acestora din urmă permite calculul exact al mărimii α'.

în acest scop, expresia (9) pentru $ReAr^{-0,4} = 2,15$[5]). Reprezentînd grafic $\alpha = f(d)$ se obţine curba (1) din figura 3 (d fiind diametrul mediu al particulelor solide). În condiţii similare, pentru cicloane schimbătoare de căldură –

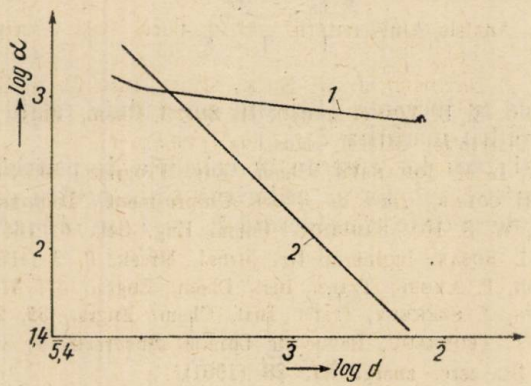


Fig. 3. — Variaţia coeficientului de transfer de căldură fluid-particule solide, în suspensie de gaz şi strat fluidizat, în funcţie de dimensiunile particulelor.

considerînd o valoare minimă pentru mărimea φ – pe baza ecuaţiei (3), se obţine curba (2) din figura 3.

Trebuie să subliniem că expresia (3) este valabilă doar pentru amestecuri gaz-solid, în care particulele au dimensiuni relativ mici; de altfel, în cazul cicloanelor schimbătoare de căldură, diametrul mediu al particulelor de amestec brut alimentat este, în mod uzual, sub 1.10^{-4}mm. Dimpotrivă alimentarea fluidizoarelor se face din motive tehnologice, asupra cărora nu insistăm, cu granule în jur de 5 mm. Rezultă de aci – comparînd curbele (1) şi (2) din figura 3 – că, în domeniul de valori ale dimensiunilor particulelor în care se lucrează, procesul de schimb caloric gaz-particule solide, în cicloane, este mai intens, deşi comparaţia s-a efectuat cu valori calculate – în cazul stratului fluidizat – pentru α_{max}).

IV. CONCLUZII

În lucrarea de faţă, abordîndu-se unele probleme privind mecanismul transferului de căldură gaz-particule, se aduc contribuţii la studiul transmiterii căldurii în unele din cuptoarele moderne de clincher. Pe baza expresiilor rezultate, se arată calea raţională de calcul a căldurii transmise prin convecţie şi conducţie în instalaţiile examinate.

Primit la redacţie la 3 martie 1964.

[5]) În mod practic fluidizarea cu gaze este neomogenă şi coeficientul de transfer caloric este mai mic decît cel rezultat din calculul menţionat.

BIBLIOGRAFIE

1. E. Rukenstein, Analele Universităţii „Al. I. Cuza" Iaşi – seria Chimie, **VI**, *4*, 909 (1960).
2. D. Harrison, F. J. Davidson, J. W. Kock, Trans. Inst. Chem. Engrs., *39*, 202 (1961).
3. K. N. Kettenring, E. L. Wenderfield, M. Smith, Chem. Eng. Progress, 46 (1950).
4. A. N. Sahova, Disertaţie, MIHM, Moscova (1954).
5. W. W. Wamsley, L. M. Johansen, Chem. Eng. Progress, *50*, 347 (1954).
6. I. E. Hodorov şi colab., *Dare de seamă*. Ghiproţment., Leningrad (1955 – 1959).
7. P. M. Heertjes, W. S. Mc. Kibbins, Chem. Eng. Sci., *6*, 164 (1956).
8. I. Ciborovschi, I. Rosak, Inginerno fiz. jurnal, Minsk, *2*, 3 (1959).
9. J. F. Richardson, P. Ayers, Trans. Inst. Chem. Engrs., *37*, 314 (1959).
10. J. F. Richardson, J. Szekely, Trans. Inst. Chem. Engrs., *39*, 212 (1961).
11. E. Rukenstein, I. Teoreanu, Revue de Chimie, Bucureşti, **V**, 259 (1960).
12. E. Rukenstein, St. cerc. energ. **XI**, 23 (1961).
13. I. Teoreanu, Disertaţie, Institutul politehnic, Bucureşti (1961).
14. – Revue de Chimie, Bucureşti, VII, 1329 (1962).
15. I. Teoreanu, V. Cimpu, Buletin. Inst. Polit. Buc., **23**, *1*, 83 (1961).
16. L. K. Mc. Cune, R. H. Wilhelm, Ind. Eng. Chem, *41*, 1124 (1949).
17. G. G. Evans, C. F. Gerald, Chem. Eng. Progress, *49*, 201 (1948).
18. E. Rukenstein, I. Teoreanu, Lucrarea prezentată la Congresul de fluidizare de la Praga, RSC, mai (1961).

INFLUENȚA TEMPERATURII PEREȚILOR ANTECAMEREI ASUPRA PROCESELOR DE ARDERE DIN MOTOARELE DIESEL ÎN REGIM DE TURAȚIE VARIABIL

DE

M. NĂSTASE, AL. DĂNESCU și N. BLEZU

621.43

1. Complexitatea fenomenelor fizico-chimice, care caracterizează procesele de aprindere și ardere ale combustibilului în motoarele Diesel cu antecameră, a făcut ca pînă în prezent aceste procese să fie încă insuficient cunoscute. Literatura de specialitate conține mai ales prezentări calitative în acest domeniu, studiile referitoare la analiza desfășurării arderii în antecameră și în camera principală fiind puțin numeroase.

Cercetările experimentale efectuate în condiții de bombă [1] sau pe motoare Diesel cu cameră separată de turbulență [2] au arătat că temperatura pereților camerei de ardere influențează procesele de ardere din motor. Această influență este importantă sau redusă, în funcție de condițiile (temperatură, turbulență) în care se dezvoltă procesele fizico-chimice ale arderii, un rol important avîndu-l direcția jetului de combustibil față de curentul dirijat din camera de ardere și față de pereții acesteia.

Lucrarea de față își propune să analizeze, în cazul motoarelor Diesel cu antecameră — în care jetul de combustibil este îndreptat spre centrul antecamerei — influența variației moderate a temperaturii pereților antecamerei asupra proceselor de aprindere și ardere, în condițiile modificării regimului de turație și sarcină.

2. Încercările experimentale au fost efectuate pe un motor monocilindric experimental, cu antecameră montată lateral (fig. 1), cu următoarele caracteristici : alezaj $D = 140$, cursă $S = 210$, raport de compresie $\varepsilon = 17$. Legătura între antecameră și camera principală se face prin 8 orificii, avînd secțiuni

St. cerc. energ. electr. Tom. 14 Nr. 2 p. 401—412 București 1964

diferite, proporţionale cu zonele din camera de ardere pe care le acoperă jeturile de gaze. Răcirea chiulasei s-a făcut independent de aceea a blocului de cilindru, folosind o pompă de apă exterioară motorului. În cursul experienţelor turaţia a variat între 700 — 1 400 rot/min.

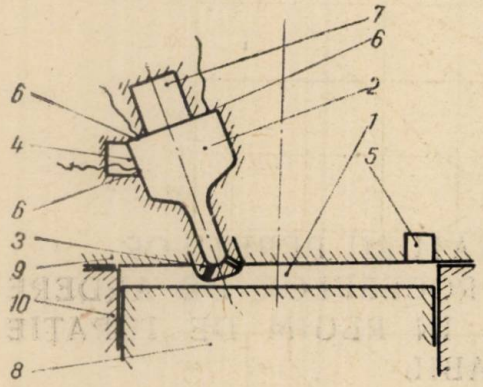


Fig. 1. — Schema montării termocuplelor pentru măsurarea temperaturilor suprafeţelor antecamerei şi a camerei de ardere şi a captatoarelor pentru măsurarea variaţiilor de presiune în antecameră şi în camera principală
1 — camera principală ; *2* — antecameră ; *3* — difuzor ; *4*, *5* — locaşele prizelor de presiune ; *6* — termocuple ; *7* — injector ; *8* — piston ; *9* — chiulasă ; *10* — cilindru.

Analiza desfăşurării procesului de ardere în condiţiile amintite mai înainte s-a făcut pe baza cercetării următorilor parametri :

— perioada de întîrziere la autoaprindere măsurată în grade de rotaţie ale arborelui cotit ($\tau°$) şi în fracţiuni de secundă (τ s) ; durata întîrzierii la autoaprindere a fost considerată între momentul ridicării acului injectorului şi momentul în care curba de presiune din antecameră se desprinde de pe curba de comprimare (moment care marchează începutul arderii în antecameră) ;

— decalajul între momentul aprinderii combustibilului în antecameră şi începutul arderii în camera principală, măsurat în grade ($\theta°$) şi în fracţiuni de secundă (θ s) ;

— viteza medie de creştere a presiunii $\frac{\Delta p}{\Delta \alpha}$ în antecameră, în cursul arderii rapide. Creşterea presiunii în cursul arderii rapide (Δp) a fost exprimată procentual în raport cu valoarea presiunii gazelor din antecameră la 12 grade de rotaţie ale arborelui cotit, înainte de P.M.I. ;

— presiunea maximă ($p_{a,\,max}$) din antecameră exprimată în procente în raport cu presiunea din antecameră la 12 grade de rotaţie ale arborelui cotit înainte de P.M.I. ;

— temperatura gazelor de ardere (t_{ga}) în conducta de evacuare, în apropierea supapelor (fig. 2) ;

— temperatura pereţilor antecamerei (t_a) măsurată în punctele indicate în figura 1. Aceste temperaturi au fost măsurate cu ajutorul unor termocuple, ale căror puncte de sudură au constituit puncte de pe faţa interioară a antecamerei respective. Deoarece cele 3 termocuple montate în antecameră au arătat valori apropiate, în limitele erorilor de măsură, s-a luat în considerare numai indicaţiile termocuplei montate în zona centrală a antecamerei.

În timpul experienţelor avansul la injecţie s-a menţinut în limitele 10—12 grade de rotaţie ale arborelui motorului.

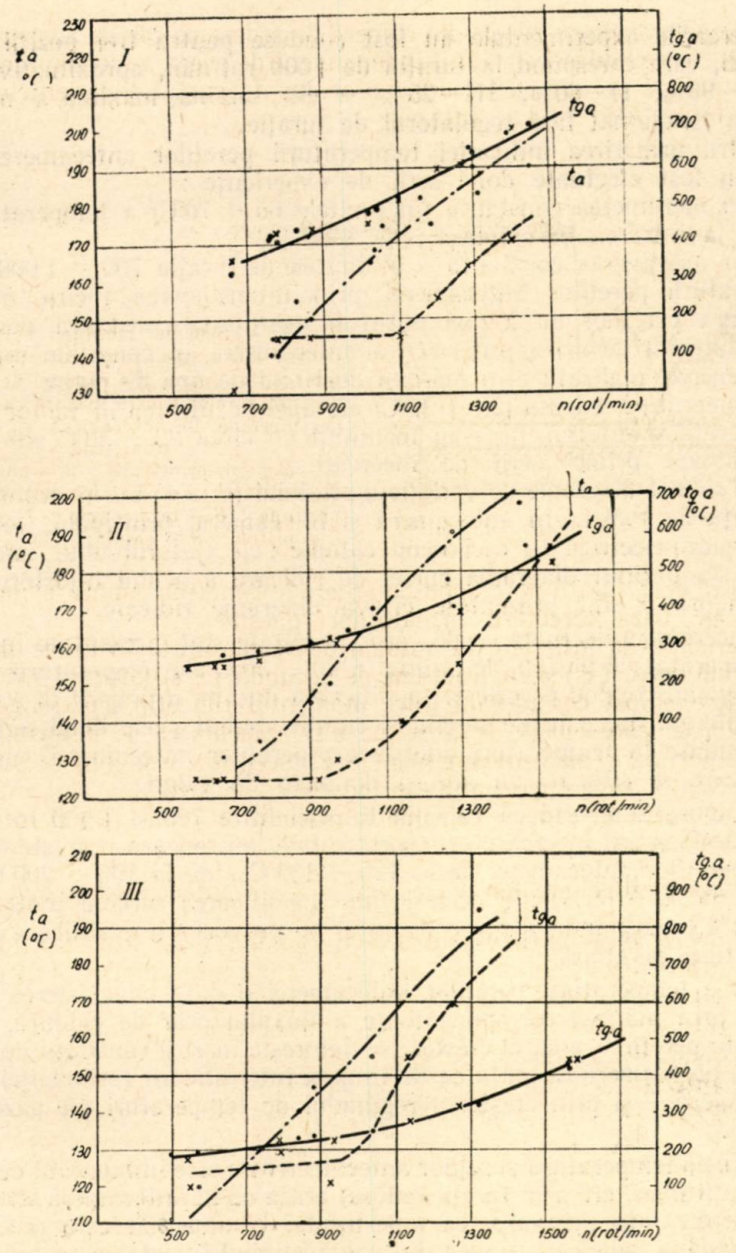


Fig. 2. — Influența vitezei de rotație a motorului n asupra temperaturii pereților antecamerei t_a și a gazelor de ardere pentru 3 poziții ale cremalierei pompei de injecție (I, II, III) ;
(· · · ·) motorul funcționează la o temperatură a apei de răcire la intrarea în motor de 65 — 70°C ;
(×××) motorul funcționează în condiții de răcire intensivă.

Încercările experimentale au fost conduse pentru trei poziţii fixe ale cremalierei, care corespund la turaţia de 1 000 rot/min, aproximativ sarcinilor – I–90%, II–60%, III–25% – din sarcina maximă a motorului. Motorul a funcţionat fără regulatorul de turaţie.

Pentru urmărirea influenţei temperaturii pereţilor antecamerei asupra arderii, au fost efectuate două serii de experienţe :

– cu menţinerea constantă (în limitele 65 – 70°C) a temperaturii apei de răcire la intrarea în chiulasă ;

– cu menţinerea constantă – în limitele de turaţie 700 – 1 000 rot/min a temperaturii pereţilor antecamerei prin intensificarea răcirii motorului. Temperatura pereţilor nu a mai putut fi menţinută constantă peste 1 000 rot/min, datorită încălzirii puternice a antecamerei, în condiţiile unei răciri foarte intensive, realizată prin mărirea debitului de apă de răcire a chiulasei şi prin temperaturi scăzute (20 – 30°C) ale apei la intrarea în motor ; temperaturile pereţilor antecamerei s-au menţinut cu circa 20 – 30°C sub valorile corespunzătoare primei serii de încercări.

S-au ridicat diagrame de variaţie a presiunii ($p - \alpha$) în intervalul $-20° \div +20°$C faţă de P.M.I., în antecameră şi în camera principală, folosind o instalaţie piezo-electrică cu osciloscop catodic ; cu ajutorul unui micrometru electronic s-a obţinut diagrama cursei de ridicare a acului injectorului.

În figura 3 sînt prezentate cîteva diagrame ridicate.

3. Încercările efectuate – ale căror rezultate sînt prezentate în figurile 4 şi 5 – au arătat că variaţii de ordinul a 20 – 30°C ale temperaturii pereţilor antecamerei, nu conduc practic la modificarea duratei întîrzierii la autoaprindere, pe întregul domeniu de sarcini şi turaţii studiat ; cele două serii de încercări, conduse la temperaturi diferite ale pereţilor antecamerei, au dus la rezultate care se situează în acelaşi domeniu de valori.

Din figura 2 rezultă că variaţia turaţiei între 700 şi 1 400 rot/min, în condiţiile desfăşurării încercărilor experimentale, antrenează o creştere a temperaturii pereţilor antecamerei de la 125 – 130°C pînă la 195 – 200°C (adică o creştere de 50 – 60%) ; în acelaşi timp modificarea sarcinii motorului de la 25 la 90% (menţinînd turaţia constantă) nu provoacă o modificare sensibilă a temperaturii pereţilor.

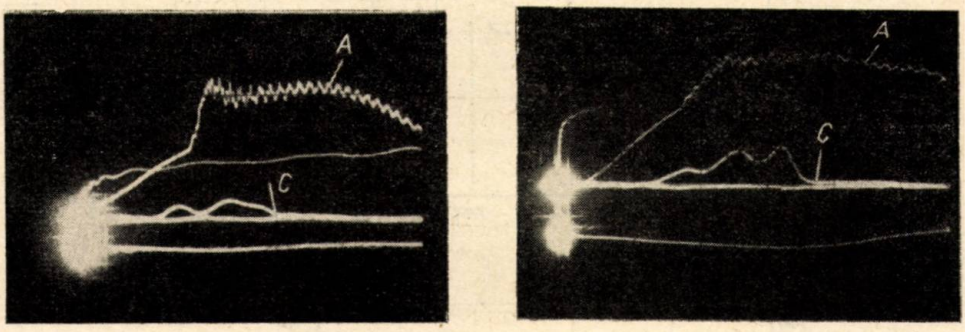
Mărirea temperaturii pereţilor antecamerei o dată cu creşterea turaţiei se explică prin mărirea corespunzătoare a fluxului orar de căldură, care se propagă prin pereţi, – a cărui creştere se datoreşte măririi cantităţii de căldură degajate în antecameră în unitatea de timp şi intensificării turbulenţei gazelor din antecameră – şi prin creşterea regimului de temperaturi ale gazelor din antecameră.

Faptul că temperatura pereţilor antecamerei nu este influenţată de sarcină (atît la turaţii mari, cît şi la turaţii reduse) arată că în antecameră cantitatea de căldură degajată prin arderea amestecului combustibil este aceeaşi, ori care ar fi sarcina, adică fracţiunea din combustibilul injectat care arde în antecameră este practic independentă de sarcină.

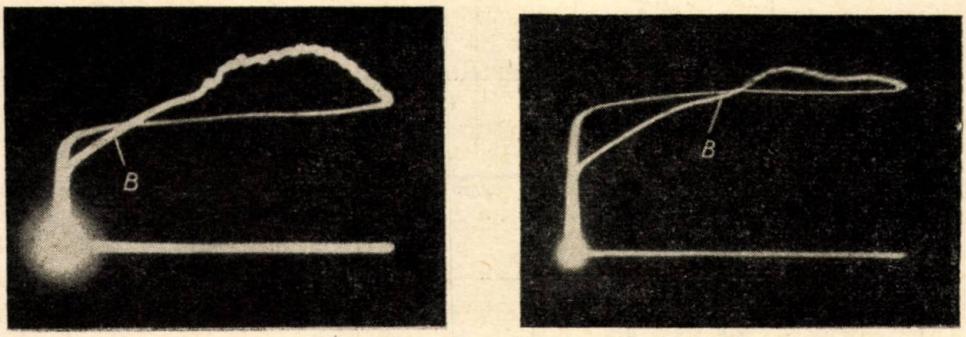
Din cele expuse rezultă că mărirea turaţiei modifică regimul de temperatură şi turbulenţă din antecameră (spre deosebire de sarcină care practic nu le modifică) şi ca urmare (fig. 5) – perioada de întîrziere la autoaprindere măsurată

în fracțiuni de secundă se micșorează o dată cu mărirea turației și rămîne constantă cu sarcina.

Observațiile făcute mai sus confirmă rezultatele prezentate în literatură [1], [2], referitoare la zonele în care se realizează autoaprinderea combustibilului injectat în antecameră.



a

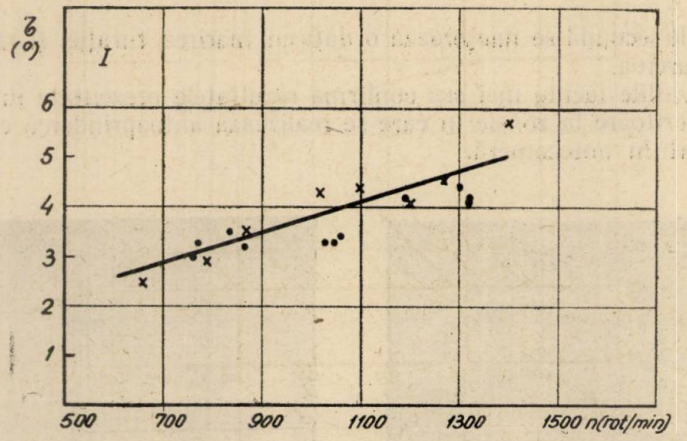


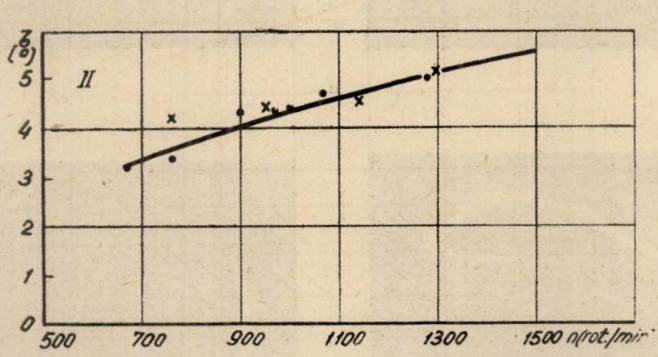
b

Fig. 3. — Oscilograme care indică variația presiunii în antecameră (*A*) și în camera principală de ardere (*B*) și variația legii de ridicarea aerului injectorului (*C*) ridicate pe un motor monocilindric experimentat, cu aprindere prin compresiune, cu antecameră : *a* — poziția cremalierei II ; *b* — poziția cremalierei I.

Existența unei mișcări turbulente a gazelor din antecameră — pledează pentru realizarea unui schimb de căldură prin convecție între pereți și gazele din antecameră, schimb de căldură care afectează în special gazele din zonele situate în vecinătatea pereților. Acest schimb de căldură este intensificat o dată cu mărirea turației, ca urmare a creșterii turbulenței gazelor.

Ținînd seama că durata întîrzierii la autoaprindere nu este influențată de reducerea moderată a temperaturii pereților, ori care ar fi regimul de turație,





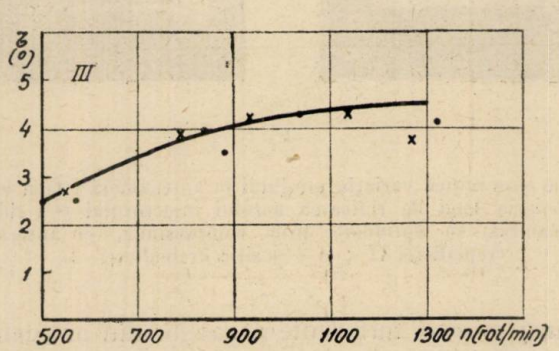


Fig. 4. — Influența vitezei de rotație a motorului asupra perioadei de întîrziere la autoaprindere τ măsurată în grade de rotație ale arborelui cotit pentru 3 poziții ale cremalierei pompei de injecție (I, II, III) ;
(· · · ·) motorul funcționează la o temperatură a apei de răcire la intrarea în motor de 65 — 70°C ;
(× × × ×) motorul funcționează în condiții de răcire intensivă.

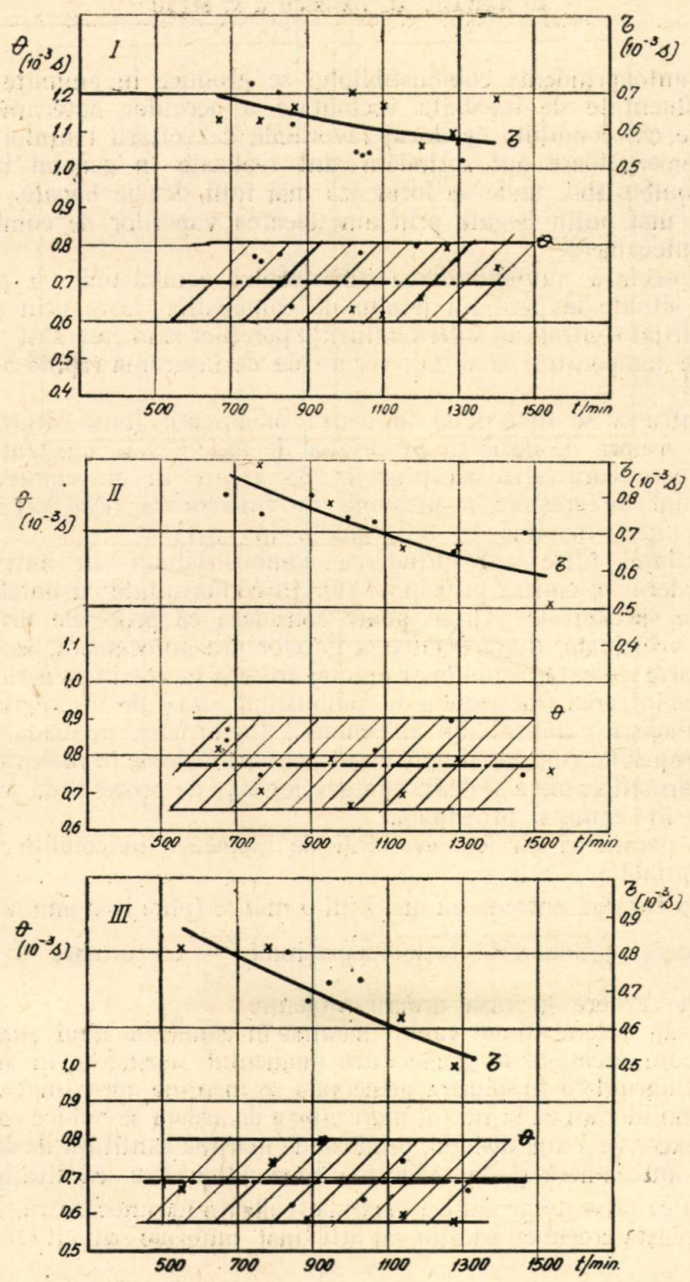


Fig. 5. — Influența vitezei de rotație a motorului n asupra perioadei de întîrziere la autoaprindere τ și asupra perioadei de întîrziere a aprinderii în camera principală față de aprinderea din antecameră θ măsurată în secunde, pentru 3 poziții ale cremalierei pompei de injecție (I, II, III) ;
(····) motorul funcționează la o temperatură a apei de răcire la intrarea în motor de 65—70°C ;
(××××) motorul funcționează în condiții de răcire intensivă.

rezultă că autoaprinderea combustibilului se produce în anumite zone care nu sînt influenţate de imediata vecinătate a pereţilor antecamerei.

Se ştie că, condiţiile de dozaj favorabile dezvoltării lanţului de reacţii chimice premergătoare autoaprinderii sînt realizate în general la periferia jetului de combustibil, unde se formează mai întîi dozaje bogate, care devin din ce în ce mai puţin bogate prin amestecarea vaporilor de combustibil cu aerul din antecameră.

În consecinţă autoaprinderea amestecului combustibil se produce în acele zone, situate la periferia jetului de combustibil, care prin poziţia lor (jetul este dirijat central) nu suferă influenţa pereţilor şi în care sînt îndeplinite condiţiile de temperaturi şi dozaj, cerute de desfăşurarea rapidă a proceselor chimice.

4. Pentru a se determina influenţa modificării temperaturii pereţilor antecamerei asupra desfăşurării procesului de ardere s-au analizat următorii parametri, care caracterizează procesul de ardere în antecameră :

– gradul de creştere a presiunii în antecameră ($\Delta p/\Delta\alpha$) ;

– presiunea maximă în antecameră ($p_{a,\,max}$) ;

– decalajul între autoaprinderea combustibilului în antecameră şi începutul arderii în camera principală (θ). În conformitate cu datele citate în literatura de specialitate [4], se poate considera că procesele fizico-chimice din camera principală, după insuflarea gazelor din antecameră, se desfăşoară cu viteză foarte ridicată, astfel încît practic arderea începe în camera principală imediat după intrarea amestecului de combustibil şi gaze de ardere, împreună cu nucleul de flacără, expulzat din antecameră. Ca urmare, perioada θ este determinată, în primul rînd, de timpul cerut pentru creşterea în măsură suficientă a presiunii din antecameră şi de inerţia gazelor faţă de procesul de scurgere din antecameră în camera principală.

Aceşti parametri au fost cercetaţi de asemenea în condiţii de turaţie şi sarcină variabilă.

Mărirea turaţiei antrenează mai întîi o mărire (pînă la o anumită turaţie) şi apoi o scădere a gradului de creştere a presiunii $\frac{\Delta p}{\Delta\alpha}$ ca urmare a modificării vitezei de ardere în faza arderii violente.

Viteza de ardere atinge valori maxime în condiţiile unui anumit dozaj favorabil ; cum decalajul în grade între momentul aprinderii în antecameră şi momentul aprinderii în camera principală se menţine aproximativ constant cu turaţia, considerăm că la turaţii mari viteza de ardere se reduce ca urmare a îmbogăţirii excesive a amestecului, produsă de mărirea cantităţii de combustibil injectate în antecameră şi de reducerea concomitentă a cantităţii de aer.

În ceea ce priveşte presiunea maximă realizată în antecameră, se observă (fig. 8) că aceasta creşte cu turaţia, cu atît mai puternic cu cît sarcina este mai mică.

Rezultatele experimentale prezentate (fig. 6, 7, 8) au arătat că oricare ar fi regimul de temperatură şi de turbulenţă din antecameră (în limitele permise prin variaţia turaţiei şi sarcinii motorului), variaţia temperaturii pereţilor antecamerei (în limitele 20 – 30°C) nu exercită nici o influenţă sesizabilă asupra procesului de ardere din antecameră.

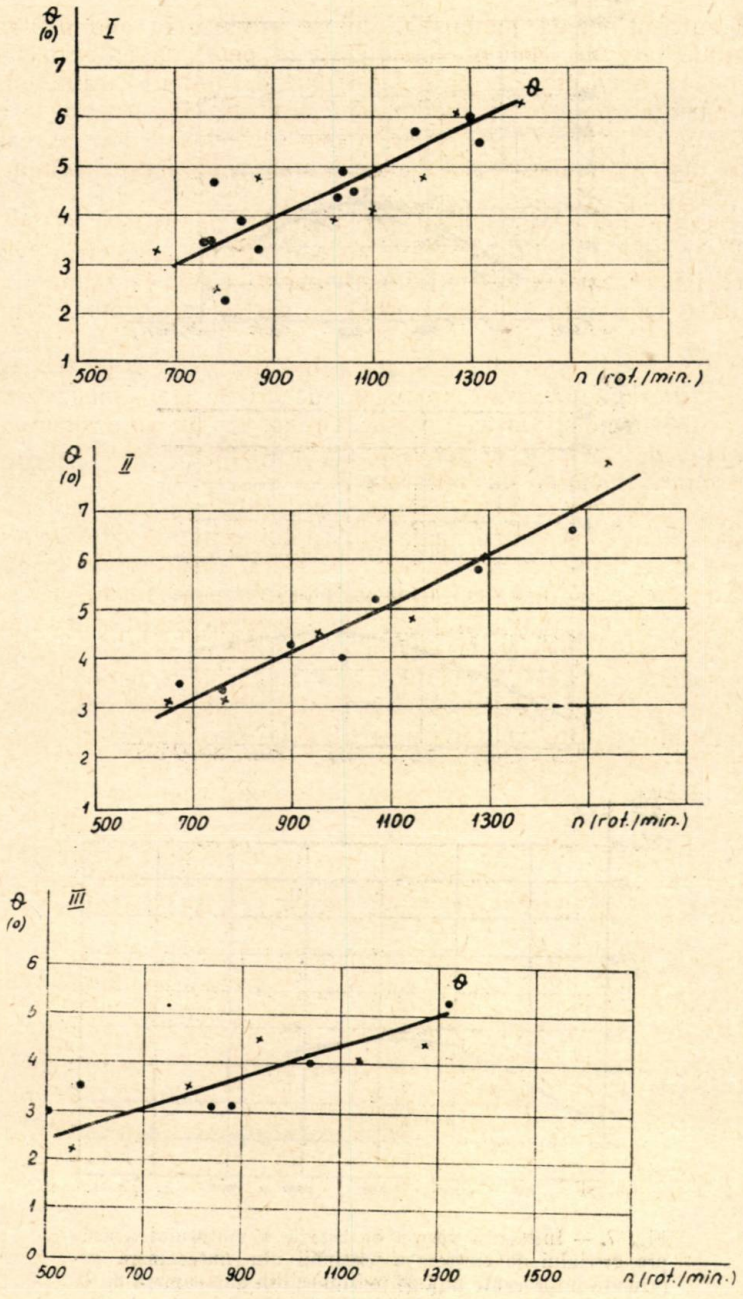


Fig. 6. — Influența vitezei de rotație a motorului n asupra perioadei de întîrziere a aprinderii în camera principală față de aprinderea în antecameră θ măsurată în grade de rotație ale arborelui cotit, pentru 3 poziții ale cremalierei pompei de injecție (I, II, III)

(· · · ·) motorul funcționează la o temperatură a apei de răcire la intrarea în motor de 65 — 70°C;

(× × × ×) motorul funcționează în condiții de răcire intensivă.

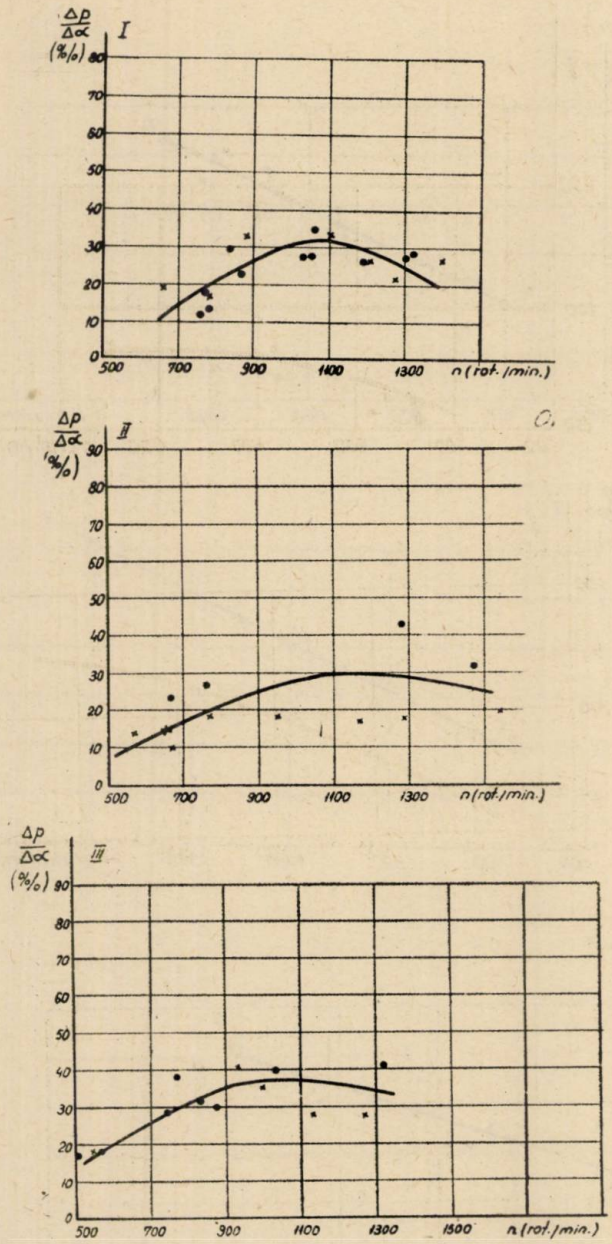


Fig. 7. — Influența vitezei de rotație a motorului n asupra gradului de creștere a presiunii din antecameră exprimată în procente față de presiunea din antecameră de la 12° avans P.M.I pe grad de rotație al arborelui motor $\Delta p/\Delta\alpha$ pentru 3 poziții ale cremalierei pompei de injecție (I, II, III).
(····) motorul funcționează la o temperatură a apei de răcire la intrarea în motor de 65 — 70°C ;
(××××) motorul funcționează în condiții de răcire intensivă.

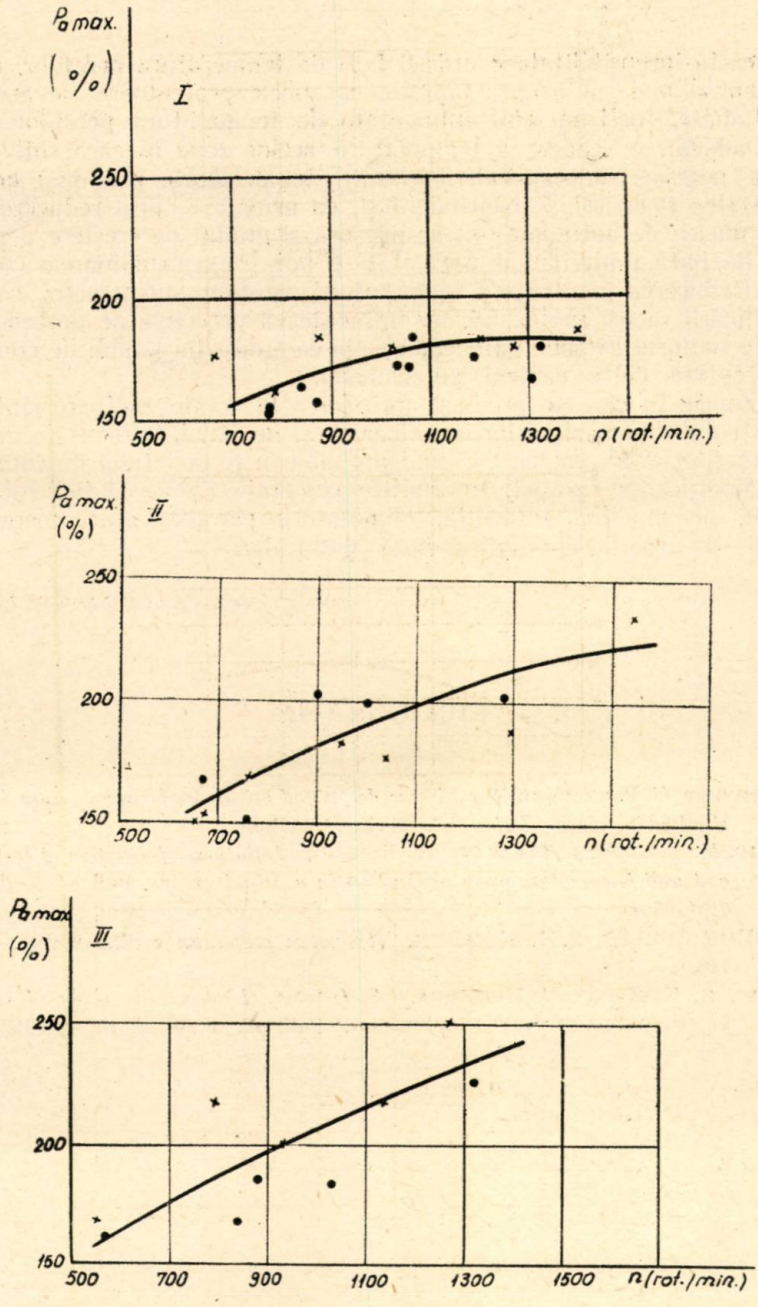


Fig. 8. — Influența vitezei de rotație a motorului n asupra presiunii maxime din antecameră $p_{a,\,max}$ exprimate în procente față de presiunea din antecameră de la 12° avans P.M.I. pentru 3 poziții ale cremalierei pompei de injecție (I, II, III)

(· · · ·) motorul funcționează la o temperatură a apei de răcire la intrarea în motor de 65 — 70°C ;

(× × × ×) motorul funcționează în condiții de răcire intensivă.

Această insensibilitate a arderii faţă de temperatura pereţilor, confirmă ipoteza emisă mai sus asupra faptului că zonele promotoare ale arderii sînt astfel studiate, încît nu sînt influenţate de temperatura pereţilor.

În adevăr, o scădere a temperaturii acelor zone în care sînt realizate condiţiile necesare autoaprinderii (dozaj, temperatură, presiune) ar reduce probabilitatea realizării autoaprinderii şi, ca urmare, — prin reducerea numărului de nuclee de aprindere — s-ar micşora şi gradul de creştere a presiunii.

5. Pe baza materialului prezentat se pot trage următoarele concluzii :

a) Reducerea moderată a temperaturii pereţilor antecamerei, ca urmare a intensificării răcirii motorului, nu influenţează procesele de aprindere şi de ardere din motorul Diesel cu antecameră, la care direcţia jetului de combustibil este îndreptată către centrul antecamerei.

b) Zonele în care se produce aprinderea la aceste motoare sînt situate astfel încît datorită poziţiei lor în antecameră, nu pot fi influenţate de temperatura pereţilor antecamerei, ele fiind probabil în jurul jetului de combustibil.

c) Modificarea turaţiei, în limitele cercetate (700 — 1 400 rot/min) şi a sarcinii, nu modifică influenţa temperaturii pereţilor antecamerei asupra aprinderii şi arderii din antecamera motorului.

Primit la redacţie la 2 februarie 1964

BIBLIOGRAFIE

1. A. Pischinger, F. Pischinger, *Der Einflus der Wand bei der Verbrennung eines Brennstoffstralles în einem Luftwirbel.* MTZ, *1*, 1959.
2. F. Nagao, M. Ikegani, I. Takagaki, H. Konishi, *Influences of direction of fuel injection and wall temperature upon combustion in a Diesel engine.* Bull. of J. S. M. E., *10* (1962).
3. Н.В. Иноземцев, В.К. Кошкин, *Процессы сгорания в двигателях.* Москва, 1949.
4. F. Nagao, H. Kakimoto, Y. Matsuoka, S. Oshida, *Photographic study of combustion in precombustion type Diesel engine.* Bull. of. J. S. M. E., *12* (1960).

METODA DE CALCUL AL ARZĂTOARELOR CU AMESTEC PREALABIL FUNCȚIONÎND CU GAZE RECIRCULATE

DE

VICTOR V. GHIA

662.6

1. GENERALITĂȚI

Arderea combustibililor gazoși „bogați", la excese de aer mici și cu aer preîncălzit, conduce la obținerea unor temperaturi de ardere excesiv de ridicate în focar, care distrug prematur focarul cuptorului, chiar atunci cînd este construit dintr-un material costisitor de calitate superioară.

Această deficiență se accentuează la arzătoarele cu amestec prealabil folosite la cuptoarele funcționînd cu recirculația gazelor, unde procesul de ardere este intensificat datorită tunelului arzătorului și unde arderea decurge la excese de aer mici.

Din acest motiv, este indicat să se micșoreze temperatura de ardere din focar, nu prin mărirea excesului de aer pentru ardere ci prin „sărăcirea" combustibilului gazos inițial, amestecîndu-l cu o anumită cantitate de gaze recirculate.

Debitul de gaze recirculate trebuie astfel calculat încît prin amestecul cu combustibilul gazos inițial, arderea în focar să dea o temperatură admisibilă materialului din care este construit acesta.

Restul debitului de gaze recirculate — care sînt necesare la obținerea în spațiul de lucru a temperaturii necesare desfășurării optime a procesului tehnologic, se amestecă cu gazele obținute din arderea combustibilului gazos „final" după ieșirea acestora din focar.

Procedeul propus nu ridică nici un fel de dificultăți tehnice de realizare. Astfel, la arzătoarele cu amestec prealabil, gazele recirculate se pot introduce

St. cerc. energ. electr. Tom 14 Nr. 2 p. 413–424 București 1964

separat, într-o zonă convenabilă a amestecătorului, sau se amestecă în prealabil cu gazul combustibil inițial.

În general se consideră neindicată introducerea în amestecător sau în tunelul arzătorului a întregii cantități de gaze recirculate, deoarece pot apărea dificultăți importante la funcționarea arzătorului.

Lucrarea analizează factorii care sînt influențați de prezența gazelor recirculate în arzătoarele cu amestec prealabil și propune metoda de calcul care trebuie adoptată pentru ca să se ardă în condiții optime combustibilul, iar durata de funcționare a focarului să fie ridicată.

2. CALCULUL DEBITULUI DE GAZE RECIRCULATE CARE INTRĂ ÎN ARZĂTOR

Prin amestecul debitului de gaze recirculate D_r (Nm³/h) avînd temperatura t_r, cu debitul de combustibil gazos inițial D_c (Nm³/h) avînd temperatura t_c, rezultă un nou combustibil gazos, a cărui putere calorifică este cu atît mai mică, cu cît D_r are o valoare mai mare.

Din ecuația de bilanț termic, scrisă pentru focarul arzătorului, rezultă debitul D_r care trebuie să intre în amestecătorul arzătorului pentru a se obține temperatura de ardere necesară θ_n, astfel încît să nu se depășească temperatura admisibilă t_{ad} a materialului din care este construit focarul. Astfel

$$D_r = D_c \cdot \frac{P_{ci} + i_c + \alpha'_r \cdot L_0 \cdot i_a - [V_{t0} + (\alpha'_r - 1) L_0] \cdot i_n}{i_n - i_r}, \quad [1] \qquad (1)$$

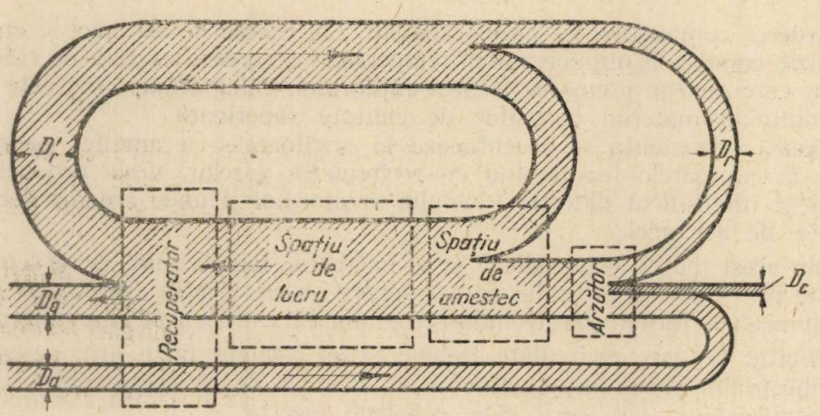


Fig. 1. — Schema circulației fluidelor gazoase pe circuitul arzător, spațiu de amestecare, spațiu de lucru și recuperator.

unde P_{ci} — este puterea calorifică inferioară a combustibilului gazos inițial, în kcal/Nm³;

V_{t0} — cantitatea teoretică de gaze de ardere în Nm³/Nm³;

[1] S-a considerat că arderea este completă.
S-au neglijat pierderile de căldură în mediul ambiant și căldura de disociație.

L_0 – cantitatea teoretică de aer pentru ardere în Nm³/Nm³ ;

i_n – entalpia gazelor rezultate din ardere, la temperatura θ_n, în kcal/Nm³ ;

i_c – entalpia combustibilului gazos la temperatura t_c, în kcal/Nm³;

i_a – entalpia aerului de combustie, în kcal/Nm³ ;

i_r – entalpia gazelor recirculate la temperatura t_r, cu care intră în amestecătorul arzătorului, în kcal/Nm³ ;

α'_r – coeficientul excesului de aer primar.

Din relația (1) rezultă că pentru un anumit combustibil inițial (P_{ci}, L_0, V_{g0} au valori bine precizate), debitul D_r, are o valoare cu atît mai mare, cu cît :

– temperatura necesară θ_n este mai mică ;

– temperatura gazelor recirculate t_r este mai mare ;

– temperaturile de preîncălzire a aerului t_a și a combustibilului au valori mai mari ;

– coeficientul de exces α'_r este mai mic.

În realitate, datorită oxigenului conținut în gazele recirculate și chiar a oxigenului din combustibilul gazos atunci cînd acesta există, arderea are loc la un coeficient de exces de aer α_r mai mare ca α'_r unde

$$\alpha_r = \alpha'_r + \Delta\alpha. \tag{2}$$

Mărimea $\Delta\alpha$ rezultă din relația

$$\Delta\alpha = \frac{D_r \cdot V^r_{O_2}}{D_c \cdot V^m_{O_2}} + \frac{V^c_{O_2}}{V^m_{O_2}} \tag{3}$$

unde $V^r_{O_2}$ este conținutul de oxigen din gazele recirculate în Nm³/Nm³ ;

$V^m_{O_2}$ – oxigenul minim necesar arderii, în Nm³/Nm³ ;

$V^c_{O_2}$ – oxigenul din combustibilul gazos în Nm³/Nm³.

Dacă nu se aspiră aer fals în cuptor și pe traseul în care sînt vehiculate gazele recirculate combustibilul nu are oxigen, iar arderea se desfășoară la un exces de aer mic, $\Delta\alpha$ are o valoare mică.

La combustibilii gazoși naturali într-o primă aproximație $\Delta\alpha$ se poate neglija. Pentru a avea o imagine asupra ordinului de mărime a debitului D_r pentru o serie de cazuri care apar în practică, s-a trasat în figura 2 familia de curbe $m = \frac{D_r}{D_c} = f(\theta_n, t_a)$ cînd se arde metan.

Pentru cazurile studiate în figura 2 rezultă că deoarece energia chimică dezvoltată prin arderea combustibilului inițial se repartizează la $(1 + m)$ Nm³, puterea calorifică a combustibilului final se va micșora de circa 3 – 9 ori față de valoarea inițială P_{ci}.

Vom calcula debitul D_r atunci cînd se impune coeficientul α_r la valoarea minimă care realizează arderea completă a combustibilului și se consideră că oxigenul necesar arderii este luat din aerul insuflat, gazele recirculate și com-

bustibilul introdus în amestecătorul arzătorului. Se va lua un caz mai general cînd din arderea combustibilului gazos rezultă gazele CO_2, SO_2 și H_2O iar $V^r_{O_2}$

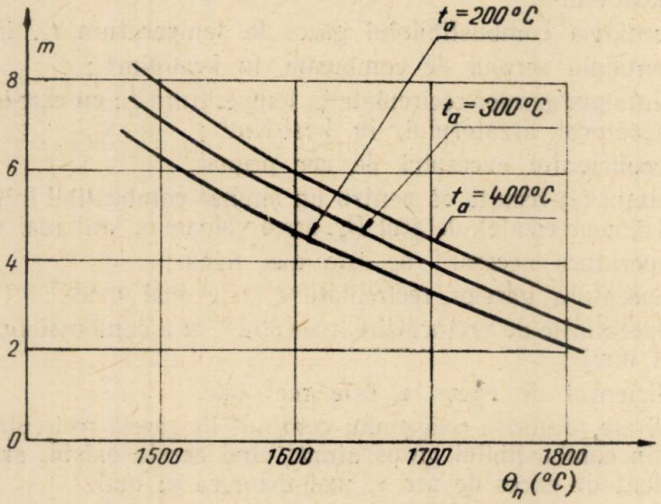


Fig. 2. — Familia de curbe $m = f(\theta_n, t_a)$ cînd se arde metan ($\alpha_r = 1{,}02$, $t_r = 300°C$, $t_c = 20°C$).

are o valoare oarecare. Se poate scrie că debitul de gaze ce rezultă prin arderea combustibilului este dat de expresia

$$D_g = D_a + D_r + D_c \cdot (G_{CO_2} + G_{SO_2} + G_{H_2O} + V^c_{N_2} + V^c_{O_2} - V^m_{O_2}), \tag{4}$$

iar debitul de aer insuflat

$$D_a = 4{,}76(\alpha_r \cdot D_c \cdot V^m_{O_2} - D_r \cdot V^r_{O_2} - D_c \cdot V^c_{O_2}). \tag{5}$$

Înlocuind în ecuația de bilanț termic a tunelului arzătorului, expresiile (4) și (5) rezultă

$$D_r = D_c \cdot \frac{P_{ci} + i_c - 4{,}76\alpha_r (i_n - i_a)(V^m_{O_2} - V^c_{O_2})}{i_n - i_r - 4{,}76 \cdot V^r_{O_2} \cdot (i_n - i_a)}$$

$$- D_c \cdot \frac{-i_n \cdot (G_{CO_2} + G_{H_2O} + G_{SO_2} + V^c_{N_2} + V^c_{O_2} - V^m_{O_2})}{i_n - i_r - 4{,}76 \cdot V^r_{O_2} \cdot (i_n - i_a)} \tag{6}$$

G_{CO_2}, G_{SO_2}, G_{H_2O} — reprezintă conținutul în CO_2, SO_2 și H_2O a gazelor rezultate din arderea combustibilului, în Nm^3/Nm^3.

Deși $t_{ad} < \theta_n$ în calculele practice, se va lua pentru acoperire $\theta_n = t_{ad}$.

3. STABILITATEA ARZĂTORULUI

3.1. **Calculul vitezei u_n pentru noul combustibil.** În calculul vitezei normale de ardere, a limitelor de inflamabilitate etc. interesează compoziția combustibilului obținut prin amestecul vechiului combustibil cu gazele recirculate.

În general, combustibilii gazoși se compun din hidrocarburi de forma $C_m H_n$ (în special CH_4, C_2H_2, C_2H_4), H_2, CO, H_2S și gaze balast CO_2, N_2 etc. Se poate scrie că debitul D_c este egal cu suma debitelor componenților combustibilului gazos

$$D_c = \sum D_{C_m H_n} + D_{H_2} + D_{CO} + \ldots + D^c_{CO_2} + D_{N_2} \tag{7}$$

Gazele recirculate conțin de obicei CO_2, N_2, O_2, SO_2, H_2O etc., astfel că în mod similar se poate scrie că

$$D_r = D^r_{CO_2} + D^r_{N_2} + \ldots + D^r_{H_2O} \tag{8}$$

Combustibilul final, rezultat din amestec, se poate considera că are compoziția procentuală a componenților, dată de formulele

$$\left.\begin{aligned} V_{CH_4} &= \frac{D_{CH_4}}{D_c + D_r} \cdot 100, \\ V_{C_2H_2} &= \frac{D_{C_2H_2}}{D_c + D_r} \cdot 100, \\ &\vdots \\ V_{CO_2} &= \frac{D^c_{CO_2} + D^r_{CO_2}}{D_c + D_r} \cdot 100, \\ V_{N_2} &= \frac{D^c_{N_2} + D^r_{N_2}}{D_c + D_r} \cdot 100. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Se subînțelege că

$$\left.\begin{aligned} D_{CH_4} &= D_C \cdot V^c_{CH_4}, \\ D_{C_2H_2} &= D_c \cdot V^c_{C_2H_2}, \\ &\vdots \\ D^r_{CO_2} &= D_r \cdot V^r_{CO_2}, \\ D^r_{N_2} &= D_r \cdot V^r_{N_2}, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

unde $V^c_{CH_4}$, $V^c_{C_2H_2}$ ... reprezintă conținutul de CH_4, C_2, H_2 ... din vechiul combustibil gazos iar $V^r_{CO_2}$, $V^r_{N_2}$ ... sînt conținuturile de CO_2, N_2 ... din gazele recirculate, mărimi care se cunosc și care se exprimă în Nm^3/Nm^3.

Pentru combustibilii gazoși naturali, care sînt cei mai utilizați în țara noastră, în compoziția acestora predominînd hidrocarburile [1] viteza normală de propagarea flăcării la o anumită temperatură T, este indicat să se obțină din relația [2] [3]

$$u_n = k \cdot k' \cdot u_{n_0}, \tag{11}$$

unde

$$u_{n_0} = \frac{V_{CH_4} \cdot u_{CH_4} + V_{C_2H_2} \cdot u_{C_2H_2} + \dots}{V_{CH_4} + V_{C_2H_2} + \dots} \tag{12}$$

$$k = \frac{100 - V_{N_2} - 1{,}2\,CO_2}{100} \text{ iar } k' = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{1{,}7^{2)}},$$

u_{CH_4}, $u_{C_2H_2} \dots$ — reprezintă valorile vitezelor normale de propagare a flăcării pentru CH_4, C_2H_2 ..., la temperatura T_0 în m/s.

Pentru combustibilii cu un conținut ridicat CO și H_2 rezultatele care se obțin folosind formula (12) sînt prea aproximative, astfel încît este indicat să se determine experimental viteza u_n pentru fiecare caz în parte.

În conformitate cu relațiile (10) și (11) se poate deduce că

$$\left.\begin{aligned} V_{CO_2} &= \frac{V^c_{CO_2} + m \cdot V^r_{CO_2}}{1+m} \cdot 100, \\ V_{N_2} &= \frac{V^c_{N_2} + m \cdot V^r_{N_2}}{1+m} \cdot 100, \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

unde $V^c_{CO_2}$ și $V^c_{N_2}$ reprezintă conținutul în CO_2 și N_2 din combustibilul inițial, în Nm^3/Nm^3.

Dacă $V^c_{CO_2} < V^r_{CO_2}$ și $V^c_{N_2} < V^r_{N_2}$ mărimile V_{CO_2} respectiv V_{N_2} cresc continuu o dată cu creșterea parametrului m, tinzînd asimptotic către $V^r_{CO_2}$ respectiv $V^r_{N_2}$. Creșterea este cu atît mai redusă cu cît m are valori mai mari.

Pentru $V^c_{CO_2} > V^r_{CO_2}$ mărimea V_{CO_2} scade cu creșterea parametrului m, tinzînd asimptotic către valoarea $V^r_{CO_2}$.

Ținînd seama de ecuațiile (13), expresia coeficientului k este

$$k = \frac{A + mB}{1+m}, \tag{14}$$

unde

$$A = 1 - 1{,}2 \cdot V^c_{CO_2} - V^c_{N_2},$$

și

$$B = 1 - 1{,}2 \cdot V^r_{CO_2} - V^r_{N_2}.$$

Derivata

$$\frac{dk}{dm} = -\frac{A-B}{(1+m)^2} < 0,$$

căci în general $A > B$.

---

2) Se consideră că în intervalul de temperaturi pe care le au gazele recirculate în general, exponentul 1,7 [4] pentru raportul $\frac{T}{T_0}$ apropie mai mult de realitate rezultatele, decît exponentul 2.

Rezultă că prin creşterea parametrului m, coeficientul k se micşorează, micşorarea fiind din ce în ce mai redusă pe măsură ce m are valori mai mari (fig. 3).

Viteza u_n se micşorează o dată cu scăderea lui k însă creşte datorită creşterii temperaturii T. Cu cît temperatura T are valori mai mari, cu atît scăderea

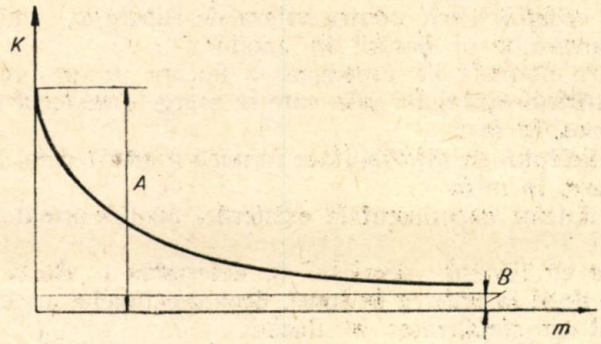


Fig. 3. — Reprezentarea funcţiei $k = f(m)$ pentru $A > B$.

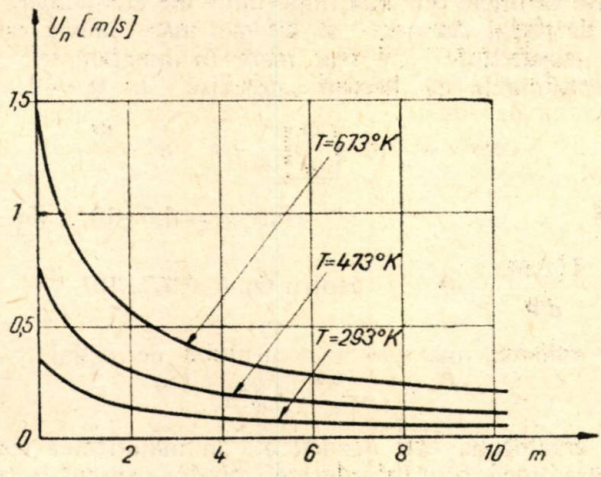


Fig. 4. — Curbele $u_n \varphi(m)$ la $T = 293$, 473, 673°K, cînd se arde metan la $\alpha_r = 1{,}02$.

vitezei u_n datorită creşterii raportului m este mai rapidă. Aceasta rezultă evident şi din figura 4 unde s-au trasat curbele $u_n = f(m)$ pentru trei valori ale temperaturii T, în cazul folosirii metanului drept combustibil iniţial. Re-

marcăm faptul că arzînd amestecul metan-gaze recirculate-aer de combustie, la $\alpha_r = 1{,}02$ și $t = 400°C$ pentru $m \leqslant 3{,}5$, viteza u_n are valori mai mari decît în cazul arderii amestecului aer rece-metan la același exces de aer ($\alpha_r = 1{,}02$).

3.2. **Domeniul de reglaj.** Rezultatele asupra ruperii și întoarcerii flăcării în amestecul arzătorului cu amestec prealabil, se prelucrează adesea sub forma $P_e = f\left(\frac{u_n \cdot \Phi}{a}\right)$ [3], [5] unde

P_e – este criteriul Peclé pentru viteza de rupere w_r sau viteza de întoarcere w_i a flăcării în arzător ;

u_n – viteza normală de propagare a flăcării, în m/s în focar ;

Φ – diametrul ajutajului prin care se scurge amestecul aer-combustibil gazos, în m ;

a – coeficientul de difuzibilitate termică a amestecului aer-combustibil gazos, în m^2/s.

Pe baza datelor experimentale existente, rezultă următoarele concluzii principale :

– arderea cu flacără „deschisă" [3]), determină o viteză de rupere w_r mult mai mică decît la arderea în tunel, deoarece tunelul arzătorului servește în primul rînd ca stabilizator al flăcării ;

– viteza de întoarcere w_i este mai mare la arderea cu flacără „deschisă", decît la arderea în tunel ;

– vitezele w_r și w_i se micșorează o dată cu scăderea vitezei normale u_n, adică o dată cu creșterea raportului dintre debitul de gaze recirculate D_r și debitul de combustibil D_c.

Una dintre cerințele cele mai importante ale arzătoarelor este asigurarea unui domeniu de reglaj $\Delta w = w_r - w_i$ cît mai mare, adică cerința de a oferi arzătorului o „elasticitate" cît mai mare în funcționare.

Pentru arzătoarele cu flacără „deschisă" la $\alpha_r = 1$, rezultă

$$\Delta w = k_1 \cdot u_n^{1,5} \left(\frac{\Phi}{a}\right)^{0,5} - k_1' \cdot u_n^2 \cdot \frac{\Phi}{a}, \qquad (15)$$

unde $k_1 = 0{,}28$ iar $k_1' = 4{,}5 \cdot 10^{-3}$, [5].

Derivata $\frac{d(\Delta w)}{d\Phi} = 0$ pentru $\Phi_m = 0{,}97 \cdot 10^3 \frac{a}{u_n}$.

Chiar la valoarea maximă a domeniului de reglaj

$$\Delta w_m = 4{,}37 u_n \qquad (16)$$

„elasticitatea" arzătorului este insuficientă în majoritatea cazurilor practice și ea se micșorează încă, prin introducerea gazelor recirculate în amestecătorul arzătorului.

Din această cauză este indicat să se folosească arzătoarele cu amestec prealabil, prevăzute cu tunel de ardere care să funcționeze efectiv, adică să

[3]) Arderea se desfășoară în spațiul de lucru al cuptorului, deci arzătorul nu este prevăzut cu tunel de ardere sau alt sistem special de stabilizarea flăcării.

nu fie răcit prin introducerea gazelor recirculate în acesta. La aceste arzătoare domeniul de reglaj este mult mai mare, ceea ce permite funcţionarea sigură la sarcini care variază sensibil. Astfel, pentru $\alpha_r = 1$, tunelul avînd diametrul

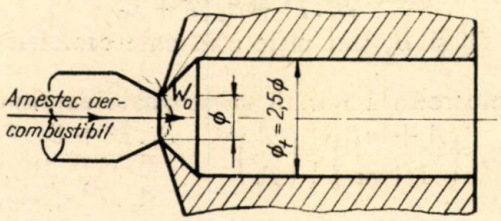


Fig. 5. — Ajutajul de scurgere al amestecului aer-combustibil gazos, în tunelul arzătorului.

$\Phi_t = 2{,}5\Phi$ (fig. 5) mărimea domeniului de reglaj poate fi calculată din relaţia

$$\Delta w = k_2 \cdot u_n^{1,5} \left(\frac{\Phi}{a}\right)^{0,5} - k_2' \cdot u_n^2 \cdot \frac{\Phi}{a}, \tag{17}$$

unde $k_2 = 0{,}91 \cdot 10^2$ iar $k_2' = 7{,}75 \cdot 10^{-3}$ [5].

Derivata

$$\frac{d(\Delta w)}{du_n} = k_2 - 1{,}33 k_2' \cdot u_n^{0,5} \cdot \left(\frac{\Phi}{a}\right)^{0,5} = 0,$$

pentru

$$u_n^m = \left(\frac{k_2}{1{,}33 k_2'}\right)^2 \cdot \frac{a}{\Phi} = 0{,}78 \cdot 10^8 \cdot \frac{a}{\Phi}.$$

Această valoare nu se poate obţine în cazurile practice, deci prin scăderea vitezei u_n se micşorează domeniul de reglaj Δw.

De asemenea, valoarea lui u_n diferită de zero pentru care $\Delta w = 0$, adică $u_n' = 1{,}38 \cdot 10^8 \cdot \frac{a}{\Phi}$ nu se poate realiza în practică.

Rezultă de aici că zona cea mai periculoasă pentru funcţionarea arzătorului este cea corespunzătoare valorilor foarte mici ale vitezei u_n, la care domeniul de reglaj este foarte redus.

Pentru combustibilii gazoşi naturali, în majoritatea cazurilor practice, atunci cînd θ_n depăşeşte circa 1 600°C, nu se atinge în timpul funcţionării valoarea limită w_r care să producă ruperea flăcării.

O atenţie deosebită se va acorda calculului vitezei de întoarcere a flăcării în arzător w_i.

Vom căuta să evidenţiem cum îşi manifestă influenţa asupra vitezei w_i, mărimea temperaturii T a amestecului aer-combustibilul gazos iniţial-gaze recirculate.

Pentru cazurile practice de variație a temperaturii T, se poate deduce că funcția $a = \psi(T)$ este de forma

$$a = \frac{A_1 . T^{\frac{7}{2}} + A_2 . T^{\frac{5}{2}}}{B_1 . T^2 + B_2 . T + B_3}, \tag{18}$$

unde A_1, A_2, B_1, B_2 și B_3 sînt niște constante caracteristice gazului la care se referă a.

Viteza de întoarcere a flăcării w_i se poate exprima atunci sub forma

$$w_i = k_2' \cdot u_{n_0} \cdot \left(\frac{A + mB}{1 + m}\right)^2 \cdot \left(\frac{T}{T_0}\right)^{3,4} \cdot \frac{B_1 . T^2 + B_2 . T + B_3}{A_1 . T^{\frac{7}{2}} + A_2 . T^{\frac{5}{2}}} \cdot \Phi. \tag{19}$$

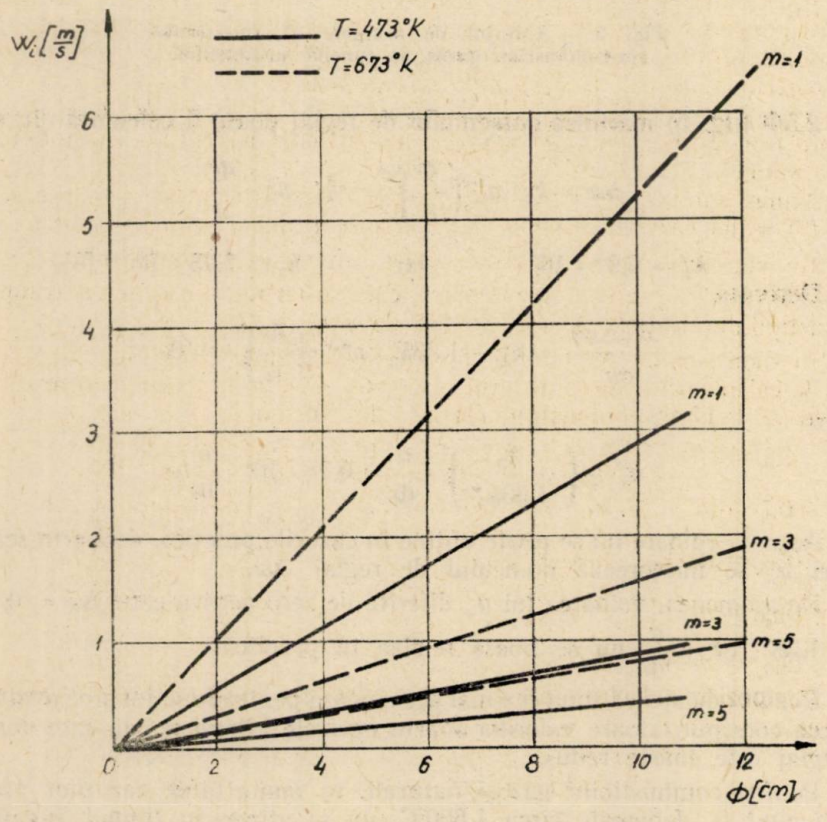


Fig. 6. — Variația vitezei w_i cu Φ, m și T pentru o serie de cazuri practice, cînd combustibilul inițial este metanul ($\alpha_r = 1{,}02$).

Rezultă că w_i se mărește o dată cu creșterea temperaturii T. Dacă T este mai mare ca temperatura amestecului dintre aer și combustibilul vechi, se compensează astfel într-o oarecare măsură scăderea vitezei w_i datorită introducerii gazelor recirculate în amestecătorul arzătorului.

Pentru a estima într-o serie de cazuri practice efectul rezultant al acestor două fenomene contradictorii, s-au trasat în figura 6, curbele $w_i = F(\Phi)$ pentru $m = 1,3,5$ și $T = 473$ și 673°K în cazul folosirii metanului ars la $\alpha_r = 1,02$. Remarcăm faptul că prin creșterea temperaturii T de la 473 la 673°K se compensează practic efectul datorită creșterii raportului m, de la 3 la 5.

4. METODA DE CALCUL

După cum s-a văzut, gazele recirculate în amestecătorul arzătorului cu amestec prealabil modifică caracteristicile de ardere, deoarece prin amestecul acestora cu combustibilul gazos inițial rezultă un nou combustibil.

Întrucît debitul fluidelor gazoase vehiculate prin arzător se schimbă, prin introducerea gazelor recirculate, va trebui să fie dimensionat corespunzător atît arzătorul propriu-zis cît și amestecătorul arzătorului.

Metodica de calcul a arzătorului propriu-zis se va conduce în etapele de mai jos.

În funcție de gradul de precizie care se cere, debitul D_r se va determina din formulele (7) sau (3).

Atunci cînd α_r are o valoare mai mare este indicat să se folosească formula (7) astfel că trebuie să se determine conținutul de oxigen din gazele recirculate $V^r_{O_2}$. Dacă nu se aspiră aer fals, într-o primă aproximație se poate considera că $V^r_{O_2}$ este egal cu valoarea care se obține din arderea completă a combustibilului inițial, la coeficientul de exces α_r.

În mod analog se determină și ceilalți componenți $V^r_{N_2}$, $V^r_{CO_2}$.

Se calculează apoi conținutul în N_2, O_2, CO_2 ...din gazele care rezultă din arderea a 1 Nm³ combustibil inițial, din formulele

$$\left.\begin{aligned} G^g_{N_2} &= 3,76\alpha_r \cdot V^m_{O_2} - m(3,76\, V^r_{O_2} - V^r_{N_2}) - 3,76 \cdot V^c_{O_2} + V^c_{N_2}, \\ G^g_{N_2} &= (\alpha_r - 1) \cdot V^m_{O_2} - m \cdot V^r_{O_2}, \\ G^g_{CO_2} &= m \cdot V^r_{CO_2} + G_{CO_2}, \\ G^g_{H_2O} &= m \cdot V^r_{H_2O} + G_{H_2O}, \\ G^g_{SO_2} &= m \cdot V^r_{SO_2} + G_{SO_2}. \end{aligned}\right\} \qquad (20)$$

Compoziția a 1 Nm³ gaze de ardere evacuate din focar exprimată în Nm³/Nm³ este

$$\left.\begin{aligned} V^g_{N_2} &= \frac{G^g_{N_2}}{V_{ga}} \\ V^g_{O_2} &= \frac{G^g_{O_2}}{V_{ga}} \\ &\vdots \\ V^g_{SO_2} &= \frac{G^g_{SO_2}}{V_{ga}} \end{aligned}\right\} \qquad (21)$$

unde $V_{ga} = G^g_{N_2} + G^g_{O_2} + G^g_{CO_2} + G^g_{H_2O} + G^g_{SO_2}$.

Vom admite că aceasta este noua compoziție a gazelor recirculate. Se va calcula o nouă valoare a raportului m, cu care se vor obține alte valori pentru mărimile $V^0_{N_2}$, $V^0_{O_2}$... care iarăși vor fi considerate noua compoziție a gazelor recirculate. Operația se va continua similar, pînă cînd diferența dintre două valori succesive ale mărimilor $V^r_{N_2}$, $V^r_{O_2}$ va fi mai mică de 2%.

Tot prin aproximații succesive, se rezolvă și în cazul cînd se aspiră aer fals în gazele recirculate și spațiul de lucru al cuptorului.

Din formula (14) rezultă coeficientul k iar viteza normală de propagare a flăcării se calculează apoi din (11).

Viteza admisibilă de scurgere w_0 a amestecului aer-combustibil final, prin ajutajul de ieșire din arzător, se va calcula în conformitate cu metodica clasică, funcție de viteza de întoarcere a flăcării.

Pentru obținerea diametrului Ø, debitul de amestec scurs prin ajutaj se va calcula din relația

$$D_{am} = D_r(1-4{,}76V^r_{O_2}) + D_c(1 + 4{,}76\alpha_r \cdot V^m_{O_2} - 4{,}76V^c_{O_2}). \qquad (22)$$

Valoarea care se obține pentru w_0 va trebui să fie mai mică ca viteza w_r.

Calculul amestecătorului se va efectua după metodicile clasice, astfel încît nu se mai dau amănunte în lucrare.

Primit la redacție la 3 februarie 1964.

BIBLIOGRAFIE

1. И.М. РАФАЛОВИЧ, *Природный газ как топливо для металлургических печей*. Металлургиздат. Москва, 1961, 12.
2. В.А. СПЕЙСЕР, *Сжигание газа на электростанциях и в промышленности*. Госэнергоиздат, Москва, 1960.
3. Ф.Ф. КНОРРЕ, *Топчиные процессы*. *Госэнергоиздат*. Москва, 1959, 93.
4. A. G. GAYDON, H. G. WOLFHARD, *Flames, their structure, radiation and temperature*. London, Chapman a. Hall, 1953.
5. А.С. ИССЕРЛИН, *Условия устойчивости работы инжекционных газовых горелок*. Газовая промышленность, 5, 25—30 (1962).

UN MODEL FIZIC NOU PRIVIND ARDEREA COMBUSTIBILULUI ÎN MOTORUL CU APRINDERE PRIN SCÎNTEIE

DE

BERTHOLD GRÜNWALD

621.43

În vederea descifrării calitative și cantitative a fenomenului de propagare a flăcării turbulente din motorul cu aprindere prin scînteie, au fost întreprinse cercetări numeroase, care s-au concentrat îndeosebi asupra vitezei de propagare a flăcării turbulente, ținînd seama de importanța hotărîtoare pe care o are durata propagării atît pentru mărirea turației motorului, cît și pentru combaterea detonației. Din această cauză aproape a fost neglijată una dintre principalele caracteristici ale flăcării turbulente, și anume desfășurarea transformărilor chimice într-o zonă de mare adîncime.

Încă în 1949, A. S. Sokolic atrage atenția că „*în afara vitezei de propagare a flăcării o importanță foarte mare pentru dezvoltarea teoriei o vor avea fenomenele induse în spatele frontului flăcării, în adîncimea zonei de ardere*" [1].

Studiul adîncimii zonei de ardere, atît sub aspectul dimensiunilor geometrice, cît și sub cel cinetic, prezintă interes din două puncte de vedere. Pe de o parte, nu este posibilă elaborarea unei teorii unitare a flăcărilor turbulente fără a fi în posesiunea unui număr suficient de informații privind transformările fizico-chimice din spatele frontului de aprindere. Pe de altă parte, din punct de vedere practic prezintă importanță viteza de degajare a căldurii rezultate prin ardere ; or, cu cît este mai mare adîncimea zonei de ardere, cu atît se eliberează o cantitate mai mică de energie chimică tocmai în acea parte a ciclului în care eficiența transformării ei în lucru mecanic este maximă.

În prezent, informațiile privind adîncimea zonei de ardere din flacăra turbulentă din motorul cu aprindere prin scînteie lipsesc aproape complet. În ultimul timp s-a acordat mai multă atenție cercetării pe arzătoare a adîncimii

St. cerc. energ. electr. Tom 14 Nr. 2 p. 425–438 București 1964

zonei de ardere din flacăra turbulentă ; cu toate acestea, informaţiile acumulate şi în acest domeniu sînt cu totul insuficiente pentru elaborarea unor teorii unitare a flăcărilor turbulente.

Importanţa pe care o prezintă, îndeosebi pentru economicitatea motorului, prezenţa reacţiilor de ardere într-o zonă largă ne-a determinat să căutăm o cale de evaluare a proceselor care au loc în flacăra turbulentă.

Primele şi aproape unicele măsurători privind adîncimea zonei de ardere din flacăra turbulentă din motor au fost efectuate de N .V. Inozemţev şi V. K. Koşkin [2].

Ca metodă de investigaţie, autorii au folosit analiza probelor de gaze luate din diverse puncte ale camerei de ardere în diverse momente ale ciclului.

Rezultatele obţinute de autori arată că adîncimea zonei de ardere este de ordinul zecilor de milimetri.

Încercările făcute pentru a explica prezenţa transformărilor chimice într-o zonă largă din flacără, pe baza modelului „laminar" al flăcărilor turbulente, conduc la contradicţii evidente cu datele experimentale.

În modelul „laminar" al flăcărilor turbulente, transformările chimice din flacără sînt explicate prin mărirea considerabilă a suprafeţei de ardere fie datorită deformării frontului de flacără, fie datorită fărîmiţării lui. Zona de ardere apare ca un ansamblu de flăcări laminare, astfel încît, la străbaterea ei, în fiecare secţiune trebuie să se reproducă fenomenele din flacăra laminară. Experienţa nu confirmă însă această concluzie.

Pe baza proprietăţilor optice ale flăcării laminare rezultă că transformările chimice care au loc în zona de ardere, a cărei grosime este de ordinul zecimilor de milimetru, se desfăşoară treptat, de la substanţele iniţiale la cele finale, ca reacţii omogene, în volum.

Ar fi de aşteptat ca în flacăra turbulentă, în fiecare secţiune, să se reproducă succesiunea fazelor de reacţie proprii flăcării laminare. Dar în experienţele lui Wohl [3], [4], efectuate pe flacăra turbulentă dintr-un amestec propan-aer, nu se reproduc nici succesiunea radiaţiei, ca în zona de reacţie a flăcării laminare, nici intervalele dintre limitele de radiaţie ale componenţilor CH şi CC. În schimb, măsurătorile arată că intervalele dintre limitele de radiaţie pentru CH şi CC conduc la dimensiuni ale zonei de ardere de zeci de milimetri ceea ce i-a determinat pe Summerfield [5], Wohl şi alţii să considere flacăra turbulentă ca o zonă largă de reacţii omogene, în volum.

Pe baza acestei reprezentări, în fiecare secţiune a zonei de ardere concentraţia şi temperatura sînt identice ; ele variază numai în timp.

O astfel de reprezentare presupune inexistenţa unor gradienţi de temperatură şi concentraţie între diferitele secţiuni ale zonei de ardere ; or, tocmai asemenea gradienţi, care determină transferul de căldură şi substanţă, reprezintă condiţia fundamentală a propagării flăcării în volum. De aceea trebuie presupus că concentraţia combustibilului variază pe adîncimea zonei de ardere, micşorîndu-se la trecerea de la amestecul proaspăt, spre gazele arse (fig. 1).

Singurele informaţii care ne stau la dispoziţie în prezent cu privire la compoziţia chimică a zonei de ardere sînt cele obţinute pe flăcările turbulente din arzătoare sau bombe.

V. E. Doroşenko şi A. I. Nikitski au analizat compoziţia chimică a probelor de gaze luate din diferite părţi ale zonei de ardere din flacăra turbulentă

a unui arzător circular. Rezultatele experienţelor efectuate cu un amestec de benzină-aer în condiţii de joasă presiune au arătat [6] că vaporii de combustibil sînt prezenţi în toate porţiunile zonei de ardere, astfel încît nu are loc un proces de descompunere a combustibilului cu ardere treptată a părţilor componente, ca în cazul reacţiilor omogene, în volum ; formarea de CO_2 în lungul zonei de ardere este numai rezultatul arderii substanţelor iniţiale.

Rezultatele experimentale obţinute la trecerea unei sonde de ionizare prin flacără de asemenea nu pot fi explicate coerent dacă se consideră flacăra turbulentă ca o totalitate de flăcări laminare.

Oscilograma tipică a curentului de ionizare la traversarea unei flăcări laminare indică o creştere iniţială rapidă a curentului de ionizare, după care urmează scăderea lui, mai lentă, pînă la anulare, adică pînă la valoarea de echilibru.

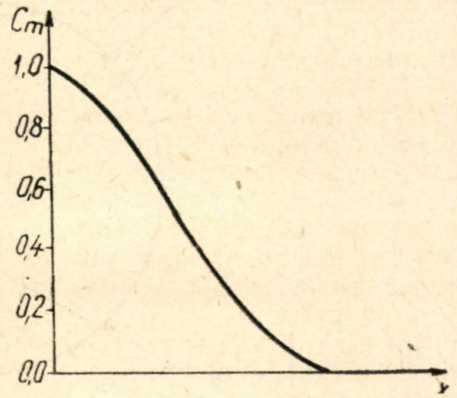


Fig. 1. — Variaţia concentraţiei combustibilului în adîncimea zonei de ardere din flacăra turbulentă.

Oscilograma curentului de ionizare la traversarea unei flăcări turbulente în bombă are cu totul alt caracter [7]. Ea indică o durată mai mare de ardere în flacăra turbulentă şi în mod corespunzător o adîncime mai mare a zonei de ardere : aproximativ de 50 de ori mai mare decît zona de ardere din flacăra laminară. Totodată curentul de ionizare în flacăra turbulentă are un caracter oscilant ; el nu trece niciodată prin valoarea de echilibru, iar amplitudinea sa maximă depăşeşte de multe ori valoarea amplitudinii din flacăra laminară.

Dacă flacăra turbulentă este un ansamblu de flăcări laminare, reproducerea curentului de ionizare din flacăra laminară la traversarea zonei de ardere este o necesitate. Această cerinţă nu este însă îndeplinită.

Astfel, toate datele experimentale menţionate mai sus, obţinute prin diferite metode de investigaţie (analiza spectrală, analiza chimică a probelor de gaze şi cercetarea curentului de ionizare), vin în evidentă contradicţie cu reprezentarea flăcărilor turbulente pe baza modelului „laminar".

În 1959, A. S. Sokolic a propus o reprezentare nouă a flăcărilor turbulente, care consideră zona de ardere ca o succesiune de autoaprinderi [7].

În lucrările [8] şi [9], modelul fizic al lui Sokolic este reprezentat şi analizat din punctul de vedere al vitezei de propagare. Pe baza modelului lui Sokolic se poate lămuri şi cel de-al doilea aspect caracteristic al flăcării turbulente : adîncimea zonei de ardere.

În modelul autoaprinderii pulsatorii, flacăra turbulentă are un caracter statistic. Elemente de volum se autoaprind şi se sting succesiv datorită difuziunii turbulente. Elementele de volum care ard (gazele de flacără) interferează, se amestecă cu cele de gaze proaspete, astfel încît primele se sting prin reducerea temperaturii, ca urmare a amestecării lor cu gazele proaspete, iar ultimele se

autoaprind, datorită intensificării transferului de căldură și mai ales de centrii activi. Asemenea transformări chimice neîntrerupte reprezintă elementul specific al propagării flăcării în volum.

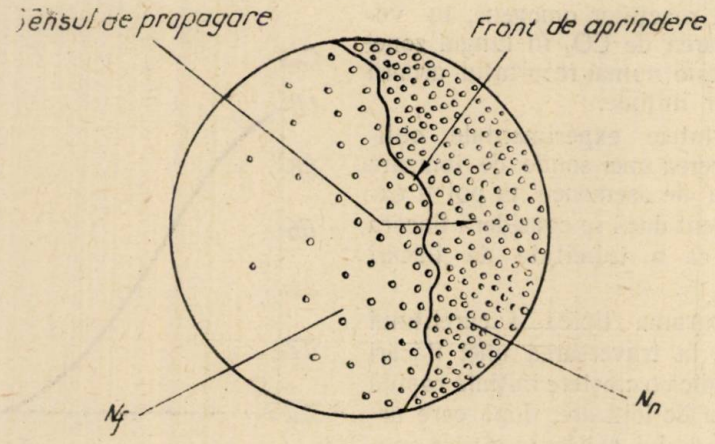


Fig. 2. — Distribuția moleculelor de combustibil în camera de ardere a unui motor cu aprindere prin scînteie în perioada propagării frontului de aprindere (modelul fizic al autorului).

Acest model explică coerent rezultatele experimentale menționate mai sus [10] și indică necesitatea apariției unui gradient al concentrației de combustibil în flacăra turbulentă, determinat de gradul de transformare chimică foarte diferit din adîncimea zonei de ardere.

În fiecare secțiune a zonei de ardere, numai o fracțiune din substanța inițială reușește să intre în reacție din cauza amestecării continue a gazelor de ardere cu gazele proaspete. De aceea în fiecare secțiune se stabilește o concentrație medie statistică, care scade continuu pe măsură ce ne îndepărtăm de limita de separație a amestecului proaspăt de amestecul ars.

Pe baza datelor experimentale și a reprezentării flăcării turbulente ca o succesiune de autoaprinderi și stingeri consecutive s-a elaborat următorul model fizic al propagării flăcării în camera de ardere a unui motor.

La un moment dat, extremitatea luminoasă a flăcării dinspre gazele proaspete împarte amestecul în două părți (fig. 2).

Granița luminoasă, de separație a amestecului nears de restul amestecului, în care sînt inițiate reacțiile de ardere, se numește front de aprindere [1]).

Partea din amestec aflată în fața frontului de aprindere reprezintă *partea nearsă* din amestec ; partea din spatele frontului de aprindere reprezintă *partea cuprinsă de flacără*.

La un moment dat, dacă N_f reprezintă numărul moleculelor de combustibil din volumul de amestec cuprins de flacără sau aflat în spatele frontului de

[1]) Conceptul clasic de front de flacără este impropriu pentru flăcările turbulente, deoarece presupune arderea amestecului pe o suprafață de ardere.

aprindere, atunci numărul moleculelor de combustibil care *a intrat efectiv în reacție* N_e este evident mai mic decît N_f din cauza gradientului concentrației de combustibil din zona de ardere.

Rezultă

$$N_e \leqslant N_p , \tag{1}$$

egalitatea fiind realizată numai în cazul flăcărilor laminare cînd arderea are loc practic în frontul de aprindere (frontul flăcării).

Dacă notăm cu N_{cs}, numărul moleculelor de combustibil aflat în amestecul din camera de ardere în condițiile inițiale, adică în momentul declanșării scînteii electrice, iar cu N_n, numărul moleculelor de combustibil aflat în partea nearsă, atunci evident

$$N_{cs} = N_f + N_n , \tag{2}$$

sau

$$G_s = G_f + G_n , \tag{2'}$$

unde G_s, G_f și G_n reprezintă greutatea amestecului în momentul declanșării scînteii electrice, respectiv greutatea amestecului cuprins de flacără și greutatea amestecului nears.

Notăm

$$x_f = \frac{G_f}{G_s} , \tag{3}$$

astfel încît x_f *reprezintă fracțiunea din amestec cuprinsă de flacără pînă la un moment dat.*

Variația parametrului x_f în raport cu timpul se numește *legea de propagare.*

Evident că

$$x_f = \frac{N_f}{N_{cs}} . \tag{4}$$

Notăm

$$x_e = \frac{N_e}{N_{cs}} , \tag{5}$$

astfel încît x_e *reprezintă fracțiunea din numărul total de molecule de combustibil, care a intrat efectiv în reacție pînă la un moment dat.*

Variația parametrului x_e în raport cu timpul se numește *legea de ardere efectivă.*

Evident,

$$x_e \leqslant x_f .$$

Diferența

$$x_f - x_e = x_i \tag{6}$$

reprezintă numărul moleculelor de combustibil din volumul cuprins de flacăra care nu a intrat în reacție pînă la un moment dat.

Variația parametrului x_i în raport cu timpul se numește *legea de ardere întîrziată.*

Derivăm, în raport cu timpul, relația (6), regrupînd convenabil termenii :

$$\frac{dx_e}{d\tau} = \frac{dx_f}{d\tau} - \frac{dx_i}{d\tau}, \tag{7}$$

sau

$$\frac{dx_e}{d\alpha} = \frac{dx_f}{d\alpha} - \frac{dx_i}{d\alpha}, \tag{7'}$$

unde α este unghiul de rotație a arborelui cotit (*RAC*).

Denumim

– viteză masică de propagare derivatele

$$\frac{dx_f}{d\tau}, \frac{dx_f}{d\alpha};$$

– viteză de ardere efectivă derivatele

$$\frac{dx_e}{d\tau}, \frac{dx_e}{d\alpha};$$

– viteză de frînare derivatele

$$\frac{dx_i}{d\tau}, \frac{dx_i}{d\alpha}.$$

Relația (7) pune în evidență particularitatea cea mai caracteristică a flăcării turbulente ; ea arată că, din cauza adîncimii zonei de ardere, viteza de ardere efectivă, sau, cu alte cuvinte, viteza de consum a combustibilului în reacție, rămîne totdeauna în urma vitezei masice de propagare, sau, altfel spus, în urma vitezei de cuprindere a amestecului de către frontul de aprindere.

Pentru a stabili expresiile legilor de ardere efectivă și de propagare, este necesar să se găsească o exprimare analitică a laturii cinetice a fenomenului.

Arderea combustibilului reprezintă un proces complex de oxidare a hidrocarburilor, determinat în primul rînd de șirul numeros de reacții elementare care au loc.

Unele condiții particulare din motorul cu aprindere prin scînteie creează dificultăți suplimentare în cunoașterea procesului. Din această cauză, în stadiul actual al cunoștințelor noastre este posibil să se evalueze numai viteza globală a transformărilor chimice.

În acest sens au fost făcute numeroase încercări privind îndeosebi desfășurarea procesului de ardere în motorul cu aprindere prin compresiune. Încercările s-au dezvoltat în două direcții : unii autori au elaborat ecuații empirice care descriu dinamica procesului de ardere; alții au căutat o bază fizico-chimică simplă pentru elaborarea relațiilor căutate.

Dintre încercările făcute de aceștia din urmă merită o mențiune specială ecuația bimoleculară a vitezei de ardere din motorul cu aprindere prin compresiune, stabilită de K. Neuman în 1936 [11].

N. V. Inozemțev [2], N. M. Glagolev [12], și alții au făcut încercări de a dezvolta metoda lui Neuman ; ele nu au dat însă rezultate satisfăcătoare.

Una dintre cele mai reușite încercări de a stabili o lege de ardere a combustibilului în motor este aceea a lui I. I. Vibe.

În stabilirea ecuațiilor sale, Vibe pleacă de la concepțiile generale ale teoriei reacțiilor înlănțuite, ceea ce ne determină să apreciem ipotezele și raționamentele sale ca fiind foarte valoroase. Vibe nu ține însă seama de particularitatea principală a arderii în motorul cu aprindere prin scînteie : prezența zonei largi de ardere din flacăra turbulentă.

De aceea, preluînd ipotezele și raționamentele lui Vibe, am urmărit dezvoltarea lor în concordanță cu modelul fizic propus de noi.

Metoda de lucru a lui Vibe este prezentată și analizată pe larg în lucrările [13], [14], [15], [16], [17], [18], [19].

Potrivit ipotezei lui Vibe, dacă notăm cu N'_n numărul total de molecule de combustibil care nu a intrat în reacție, aflat la un moment dat în camera de ardere — în fața și în spatele frontului de aprindere — atunci

$$-\mathrm{d}N'_n = K\mathrm{d}N_{ef}, \tag{8}$$

adică numărul moleculelor de combustibil care intră în reacție în intervalul de timp $\mathrm{d}\tau$ este direct proporțional cu numărul centrilor efectivi prezenți în reacție în același interval de timp.

Presupunînd că mecanismul de propagare a flăcării este laminar, numărul de molecule de amestec nears ($-\mathrm{d}N_n$) cuprins de flacără în timpul elementar $\mathrm{d}\tau$ este egal cu numărul moleculelor de combustibil care a intrat în reacție ($-\mathrm{d}N'_n$), deoarece reacțiile au loc practic în frontul flăcării. Așadar, în flacăra laminării se obține

$$-\mathrm{d}N_n = K\mathrm{d}N_{ef}. \tag{9}$$

Noi am considerat posibilă extinderea relației (9) și în domeniul flăcărilor turbulente, prin introducerea unui factor de corecție.

În condițiile mecanismului turbulent de propagare, bazat pe modelul autoaprinderii pulsatorii, flacăra poate avansa cu atît mai repede, adică elementele de volum care ard pot aprinde cu atît mai ușor elementele de volum de amestec proaspăt cu care interferează, cu cît numărul relativ de centri efectivi este mai mare. Sporirea numărului de centri efectivi este rezultatul unor amestecări intense la diferite scări de turbulență a celor două grupuri de elemente de volum [10].

Din această cauză am admis că numărul relativ de molecule de combustibil cuprinse de flacără în timpul elementar $\mathrm{d}\tau$ este proporțional cu numărul relativ de centri efectivi care se generează în același interval de timp, adică

$$-\frac{\mathrm{d}N_n}{N_n} = K_1 \frac{\mathrm{d}N_{ef}}{N'_n}. \tag{10}$$

Pe baza relației (8), relația (10) devine

$$\frac{\mathrm{d}N'_n}{N'_n} = \frac{K}{K_1}\frac{\mathrm{d}N_n}{N_n}, \tag{11}$$

adică numărul relativ de molecule care intră în reacție în timpul elementar $d\tau$ este cu atît mai mare, cu cît numărul relativ al moleculelor de combustibil cuprinse de flacără este mai mare.

Relația (10) se poate pune sub forma

$$-dN_n = K_1 \frac{N_n}{N'_n} dN_{ef}. \tag{12}$$

Raportul N_n/N'_n este evident o mărime proporțională cu adîncimea zonei de ardere.

Comparînd relațiile (12) și (8), rezultă că, spre deosebire de numărul moleculelor de combustibil care intră în reacție, numărul moleculelor de combustibil cuprinse de flacără depinde nu numai de numărul centrilor efectivi, ci și de raportul N_n/N'_n, care reflectă corelația dintre aspectul mecanic al propagării (turbulența, amestecarea) și aspectul ei cinetic.

În condițiile din cilindrul motorului, la începutul procesului de ardere flacăra avansează mai repede, iar reacția rămîne în urmă; în a doua parte a procesului, propagarea este frînată, iar reacția se accelerează. În aceste condiții, numărul moleculelor de combustibil aflate în partea nearsă (N_n) se reduce mai repede la început, iar numărul total al moleculelor de combustibil care nu a intrat în reacție (N'_n) scade mai repede în a doua parte a procesului. Ca urmare raportul N_n/N'_n se modifică continuu, în diferite etape ale procesului predominînd unul sau altul dintre cele două aspecte. Astfel, ipoteza admisă prin relația (10) exprimă complexitatea mai mare a propagării flăcării în raport cu cinetica reacției, ceea ce reprezintă unul dintre temeiurile ei raționale.

La trecerea de la flacăra turbulentă la cea laminară, relația (12) trebuie să se reducă la (9). Cum pentru flacăra laminară este îndeplinită condiția $N_n = N'_n$, rezultă $k_1 = k$. Astfel, constanta k_1 trebuie să fie o mărime proporțională cu adîncimea zonei de ardere, deoarece aceasta este principalul element distinctiv dintre cele două tipuri de flacără care este luat în seamă prin cele două relații. Cum nu se poate preciza exact această dependență, în calcule se va admite pentru k o valoare medie, ceea ce este justificat de faptul că în motor relația (12) se aplică numai flăcărilor turbulente, la care adîncimea zonei de ardere variază relativ puțin în comparație cu variația adîncimii zonei de ardere la trecerea de la una la alta din cele două flăcări.

Împărțind relațiile (8) și (10) prin timpul elementar $d\tau$ și definind raportul dintre viteza de formare a centrilor efectivi ($dN_{ef}/d\tau$) și numărul moleculelor de combustibil prezent în camera de ardere la un moment dat (N'_n) viteză relativă de generare a centrilor efectivi, adică

$$W_{ef} = \frac{1}{N'_n} \frac{dN_{ef}}{d\tau}, \tag{13}$$

rezultă

$$-\frac{dN'_n}{d\tau} = KN'_n W_{ef}, \tag{14}$$

$$-\frac{dN_n}{d\tau} = K_1 N_n W_{ef}. \tag{14'}$$

Viteza de formare a centrilor efectivi este o funcție de timp, întrucît se modifică cu desfășurarea proceselor. Ca urmare, ecuațiile diferențiale (14) și (14′) se pot rezolva prin metoda separării variabilelor [2])

$$-\frac{dN'_n}{N'_n} = K\,W_{ef}\,d\tau, \tag{15}$$

$$-\frac{dN_n}{N_n} = K_1\,W_{ef}\,d\tau. \tag{15'}$$

Integrînd între limitele $N_{cs} - N'_n$, $N_{cs} - N_n$, $0 - \tau$, se obține

$$\ln\frac{N'_n}{N_{cs}} = -\int_0^\tau K\,W_{ef}\,d\tau, \tag{16}$$

$$\ln\frac{N_n}{N_{cs}} = -\int_0^\tau K_1\,W_{ef}\,d\tau. \tag{16'}$$

Pe baza relațiilor (2) și (4) rezultă

$$N_n = N_{cs}(1 - x_f). \tag{17}$$

În fiecare moment se realizează egalitatea

$$N'_n = N_{cs} - N_e,$$

sau, pe baza relației (5),

$$N'_n = N_{cs}(1 - x_e). \tag{17'}$$

Introducînd relațiile (17) și (17′) în relațiile (16) și (16′), după simplificări se obține:

$$x_e = 1 - e^{-k\int_0^\tau W_{ef}\,d\tau}, \tag{18}$$

$$x_f = 1 - e^{-k_1\int_0^\tau W_{ef}\,d\tau}. \tag{18'}$$

Legea de ardere efectivă (18) se identifică cu legea generală de ardere obținută de Vibe.

Relațiile (18) și (18′) arată că între cele două legi există un paralelism perfect.

Într-o formă concentrată, ecuațiile (18) și (18′) pot fi transcrise astfel

$$x_e = 1 - \frac{1}{e^{f_1(\tau)}}, \tag{19}$$

$$x_f = 1 - \frac{1}{e^{f_2(\tau)}}, \tag{19'}$$

unde funcțiile $f_1(\tau)$ și $f_2(\tau)$ rezultă imediat prin identificare.

---

[2]) Cu privire la invariabilitatea constantei k, se fac observații corespunzătoare în lucrarea [16].

În cele ce urmează vom arăta că funcţia $f_2(\tau)$ trebuie să îndeplinească aceleaşi condiţii ca şi funcţia $f_1(\tau)$, studiată în lucrările lui Vibe.

1. În momentul declanşării scînteii electrice ($\tau = 0$), evident $x_e = 0$, deci $f_1(0) = 0$.

Spre deosebire de ecuaţia (19), ecuaţia (19′) nu are sens nu numai în momentul $\tau = 0$, dar nici pe intervalul $0 - \tau_f$, unde τ_f reprezintă momentul apariţiei nucleului de flacără.

Dar, în momentul $\tau = \tau_f$, atît fracţiunea de combustibil din partea cuprinsă de flacără x_f, cît şi viteza masică de propagare $dx_f/d\tau$ nu au valori nule. Formal s-ar putea considera că în momentul declanşării scînteii $x_f = 0$, iar flacăra creşte în intervalul $0 - \tau_f$ de la o dimensiune punctiformă pînă la dimensiunile nucleului de flacără.

În momentul $\tau = \tau_f$, parametrii x_f şi $dx_f/d\tau$ au valori foarte reduse din cauza dimensiunilor mici ale primului focar de flacără; de asemenea, la începutul procesului, legea de propagare (x_f) nu poate să difere mult de legea de ardere efectivă (x_e). Aceste observaţii justifică formalismul propus, astfel încît se poate considera şi pentru legea de propagare $x_f = 0$ pentru $\tau = 0$, ceea ce conduce la condiţia

$$f_2(0) = 0.$$

2. În decursul procesului de ardere, viteza relativă de formare a centrilor efectivi W_{ef} nu variază în salturi, astfel încît funcţia $f_2(\tau)$ trebuie să fie continuă, ca şi funcţia $f_1(\tau)$.

3. Funcţia $f_2(\tau)$ trebuie să fie o funcţie continuu crescătoare, ca şi funcţia $f_1(\tau)$, întrucît în decursul procesului de ardere x_f creşte monoton de la zero la 1, ceea ce este posibil dacă $f_2(\tau)$ variază între 0 şi $+\infty$.

4. Funcţia $f_2(\tau)$ este continuu crescătoare dacă

$$\lim f_2(\tau) = +\infty,$$

$$x_f \to 1$$

cînd $\tau \to \infty$.

5. În momentul iniţial, întrucît $W_{ef} = 0$, rezultă

$$\left(\frac{dx_f}{d\tau}\right)_{\tau=0} = 0,$$

ceea ce poate fi admis în baza celor menţionate la punctul 1.

6. La sfîrşitul procesului de propagare, flacăra se stinge, astfel încît

$$\left(\frac{dx_f}{d\tau}\right)_{\tau \to \infty} = 0.$$

7. Evident

$$\int_0^\infty \frac{dx_f}{d\tau}\, d\tau = 1.$$

8. Viteza masică de propagare trebuie să treacă printr-un maxim, ca şi viteza de ardere efectivă.

Utilizînd pentru viteza relativă de formare a centrilor efectivi, la fel ca Vibe, funcţia

$$W_{ef} = C\tau^m,$$

substituind-o în ecuaţiile (18) şi (18′) şi efectuînd integrările cuvenite, se obţine

$$x_e = 1 - e^{-\frac{KC}{m+1}\tau^{m+1}}, \tag{20}$$

$$x_f = 1 - e^{-\frac{K_1C}{m+1}\tau^{m+1}}. \tag{20′}$$

Întrucît în studiul procesului de ardere din motor este mai convenabil să se măsoare timpul în unghiuri *RAC*, în relaţiile (20), (20′) se substituie τ din relaţia de definiţie

$$\tau = \frac{\alpha - \alpha_s}{6n},$$

unde

α – unghiul *RAC*, curent, măsurat faţă de punctul motor interior la finele compresiunii,

α_s – avansul la declanşarea scînteii electrice,

n – turaţia motorului.

Relaţiile (20) şi (20′) devin

$$x_e = 1 - e^{-\frac{KC}{m+1}\left(\frac{\alpha-\alpha_s}{6n}\right)^{m+1}}, \tag{21}$$

$$x_f = 1 - e^{-\frac{K_1C}{m+1}\left(\frac{\alpha-\alpha_s}{6n}\right)^{m+1}}. \tag{21′}$$

S-a considerat mai raţional să se utilizeze valoarea relativă a unghiului *RAC*.

Dacă se ia ca unghi de referinţă unghiul α_y la care se realizează presiunea maximă în cilindru, atunci unghiul relativ *RAC* se defineşte astfel

$$\zeta = \frac{\alpha - \alpha_s}{\alpha_y - \alpha_s}, \tag{22}$$

Logaritmînd relaţia (21′), se obţine

$$\ln(1 - x_f) = -\frac{K_1 C}{m+1}\left(\frac{\alpha - \alpha_s}{6n}\right)^{m+1}. \tag{23}$$

Pentru $\alpha = \alpha_y$, ultima relaţie devine

$$\ln(1 - x_{fy}) = -\frac{K_1 C}{m+1}\left(\frac{\alpha_y - \alpha_s}{6n}\right)^{m+1}. \tag{24}$$

După cum se arată în lucrările [10], [20], momentul în care se încheie propagarea coincide cu momentul în care se atinge presiunea maximă în cilin-

drul motorului; în consecință, pentru $\alpha = \alpha_y$, $x_{fy} = 1$. Pentru a evita nedeterminarea, în ecuația (24) se consideră că amestecul este cuprins în întregime de flacără cînd $x_{fy} = 0{,}999$, ceea ce reprezintă o aproximație cu totul satisfăcătoare. Cu această condiție, împărțind ecuațiile (23) și (24), după simplificare, se obține în cele din urmă

$$x_f = 1 - e^{-6{,}9\zeta^{m+1}}. \tag{25}$$

Procedînd în mod analog cu ecuația (21), pentru $\alpha = \alpha_y$ se obține

$$\ln(1 - x_e) = \ln(1 - x_{ey})\,\zeta^{m+1},$$

sau, utilizînd notația

$$D = -\ln(1 - x_{ey}),$$

ultima ecuație ia forma

$$x_e = 1 - e^{-D\zeta^{m+1}}. \tag{26}$$

Constanta D are o semnificație fizică precisă: ea precizează cantitatea de combustibil care a intrat efectiv în reacție pînă la finele fazei principale de ardere sau pînă la finele propagării. De exemplu, pentru $x_{ey} = 0{,}8$ rezultă $D = 1{,}6$. Întotdeauna $D < 6{,}9$; dacă $D = 6{,}9$, cele două legi de ardere devin dentice, condiție care are loc cînd adîncimea zonei de ardere este practic neglijabilă.

Constanta D se numește constanta cinetică, iar constanta m exponent cinetic.

Pe baza ecuațiilor (25) și (26) se poate determina legea de ardere întîrziată

$$x_i = e^{-D\zeta^{m+1}} - e^{-6{,}9\zeta^{m+1}}. \tag{27}$$

Derivînd relațiile (25), (26), (27) se obțin vitezele de ardere

$$\frac{dx_f}{d\alpha} = \frac{6{,}9\,(m+1)}{\alpha_y - \alpha_s}\,\zeta^m e^{-6{,}9\zeta^{m+1}}, \tag{28}$$

$$\frac{dx_e}{d\alpha} = \frac{D\,(m+1)}{\alpha_y - \alpha_s}\,\zeta^m e^{-D\zeta^{m+1}}, \tag{29}$$

$$\frac{dx_i}{d\alpha} = \frac{m+1}{\alpha_y - \alpha_s}\,\zeta^m\,[6{,}9\,e^{-6{,}9\zeta^{m+1}} - De^{-D\zeta^{m+1}}]. \tag{30}$$

Ecuațiile (25), (26), (27), (28), (29), (30) descriu procesul de ardere din motorul cu aprindere prin scînteie ținînd seama de adîncimea zonei de ardere din flacăra turbulentă.

În studiul procesului de ardere în motorul cu ardere internă se utilizează de obicei legea de degajare a căldurii. Determinarea ei ridică nu numai dificultăți de calcul, dar impune adoptarea unor ipoteze simplificatoare privind gradul de ardere, schimbul de căldură etc.

Spre deosebire de legea de degajare a căldurii care precizează fracțiunea utilă din cantitatea de căldură eliberată pînă la un moment dat, legea de ardere efectivă precizează numai fracțiunea din cantitatea de combustibil care a intrat în reacție pînă la un moment dat, ceea ce este mai avantajos în prezent pentru studiul procesului de ardere.

În măsura în care se cunosc parametrii schimbului de căldură, ai disocierii și gradul de dezvoltare a reacției chimice după intrarea în reacție a combustibilului, pe baza legii de ardere efectivă se poate ridica legea de degajare a căldurii.

Primit la redacție la 5 martie 1964.

BIBLIOGRAFIE

1. . . . *Сгорание в транспортных поршневых двигателях*. Изд. Акад. наук СССР, 1951.
2. Н. В. Иноземцев, Н. К. Кошкин, *Процессы сгорания в двигателях*, Машгиз, 1949.
3. K. Wohl, Zphys. chem, Neue Flge, *16*, 387 (1958).
4. K. Wohl s.a., *On the structure of turbulent flames*. Sixt Symp on comb., Reinhold, 1956.
5. M. Summerfield, S. H. Reiter, V. Kebely, R. W. Mascolor, *The structure and propagation mechanisms of turbulent flames in high speed flow*. Jet Propulsion, 8 (1955).
6. В.Е. Дорошенко, А.И. Никитски, *Исследование влияния параметров смесий на характеристики процесса турбулентного горения. Горение при пониженных давлениях*. Изд. Акад. наук СССР, 1960.
7. А.С. Соколик, *Самовоспламенение, пламя и детонация в газах*. Изд. Акад. наук СССР, 1960.
8. C. Aramă, *Arderea normală în motorul cu aprindere prin scînteie* (I). Metalurgia și construcția de mașini, *8* (1961).
9. A. R. Cernea, *Contribuții la studiul influenței turbulenței asupra vitezei de propagare a flăcării în arderea normală din motorul cu aprindere prin scînteie*. Lucrare de disertație, Inst. polit. Iași, 1963.
10. B. Grünwald, *Influența zonei de ardere din flacăra turbulentă asupra procesului de ardere din motorul cu aprindere prin scînteie*. Lucrare de disertație. Inst. Polit. Buc., 1963.
11. K. Neumann, *Kinetische Analyse des Verbrennungsvorgangs in der Dieselmaschine*. Forschung a. d. Geb. des Ing. Wes., *2* (1936).
12. Н.М. Глаголев, *Рабочие процессы двигателей внутреннего сгорания*. Машгиз, — Киев, 1950.
13. И.И. Вибе, *О законе скорости сгорания в двигателях*. Сб. статей по горной электротехнике, XX (1953).

14. И. И. ВИБЕ, *Полиэмпирическое уравнение скорости сгорания в двигателях*. Поршн. двиг. внутр. сг. Изд. Акад. наук СССР — 1956.
15. И. И. ВИБЕ, *Влияние продолжительности и характера сгорания на рабочий цикл двигателя с воспламенением от электрической искры*. Энергетика и автоматика, Изд. Акад. наук СССР, ОТН, *6* (1959).
16. И. И. ВИБЕ, *Новое о рабочем цикле двигателей*. Машгиз, 1962.
17. A. JANTE, *Das Wiebe-Brenngesetz, ein Fortschritt in der Thermodynamik der Kreisprozesse von Verbrennungsmotoren*. Kraftfahrzeugtechnik, *9* (1960).
18. A. JANTE, *Der Weg Zum Wiebe-Brenngesetz*. Kraftfahrzeugtechnik, *4* (1961).
19. A. JANTE, *Grenzen des Wiebe-Brenngesetzes*. Kraftfahrzeugtechnik *5*, (1961).
20. B. GRÜNWALD, *O ecuație a propagării flăcării turbulente în motorul cu aprindere prin scînteie*. Bul. Inst. polit. Buc., **XXV**, *4* (1963).

DESPRE PRINCIPIUL „TRANSFORMĂRII EXTREMALE A ENERGIEI" ÎN SISTEME ELECTROMECANICE CUPLATE ELECTROMAGNETIC[1])

DE

MATEI MARINESCU

membru corespondent al Academiei R.P.R.

621.313.17.017.8

Principiul, care face obiectul prezentei comunicări, se referă la acele schimbări de stare electromagnetice, care sînt însoțite de o transformare periodică de energie electrică în lucru mecanic.

Principiile variaționale pentru sistemele electromecanice, cuplate electromagnetic (sisteme neliniare) nu constituie o simplă formă diferită de a exprima legile generale care guvernează fenomenele care se petrec în aceste sisteme, ca în cazul sistemelor liniare; ele sînt mai bogate în conținut permițînd prevederea unor noi proprietăți a acestor sisteme.

Astfel, în timp ce în mecanică, principiul celei mai mici acțiuni este o consecință directă a legilor generale ale mecanicii și poate fi folosit tot atît de bine ca și principiul conservării energiei, sau ca principiile newtoniene pentru a determina în mod univoc mișcarea unui sistem, plecînd de la anumite condiții inițiale, în electromagnetism, pentru sistemele electromecanice, cuplate electromagnetic, principiul conservării energiei, singur, nu ajunge pentru a determina în mod univoc schimbarea de stare a sistemului. Completat însă cu principiul *transformării extremale a energiei* schimbarea de stare a unui asemenea sistem este determinată în mod univoc, ca fiind aceea care dintre infinitatea de stări posibile compatibile cu conservarea energiei, este singura realizabilă, deoarece pune în joc maximum de energie transferată, posibilă.

În prima notă [1] despre efectul de instabilitate la electromagneții de tip solenoidal, s-a admis implicit, pentru calculul lucrului forțelor electromagnetice

[1]) Apărută și în C. R. Acad. Sci. Paris, în Nr. din 24 Febr. 1964.

în funcție de amplitudinea oscilațiilor, că trecerea electromagnetului dintr-o stare într-una infinit vecină, superioară, se face urmînd o creștere extremală a energiei — ceea ce era atunci o simplă ipoteză, verificată indirect în consecințele ei. În ceea ce urmează, folosind această ipoteză ca un principiu, aplicabil oricărui sistem electromecanic, cuplat electromagnetic, am putut prevedea noi fenomene care se produc în aceste sisteme — în anumite condiții.

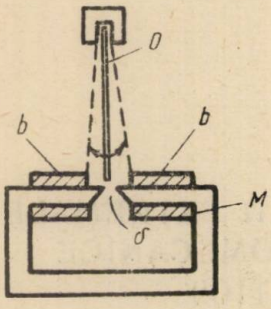


Fig. 1

În acest scop să considerăm o lamă elastică (fig. 1) încastrată la una din extremitățile ei, 0, iar cealaltă deplasîndu-se în fața unui întrefier δ făcînd parte dintr-un circuit magnetic M, face să varieze reluctanța acestui circuit și să presupunem că înfășurările b sînt alimentate în curent alternativ, redresat.

Ne aflăm astfel în condiții identice cu acelea ale electromagnetului de tipul solenoidal, care a făcut obiectul notei precedente. Urmează că lama, ca și miezul electromagnetului, va părăsi în mod spontan poziția sa centrală de echilibru stabil (în condiții normale) și va atinge o altă stare de echilibru dinamic stabil — caracterizată printr-un regim oscilatoriu de amplitudine constantă și de frecvență egală cu jumătate din aceea a impulsurilor curentului de alimentare. Acest lucru este pe deplin confirmat de experiență.

Există totuși o diferență (neesențială) între oscilațiile miezului electromagnetului și cele ale lamei care au o amplitudine care depășește cu mult zona în lungul căreia se exercită influența forțelor electromagnetice în timp ce miezul electromagnetului este sub influența acestor forțe pe tot parcursul.

Să examinăm în lumina noului principiu, dacă putem obține și alte regimuri de oscilații posibile a acestor sisteme.

Să presupunem într-adevăr că lama intră într-un astfel de regim oscilatoriu încît între frecvența f_i a impulsurilor și cea a oscilațiilor f_m există relația

$$f_i = 2nf_m \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

(fig. 2) și că dispoziția temporală a acelor două variabile $i(t)$ și $x(t)$, una în raport cu cealaltă este aceea ilustrată în figura 2.

În aceste condiții se vede imediat că este vorba de o transformare extremală a energiei electrice în lucru mecanic, deoarece, pe de o parte, forța electromagnetică este aplicată armăturii în momentul în care viteza ei este maximă și în sensul acestei viteze, și pe de altă parte, ciclul $OABO$ descris în planul fazelor (φ, i) este un ciclu extremal. Pentru orice alt raport al frecvențelor și al dispozițiilor temporale ale lui $i(t)$ și $x(t)$ ciclul se înscrie în interiorul ciclului limită $OABO$ și forța nu acționează tot timpul în sensul vitezei și la momentul valorii ei maxime. Analiza curentului și a mișcării la osciloscop ne-a permis să verificăm dispoziția temporală ilustrată în fig. 2, în toate cazurile (pentru n un întreg oarecare). Iată deci modul în care principiul „transferului extremal" ne-a relevat o infinitate de schimbări de stare noi, posibile, a căror existență a fost pusă în evidență experimental; de altfel nu sînt singurele și vom reveni asupra acestora — în altă lucrare.

La o analiză mai profundă, principiul pe care l-am enunțat, verificat și pus în valoare — este o expresie a univocității efectului raportat la cauză, deci o consecință a principiului cauzalității.

Să presupunem într-adevăr o dispoziție temporală a lui $i\,(t)$ în raport cu $x\,(t)$ obținută prin translația la stînga sau la dreapta a uneia dintre aceste variabile în raport cu cealaltă și față de dispoziția extremală (fig. 2).

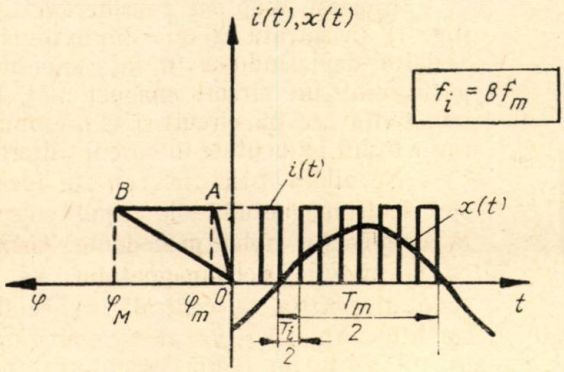


Fig. 2

Pentru aceste două dispoziții diferite (stînga sau dreapta) puterea transferată este aceeași dar mai mică decît cea extremală. Rezultă că aceeași cauză (aceeași putere) ar putea produce două efecte distincte, ceea ce este contrar univocității cerute de principiul cauzalității.

Singura posibilitate de a evita această contradicție o constituie transformarea extremală, ca fiind singura care realizează un efect unic. Ea este și aceea care se produce în realitate. Schimbările de stare pe care le-am pus în evidență, cu ajutorul principiului „transferului extremal", au fost utilizate în construcția unor noi mașini electrice.

Primit la redacție la 25 februarie 1964.

CERCETĂRI EXPERIMENTALE ASUPRA TURBOCOMPRESOARELOR DE SUPRAALIMENTARE A MOTOARELOR CU ARDERE INTERNĂ

DE

V. PIMSNER

621.313.1.001.41 : 621.317

Construirea în țară a grupurilor turbocompresoare, destinate supraalimentării motoarelor cu ardere internă, a ridicat problema determinării caracteristicilor și performanțelor acestor grupuri, ca și a mașinilor componente, atît în vederea unor perfecționări constructive și funcționale, cît și în scopul analizării posibilității tipizării lor.

Complexitatea evoluțiilor fluidului de lucru în compresor și turbină, ca și independența grupului de turația motorului nu permit, în stadiul actual al teoriei mașinilor cu palete, stabilirea caracteristicilor și performanțelor turbocompresorului pe cale teoretică, din care cauză a fost necesară efectuarea cercetărilor experimentale care să permită determinarea caracteristicilor grupurilor turbocompresoare fabricate în țară. Realizarea determinărilor experimentale a ridicat două probleme majore; asigurarea unor debite de aer relativ mari (1—2 kg/s) la temperaturi ridicate și elaborarea metodicei experimentale [1]), care să asigure obținerea rezultatelor veridice și reproductibile.

Studii anterioare [2]) au arătat posibilitatea utilizării unui turboreactor, prevăzut cu prelevarea aerului la ieșirea din compresor, ca sursă de aer care să satisfacă necesitățile experimentale, astfel că ansamblul experimental realizat la laboratorul de mașini rotative al Institutului de energetică se compune din

[1]) V. Pimsner, și colab., *Metodica de încercare a grupurilor de supraalimentare.* Memoriu, Institutul de energetică, 1963.

[2]) V. Pimsner, A. C. Vasilescu, *Caracteristicile turboreactorului cu prelevare de aer.* St. cerc. energ., *3* (1959).

următoarele instalații, care permit ridicarea datelor experimentale pentru trasarea caracteristicilor într-o gamă largă a regimurilor de lucru (fig. 1):

– instalația aerului comprimat, formată dintr-un motor turboreactor (*A*) cu prelevare de aer (*B*) ce poate ajunge la 6÷7 kg/s instalat în camera I

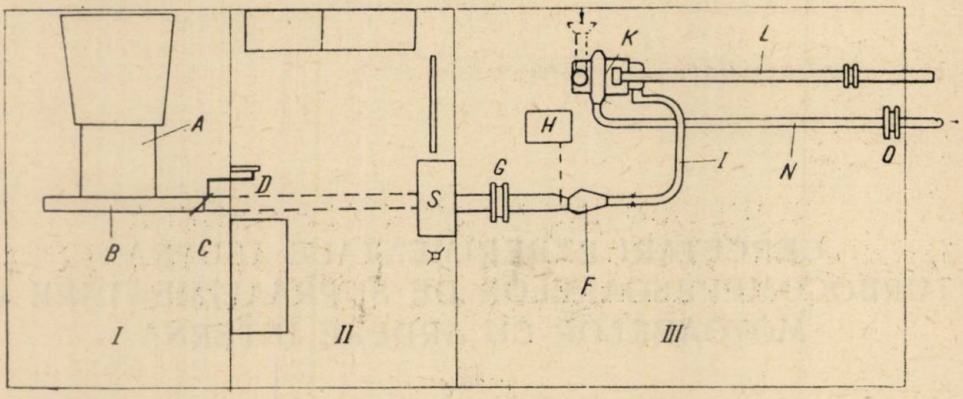


Fig. 1. — Schema generală a instalației experimentale :
I — hala turboreactorului ;
II — camera de comandă și măsurători ;
III — sala de încercări.

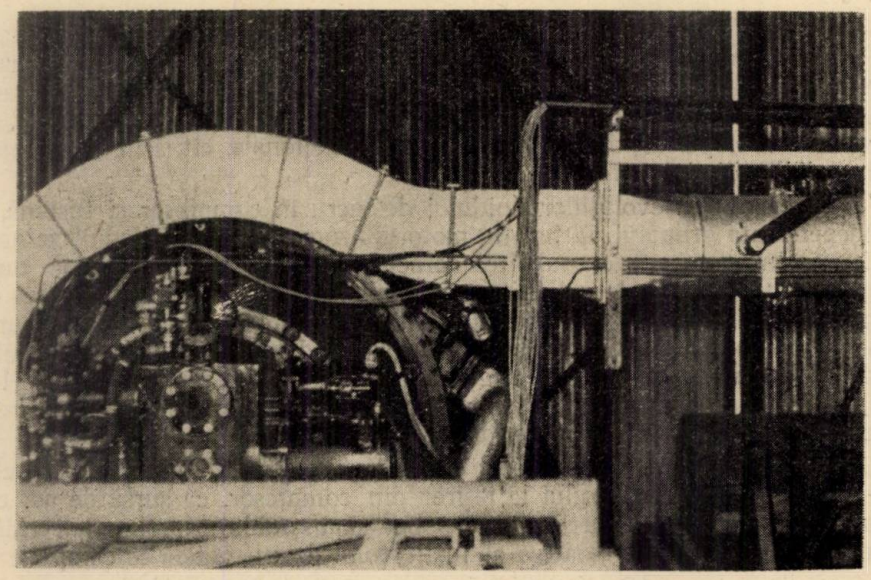


Fig. 2. — Vedere asupra prizei de prelevare a aerului la motorul turboreactor.

a laboratorului (fig. 2). Debitul de aer prelevat se reglează cu ajutorul clapete *C* din cabina de comandă II, cu dispozitivul *D* ;

– instalația de încălzire a aerului (fig. 3) formată din camera de ardere *F*, dispozitivele de dozare și injecție a combustibilului *H*, reglate pentru o temperatură a gazelor de ardere de maxim 650–700°C

– conductele de intrare și ieșire a gazelor de ardere din turbină, respectiv a aerului la compresor (*I*, *K*, *L*, *J*, *N*);

– instalațiile de captare și indicare a parametrilor funcționali ai grupului turbocompresor, ca debitele (*G*, *M*, *O*) presiunile, vitezele, temperaturile și turația. Bancul este astfel realizat încît permite, cu mici adaptări, încercarea mai multor tipuri de turbocompresoare. În figura 4 este prezentat grupul turbocompresor montat pe bancul de încercări.

La realizarea instalației experimentale o deosebită atenție s-a acordat măsurării temperaturilor, deoarece acest parametru este determinant pentru performanțele turbinei cu gaze. Din această cauză, la intrarea și ieșirea gazelor din turbină, au fost amplasate perechi de termocuple în imediata vecinătate a rețelelor de palete, montate prin carcasa turbinei. În plus, răcirea turbinei a fost astfel efectuată, încît să permită măsurarea debitului de căldură evacuat cu apa de răcire, în vederea efectuării bilanțului termic. Temperaturile au fost măsurate cu termocuple cromel-alumel, avînd sudura rece într-un vas cu gheață. Au fost dublate toate punctele de măsură, iar citirea temperaturilor s-a făcut în cabina de comandă cu o punte potențiometrică, tip P.P. și cu un milivoltmetru, clasa 0,2 (fig. 5).

O atenție deosebită a fost acordată măsurării turației; necesitatea măsurării valorilor de 20–30 000 rot/min, ca și particularitățile constructive ale grupului experimental nu au permis utilizarea uneia din metodele clasice, de aceea turația a fost măsurată cu un stroboscop mecanic și în paralel printr-un dispozitiv (fig. 6*a*) format din o camă de oțel (*1*) convenabil profilată, fixată pe axa grupului compresor, care la fiecare rotație produce o variație a cîmpului traductorului inductiv (*2*), realizat dintr-o bobină avînd 2 500 spire (cu diametrul de 0,06 mm), un magnet permanent și piesele polare. Această variație se transformă într-un impuls de tensiune la intrarea în circuitul electronic de formare a impulsurilor (*3*) (fig. 6*b*) de unde sînt dirijate la numărătorul electronic de impulsuri (*4*) și la integratorul (*5*). Aparatul indicator (*6*) permite citirea turației medii, necesară stabilirii regimului de încercări, iar numărătorul electronic (*7*) permite determinarea numărului de impulsuri într-un interval de timp ales, deci turația grupului cu o precizie de ordinul a 1%. Distanța relativ mare între captatorul de impulsuri și instalația de măsură a impus ecranarea cablului de legătură în tub de oțel, pentru a înlătura influența surselor perturbatoare. Măsuri speciale au fost luate pentru detectarea și eliminarea impulsurilor reflectate, care amplificau turația reală a grupului turbocompresor.

Precizia măsurătorilor a putut fi asigurată, atît prin dublarea independentă a captatorilor și a elementelor indicatoare, cît și prin utilizarea metodelor indirecte de verificare a indicațiilor obținute. În același timp s-a ținut seama de corecțiile impuse de tehnica experimentală. Un loc aparte îl ocupă măsurarea temperaturii gazelor la intrarea și ieșirea din turbina cu gaze. Într-adevăr, căderea relativ mică de temperatură realizată în turbină, la o valoare inițială de circa 600–650°C face ca determinarea diferenței temperaturilor cu o eroare de ±5°C, eroare normală la un nivel de temperatură de 600°C, să conducă la erori

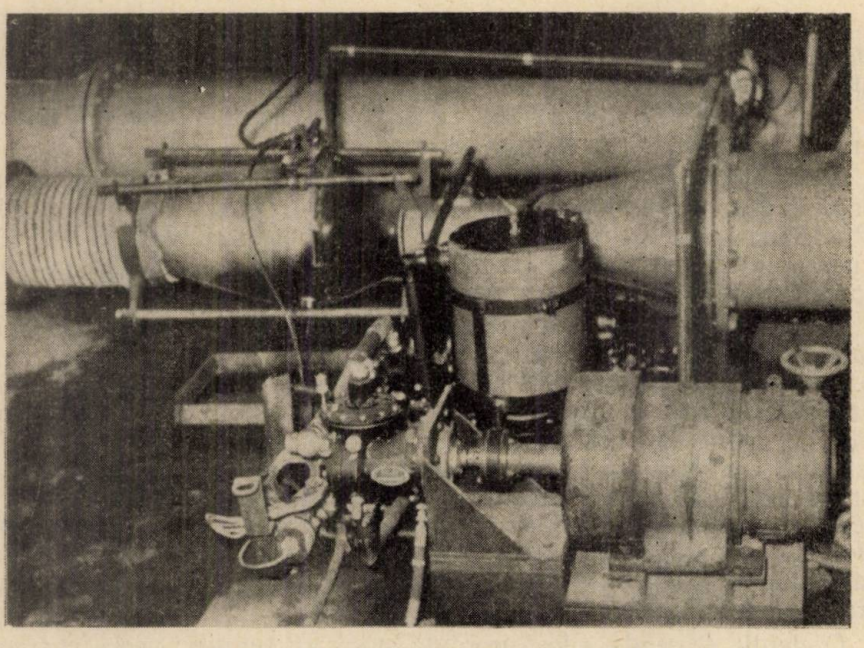


Fig. 3. — Instalaţia de încălzire a aerului.

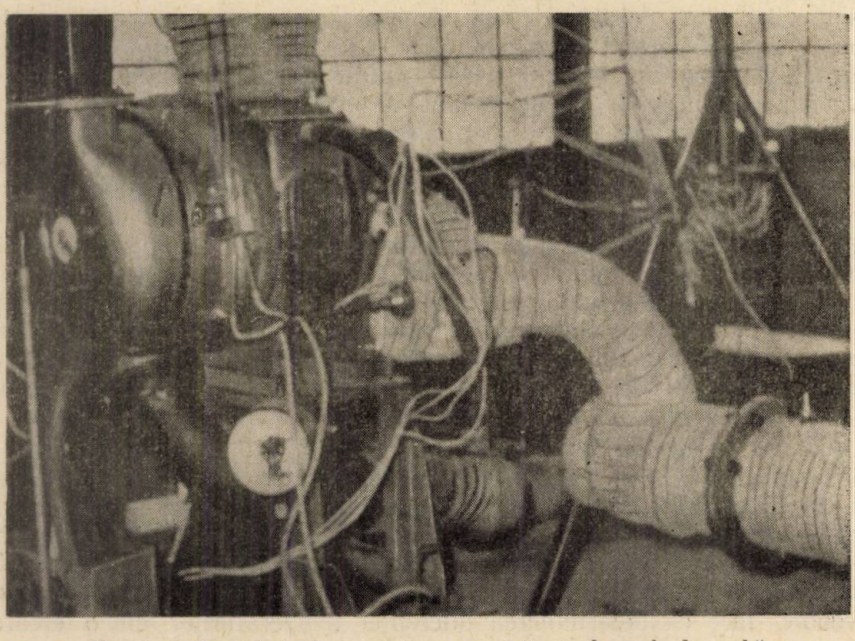


Fig. 4. — Grupul turbocompresor montat pe bancul de probă.

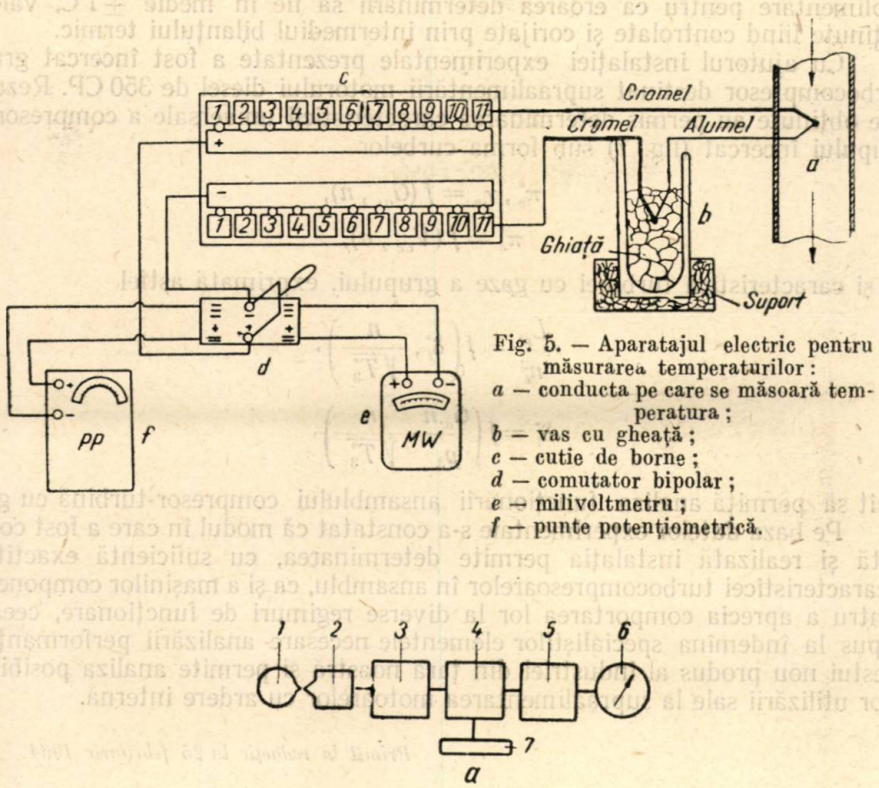


Fig. 5. — Aparatajul electric pentru măsurarea temperaturilor :
a — conducta pe care se măsoară temperatura ;
b — vas cu gheață ;
c — cutie de borne ;
d — comutator bipolar ;
e — milivoltmetru ;
f — punte potențiometrică.

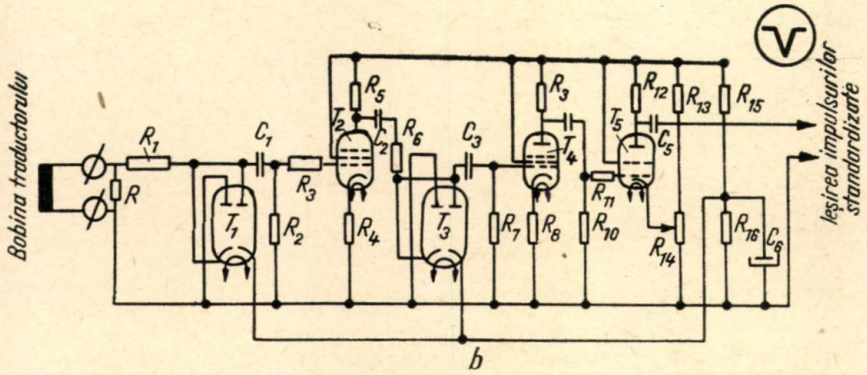


Fig. 6. — Schema bloc a numărătorului electronic (*a*) și schema circuitului electronic pentru măsurarea turației (*b*).

însemnate, în special la determinarea randamentului. Au fost necesare măsuri suplimentare pentru ca eroarea determinării să fie în medie $\pm 1°C$, valorile obținute fiind controlate și corijate prin intermediul bilanțului termic.

Cu ajutorul instalației experimentale prezentate a fost încercat grupul turbocompresor destinat supraalimentării motorului diesel de 350 CP. Rezultatele obținute au permis determinarea caracteristicii universale a compresorului grupului încercat (fig. 7) sub forma curbelor

$$\pi_c^*, \eta_c = f(G_{ac}, n),$$

$$\pi_c^* = f(V_{ac}, n),$$

ca și caracteristica turbinei cu gaze a grupului, exprimată astfel

$$\frac{L_{el}}{n_t^2} = f\left(\delta_t^*, \frac{n}{\sqrt{T_3^*}}\right),$$

$$\delta_t^* = f\left(\frac{G_a \cdot n}{p_4}, \frac{n}{\sqrt{T_3^*}}\right),$$

încît să permită analiza funcționării ansamblului compresor-turbină cu gaze.

Pe baza datelor experimentale s-a constatat că modul în care a fost concepută și realizată instalația permite determinarea, cu suficientă exactitate, a caracteristicei turbocompresoarelor în ansamblu, ca și a mașinilor componente, pentru a aprecia comportarea lor la diverse regimuri de funcționare, ceea ce a pus la îndemîna specialiștilor elementele necesare analizării performanțelor acestui nou produs al industriei din țara noastră și permite analiza posibilităților utilizării sale la supraalimentarea motoarelor cu ardere internă.

Primit la redacție la 25 februarie 1964.

CONSIDERAŢII PRIVIND ARDEREA LIGNIŢILOR DIN R.P.R. PE GRĂTARUL JUNGK

DE

N. PĂNOIU şi L. MAGHIAR

1. Problema arderii ligniţilor în focarele cazanelor de abur de debite mici şi mijlocii echipate cu grătare este o problemă importantă pentru economia naţională a R.P.R. întrucît rezolvarea ei permite lărgirea domeniului de aplicabilitate a ligniţilor.

În conformitate cu directivele Congresului al III-lea al P.M.R. care arată că *este necesară intensificarea studiilor şi încercărilor pentru punerea la punct a fabricaţiei unor cazane de tip industrial, consumînd ligniţi şi combustibili superiori cu randamente ridicate* au fost efectuate cercetări experimentale de arderea ligniţilor de Rovinari şi Filipeştii de Pădure pe grătarul Jungk. Cercetările experimentale au fost efectuate pe un grătar Jungk care echipează unul din cele trei cazane de abur ale centralei de termoficare a fabricii de zahăr Lom din R.P. Bulgaria. Experienţele au fost efectuate cu cîte 500 tone lignit de Rovinari şi Filipeştii de Pădure sortul 0-350 mm transportaţi la faţa locului din R.P.R. La cercetările experimentale care au fost efectuate după o stocare a combustibilului de circa 6 luni au participat, pe lîngă autori, specialiştii fabricii de zahăr Lom din R.P. Bulgaria şi specialiştii firmei constructoare Jungk din R.D.G.

2. *Instalaţia experimentală*

Cercetările experimentale de ardere au fost efectuate pe cazanul nr. 2 din cele 3 cazane de abur de 20 t/h 40 kg/cm² şi 450°C montate în centrala de termoficare a fabricii de zahăr Lom.

Caracteristicile principale ale cazanului sînt următoarele :

Debitul de abur (nominal)	20 t/h,
Presiunea aburului supraîncălzit	40 kg/cm²,
Temperatura aburului supraîncălzit	450°C,
Suprafaţa de încălzire (ecrane şi sisteme convective)	350 m²,

St. cerc. energ. electr. Tom 14 Nr. 2 p. 449–459 Bucureşti 964

Suprafaţa supraîncălzitorului 285 m²,
Suprafaţa economizorului 600 m²,
Suprafaţa preîncălzitorului de aer 415 m²,
Suprafaţa preevaporatorului 718 m².

În figura 1 se arată o secţiune prin cazanul de 20 t/h cu grătar Jungk.

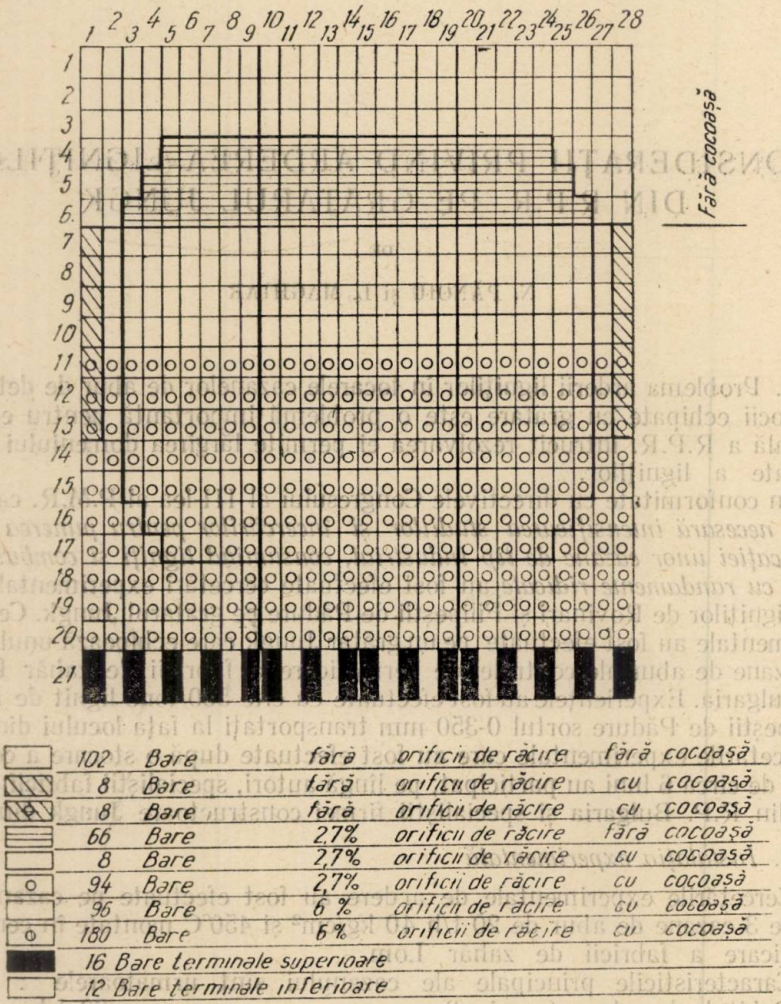


Fig. 2. — Schema aşezării barelor grătarului Jungk.

Cazanul este echipat cu un grătar Jungk cu următoarele caracteristici :

Suprafaţa grătarului 37 m²,
Lungimea grătarului 6,6 m,

Lățimea grătarului	$3 \times 1{,}900 = 5{,}7$ m²,
Înclinarea grătarului față de orizontală	10°,
Acționarea grătarului	hidraulică
Viteza de acționare a grătarului	min $1{,}7 \frac{s}{\text{cursă}}$
Lungimea cursei variabilă	40 – 50 mm.

Grătarul are în total 21 rînduri de bare mobile. După cum se vede în figura 2, circa 50% din bare sînt aliate cu crom.

Dintre cele 21 rînduri de bare primele 6 rînduri sînt acționate în mișcare de împingerea superioară cu ajutorul a două cadre.

Următoarele 14 rînduri de bare sînt acționate într-o mișcare combinată de împingere superioară – oscilantă care permite pe de o parte formarea unor centre de aprindere inferioară și pe de altă parte ruperea plăcii de zgură ce se formează pe grătar.

Mișcarea oscilantă a barelor este provocată de forma specială a barelor însăși pe de o parte și de prinderea acestora pe niște sectoare circulare pe de altă parte.

Cele trei poziții caracteristice ale barelor de grătar în timpul unei curse sînt arătate în figura 3.

Grătarul se termină cu cîte un grătar fix suplimentar de zgură care este acționat hidraulic și permite staționarea zgurii în focar pînă la arderea completă a materiei combustibile din zgură.

Focarul cazanului este prevăzut cu două bolți anterioare de aprindere și o boltă posterioară dezvoltată.

Prima boltă anterioară orizontală are lungimea de 1 200 mm și este situată la o înălțime de 800 mm, a doua boltă anterioară de asemenea orizontală are lungimea de 800 mm și e situată la 1600 mm înălțime față de grătar. Bolta posterioară are o lungime de 3 800 mm și este situată la o înălțime de 510 mm față de grătar la partea posterioară respectiv la o înălțime de 900 mm față de grătar la partea anterioară avînd o înclinare de 7° față de grătar respectiv de 17° față de orizontală. Bolțile formează un canal pentru trecerea gazelor de $1\,200 \times 5\,600$ mm.

3. *Tematica cercetărilor experimentale*

Cercetările experimentale au fost efectuate avîndu-se în vedere următoarele obiective :

1. Performanțele cazanului și ale instalației la arderea lignitilor de Rovinari și Filipeștii de Pădure.
2. Variația performanțelor la variația sarcinii.
3. Variația gradului de răscolire a stratului la variația parametrilor grătarului (cursă și viteză).
4. Comparație între rezultatele obținute la arderea lignitilor din R.P.R. pe grătarul Jungk și pe grătarul cu împingere răsturnată construit în R.P.R.

4. *Rezultatele experimentale și analiza lor*

Cercetările experimentale s-au efectuat în 3 regimuri de funcționare ale cazanului : regimul minim, optim și maxim la arderea lignitilor de Rovinari și Filipeștii de Pădure.

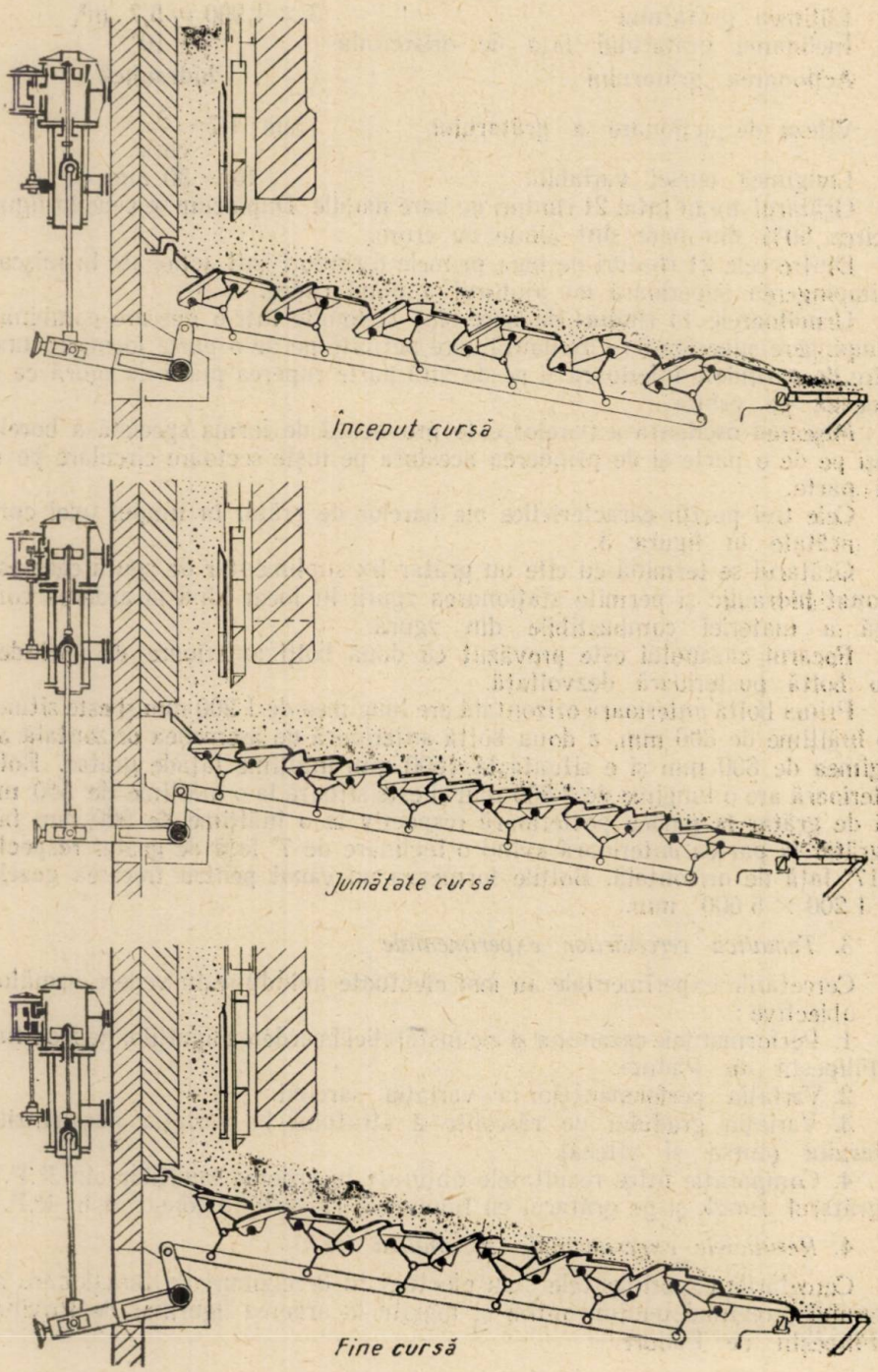


Fig 3. — Poziţiile caracteristice ale barelor grătarului Jungk în timpul unei curse.

Încercările au fost efectuate la funcționarea cazanului experimental în paralel cu un al doilea cazan. La arderea lignitului de Rovinari s-a efectuat o probă cu cazanul izolat (proba nr. IV).

Asupra desfășurării experimentărilor sînt de făcut următoarele observații :

a) Cercetările experimentale au fost efectuate cu lignit de Rovinari și Filipeștii de Pădure. Sortul granulometric 0-350 mm care a fost redus în sistemul de alimentare cu combustibil al centralei la sortul 0-80 mm.

b) Ca urmare a depozitării combustibilului timp de aproape 6 luni în anotimpul de iarnă în depozitul descoperit al centralei, au avut loc modificări importante în valorile caracteristicilor acestora. Astfel, cantitatea de combustibil aflată spre suprafața de contact a depozitului cu atmosfera a înregistrat o creștere pronunțată a umidității și cenușii și o scădere corespunzătoare a puterii calorifice. Ca urmare a acestui fenomen, în timpul cercetărilor experimentale pentru lignitul de Rovinari umiditatea totală a variat între 38,26 și 25,10% respectiv pentru lignitul de Filipeștii de Pădure între 39,60 și 29,62%.

Cenușa la masa uscată a variat între 45,8 și 38,4% pentru lignitul de Rovinari respectiv între 40,9 și 32,8% pentru lignitul de Filipeștii de Pădure. Puterea calorifică inferioară a lignitului de Rovinari a variat între 1 463 $\frac{\text{kcal}}{\text{kg}}$ și 2 220 $\frac{\text{kcal}}{\text{kg}}$ respectiv între 1 903 și 2 005 kcal/kg pentru lignitul de Filipeștii de Pădure. Este de remarcat faptul că probele de maximum pentru cazan s-au efectuat cu lignitul de cea mai bună calitate.

c) Procesul de ardere pe grătar s-a desfășurat cu o intensitate relativ slabă. Pe grătar s-au format permanent la baza stratului plăci mari de zgură cu o suprafață de 2 — 3 m². Aceste plăci de zgură au favorizat arderea marginală pe grătar și repartiția necorespunzătoare a aerului necesar arderii. Această înrăutățire a repartiției aerului a fost accentuată de faptul că grătarul nu este prevăzut cu zone de insuflare. Mișcarea oscilantă a barelor contribuie după părerea noastră pe de o parte la crearea unor centre inferioare de aprindere și pe de altă parte la ruperea plăcii de zgură. Construcția existentă a grătarului însă, prevăzută cu o mișcare oscilantă prea redusă, nu a permis decît într-o slabă măsură, să se resimtă influența acesteia din urmă. Crearea plăcii de zgură pe treimea mediană a focarului a împiedicat tocmai desfășurarea funcțională normală a grătarului prin reducerea la minimum a formării cuiburilor de aprindere inferioară.

Pe baza rezultatelor cercetărilor de ardere a lignitilor de Rovinari și Filipeștii de Pădure pe grătarul Jungk și acelea obținute la experimentarea grătarului cu împingere răsturnată propus de Institutul de energetică și adaptat la cazanul de 10 t/h construit de uzinele Vulcan din București s-a întocmit tabela 1.

O analiză succintă a valorilor prezentate în tabela 1 arată următoarele :

a) În condițiile arderii unui combustibil de calitate inferioară cu un conținut ridicat de umiditate (W^{rap} = 11,3 — 26,2%/10³ kcal în cazul grătarului Jungk și W^{rap} = 15,8 — 24,2%/10³ kcal în cazul grătarului cu împingere răsturnată) respectiv cu un conținut ridicat de cenușă (A^{rap} = 12,1 — 24,8%/10³ kcal) în cazul grătarului Jungk si A^{rap} = 0,35 — 19,2%/10³ kcal în cazul

grătarului cu împingere răsturnată) și o putere calorifică scăzută în general de sub 2 000 kcal/kg, ambele grătare întreţin procesul de ardere.

b) Din punct de vedere tehnic însă, indicii realizaţi de cazanul cu împingere răsturnată sînt mult superiori indicilor realizaţi de grătarul Jungk.

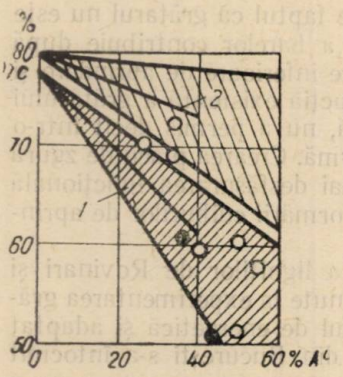
Astfel, excesul de aer la coș, care reflectă indirect posibilitatea grătarului de evitarea zgurificării, înregistrează valori de 1,45 — 1,98 în cazul grătarului cu împingere răsturnată față de 2,15 — 2,89 în cazul grătarului Jungk.

Totodată pierderile prin ardere mecanic incompletă, care reflectă indirect aceeași calitate a grătarului, înregistrează valori de 9,78 — 16,82% în cazul grătarului cu împingere răsturnată față de 19,38 — 51,08% în cazul grătarului Jungk.

Arderea pe grătar se realizează cu un randament de 79,08—87,79 % în cazul grătarului cu împingere răsturnată față de 49,9 — 80,6% în cazul grătarului Jungk.

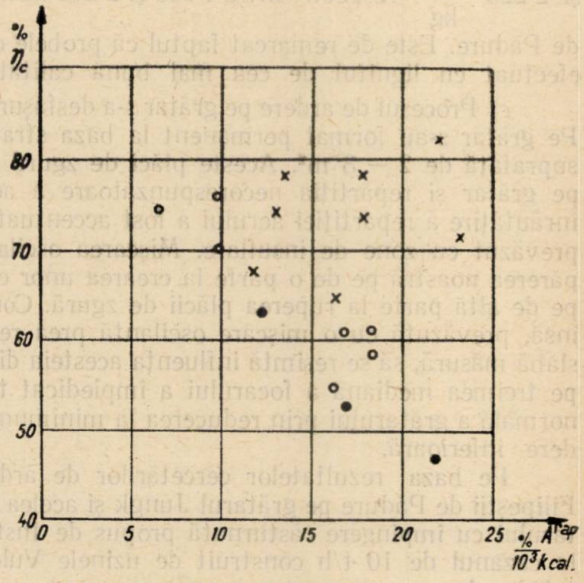
c) Performanţele tehnice ale cazanelor la care au fost aplicate cele două tipuri de grătare sînt influenţate mai mult sau mai puţin de caracteristicile combustibililor folosiţi la experimentare.

În figura 4 se prezintă variaţia randamentului cazanului cu grătar Jungk funcţie de conţinutul de cenușă al combustibilului folosit [1].



● *Ligniţii din R.P.R. (grătar Jungk)*
○ *Ligniţii din R.P. Bulgaria (grătar Jungk) (debite maxime ale cazanului)*

Fig. 4 — Variaţia randamentului cazanelor de debite mici și mijlocii funcţie de conţinutul de cenușă raportat la masa uscată. 1. Cazane cu grătar. 2. Cazane cu cărbune pulverizat.



● *Ligniţii din R.P.R. (grătar Jungk)*
○ *Ligniţii din R.P. Bulgaria (grătar Jungk)*
× *Ligniţii din R.P.R. (grătar cu împingere răsturnată)*

Fig. 5. — Variaţia randamentului cazanului (20 t/h) echipat cu grătar Jungk și cazanului (10 t/h) echipat cu grătar cu împingere răsturnată funcţie de cenușa raportată a combustibilului folosit.

În figura 5 se arată dependența randamentului cazanului echipat cu grătar Jungk și a cazanului cu grătar cu împingere răsturnată funcție de cenușa raportată a combustibilului folosit.

Din analiza rezultatelor prezentate se observă următoarele :

– randamentul cazanului cu grătar Jungk, la sarcină maximă, în cazul arderii lignitilor înregistrează valori de peste 65%, acceptabile unor cazane cu grătar, doar pentru lignitii de calitate superioară ($A_{rap} < 15\%/10^3$ kcal).

Pentru lignitii cu o cenușă raportată cuprinsă între limitele 15 – 20%/10^3 kcal, randamentul scade rapid la valori de pînă la 50% pentru ca pentru lignitii cu cenușa raportată de peste 20%/10^3 kcal randamentul instalației să înregistreze valori de sub 50% și să nu mai mențină stabil procesul de ardere. Comparativ cu grătarul Jungk, grătarul cu împingere răsturnată datorită calității sale de intensificarea răscolirii stratului este practic insensibil la variația calității combustibilului folosit valorile randamentului cazanului situîndu-se

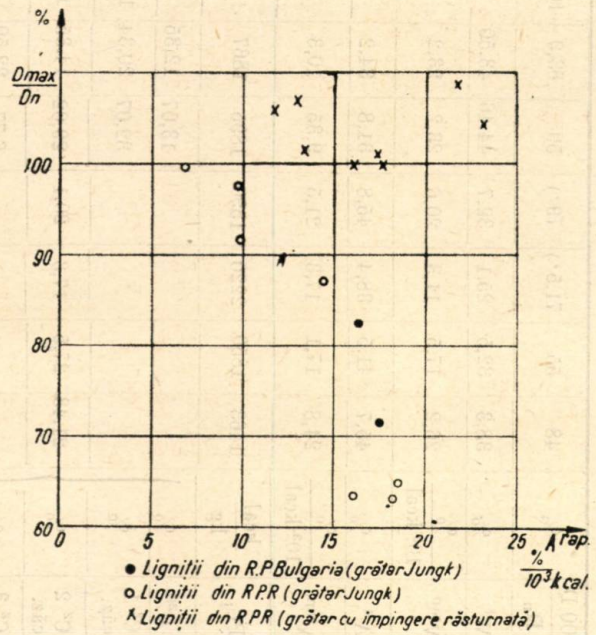


Fig. 6. — Variația debitului maxim raportat $\left(\frac{D\ max}{D_n}\right)$ pentru cazanul (20 t/h) echipat cu grătar Jungk și cazanul (10 t/h) echipat cu grătar cu împingere răsturnată funcție de cenușa raportată a combustibilului folosit.

în cazul sarcinilor maxime realizate, între limitele de 65 – 78% la o variație a cenușii raportate între limitele 12 – 24%/10^3 kcal ; stabilitatea completă a arderii pe acest grătar menținîndu-se pentru lignitii cu un conținut de cenușă raportată de pînă la 30%/10^3 kcal. Ca urmare a gradelor diferite de răscolire

Tabelul 1

Rezultatele obținute la arderea ligniților din R.P.R. pe grătarul Jungk al cazanului de 20 t/h și grătarul cu împingere răsturnată al cazanului 10 t/h

Parametrul-combustibil	Simbol	U/M	LIGNIT ROVINARI							LIGNIT FILIPEȘTII DE PĂDURE				
			Grătar Jungk				Grătar cu împingere răsturnată			Grătar Jungk			Grătar cu împingere răsturnată	
Debitul raportat al cazanului	$\frac{100\ D}{D_n}$	%	48	55	71,5*)	79*)	59	83,9	106,6*)	54	75	83*)	72,2	101*)
Umiditatea totală	W^t	%	38,3	32,5	25,1	32,7	44,46	43,50	42,49	39,6	29,6	39,6	20,07	33,13
Umiditatea raportată	W^{rap}	$\frac{\%}{10^3\ kcal}$	26,2	17,5	11,3	20,6	23,2	23,2	24,2	20,9	20,9	14,7	15,8	19,0
Cenușa (la masa uscată)	A^u	%	45,7	41,5	38,4	45,8	31,8	34,2	38,8	32,8	32,8	40,9	49,7	45,0
Cenușa raportată	A^{rap}	$\frac{\%}{10^3\ kcal}$	24,8	17,1	17,3	21,5	9,35	10,3	12,1	12,1	12,1	16,5	19,2	17,1
Puterea calorifică inf.	PC_i	$\frac{kcal}{kg}$	1463	1850	2220	1590	1895	1867	1755	1900	1900	2010	1833	1749
Nearse zgură	C^{zg}	%					13,07	12,35	9,58				10,31	14,12
Nearse căzătură în zona : Z_1	C^z 1 căz.	%					32,07	20,34	11,38				13,42	27,16
Z_2	C^z 2 căz.	%	21,43	27,5	17,3	20,1	29,02	14,35	10,21	17,6	24,1	22,4	7,82	16,30
Z_3	C^z 3 căz.	%					6,77	22,50	7,99				6,55	7,68
Z_4	C^z 4 căz.	%					4,89	4,54	12,38				4,34	3,08
Nearse în antrenate ciclon (eco) $\frac{\text{după}}{\text{înainte}}$	C^{an}	%	$\frac{8,9}{11,4}$	$\frac{15,1}{12,1}$	$\frac{13,5}{13,4}$	$\frac{9,1}{12,8}$	$\left(\frac{8,70}{7,22}\right)$	$\left(\frac{16,65}{15,47}\right)$	$\left(\frac{24,89}{24,77}\right)$	$\frac{10,1}{11,5}$	$\frac{11,8}{15,3}$	$\frac{10,7}{17,7}$	$\left(\frac{9,90}{6,16}\right)$	$\left(\frac{19,78}{22,24}\right)$

Excesul de aer la coş	α_c	—	2,88	2,78	2,44	2,5	1,96	1,84	1,45	2,49	2,32	2,15	1,98	1,46
Temp. gazelor la coş	t_{ga}	°C	171	174	174	162	165	210	229	170	172	174	195	210
Temp. aerului preîncălzit	t_a	°C	123	126	127	126	0	0	9	120	120	116	0	0
Presiunea aerului sub grătar în zona : Z_1	P^z 1	mm CA					33	44	52				48	64
Z_2	P^z 2	mm CA					33	44	51	18,7	23,6	24	47	65
Z_3	P^z 3	mm CA	12,6	14,8	19,5	—	28	39	45				36	65
Z_4	P^z 4	mm CA					12	13	21				27	51
Pierderi la coş	q_2	%	9,85	9,70	11,6	10,7	13,02	15,38	14,56	15,4	10,9	9,85	13,73	13,95
Pierderi în zgură	q_4^{zg}	%	50,37	47,35	23,48	40,91	9,60	11,75	8,38	18,67	27,81	35,75	8,65	12,06
Pierderi în antrenate	q_4^{an}	%	0,71	1,44	0,80	0,41	0,47	1,09	2,87	0,71	0,38	0,71	0,26	3,87
Pierderi ard. mec. inc.	q_4	%	51,08	48,79	24,28	41,32	13,32	13,59	11,84	19,38	28,25	36,44	9,79	16,82
Pierderi ard. chim. inc.	q_3	%	0	0	0	0	0	0	0,27	0	0	0	0,68	0
Randamentul cazan	η caz	%	37,77	40,21	62,82	46,68	72,66	70,03	72,33	63,92	59,55	52,41	74,80	68,21
Încărcarea termică reală a grătarului	$\frac{B^{PC}i}{F}$	$\frac{10^3 \text{ kcal}}{m^2h}$	218	248	334	342	407	747	925	820	317	355	694	879
Încărcarea termică reală a focarului	$\frac{B^{PC}i}{V}$	$\frac{10^3 \text{ kcal}}{m^3h}$	67,5	77,2	105	106	145	219	270	68,3	98,5	110	202	254
Cifre de vaporizare maximă.	C_v	t/m^2h	—	—	0,39	0,42	—	—	0,96	—	—	0,45	—	0,91

*) Debite maxime ale cazanului.

a stratului, grătarul Jungk realizează, în cazul arderii ligniților din R.P.R., încărcări termice relativ reduse de pînă la 350 000 kcal/m²h față de 925 000 – 1 000 000 kcal/m²h cît realizează grătarul cu împingere răsturnată. Încercările efectuate de a mări grosimea stratului sau viteza grătarului în vederea încărcării termice în cazul grătarului Jungk au condus la reducerea substanțială a stabilității procesului de ardere.

Variația calității combustibilului folosit este de asemenea reflectată în variația debitului maxim realizat de cazanul cu care este echipat grătarul. În figura 5 se prezintă comparativ variația debitului maxim raportat $\left(\frac{D\ \text{max}}{D\ \text{nom}}\right)$ pentru cazanul de 20 t/h echipat cu grătar Jungk și cazanul de 10 t/h echipat cu grătar cu împingere răsturnată funcție de cenușa raportată a combustibilului folosit.

Din analiza figurii 6 se observă o puternică influență a conținutului de cenușă (A^{rap}) asupra debitului maxim raportat în cazul cazanului cu grătar Jungk.

Astfel, pentru un lignit cu un conținut de cenușă raportat cuprins între 5 – 15%/10³ kcal debitul maxim raportat al cazanului variază între limitele 100 – 85%. La o creștere a conținutului de cenușă pînă la 20%/10³ kcal debitul maxim raportat este pînă la 65% și probabil la creșterea conținutului de cenușă peste această valoare debitul maxim raportat scade sub valori de 50% ca urmare a instabilității procesului de ardere.

Comparativ cu acest cazan, la cazanul echipat cu împingere răsturnată debitul maxim raportat se păstrează la valori de peste 100% pentru ligniți cu un conținut de cenușă situat între limitele de 12 – 24%/10³ kcal.

5. CONCLUZII

Rezultatele cercetărilor experimentale de ardere efectuate pe grătarul Jungk permit să se tragă următoarele concluzii :

a) Grătarul Jungk prin concepția sa reprezintă un tip perfecționat de grătar cu împingere superioară combinată cu o mișcare oscilantă și permite astfel menținerea stabilității procesului de ardere chiar în condiții grele.

b) Datorită gradului redus de răscolire pe care îl poate realiza și a posibilităților relativ reduse de variația gradului de răscolire, grătarul este sensibil la variația caracteristicilor combustibilului. Ca atare, acest tip de grătar, după cum s-a arătat prin cercetările efectuate poate să funcționeze tehnic acceptabil cu un lignit care să aibă un conținut de cenușă raportat la masa uscată de pînă la 38% [2] și un conținut de cenușă raportat la maximum 15%/10³ kcal.

c) Grătarul Jungk, comparativ cu grătarul cu împingere răsturnată propus de Institutul de energetică și construit de uzinele Vulcan realizează indici tehnici cu mult mai scăzuți. Astfel, încărcările termice maxime ale grătarului Jungk se plasează în intervalul 340 – 350 000 kcal/m²h față de 900 000 – 1 000 000 kcal/m³h realizate pe grătarul cu împingere răsturnată, și cifra de vaporizare de 0,39 – 0,42 t/m²h față de 0,91 – 0,96 t/m²h la grătarul cu împingere răsturnată. În această situație, la aceleași debite, în condițiile arderii

ligniților, suprafața necesară a grătarului Jungk este aproape de 3 ori mai mare [3].

d) Față de performanțele realizate, grătarul Jungk comparativ cu grătarul cu împingere răsturnată apare indicat la arderea ligniților de calitate superioară ($A^{rap} < 15\%/10^3$ kcal). Soluția dată în țară a grătarului cu împingere răsturnată, pentru cazanele de debite mici : 2 t/h ; 6,5 t/h și 10 t/h este însă soluția care asigură performanțele cele mai ridicate și menținerea acestora la o variație în limite largi a caracteristicilor combustibilului ($A^{rap} = 10 - 24\%/10^3$ kcal).

e) Din punct de vedere constructiv, este indicat să se adopte în limitele posibile, pentru grătarul cu împingere răsturnată o serie de perfecționări adoptate grătarului Jungk, ca : acționarea hidraulică cu emulsie de ulei 15% în loc de ulei pur, înlocuirea pompelor cu roți dințate cu pompe centrifugale, acționarea grătarului cu motoare hidraulice verticale, acționarea grătarului cu cadre.

BIBLIOGRAFIE

1. Vaclav Snid, *Paliva Zakladna pro energo technologicke vyuziti es hnedeho uhli.* Energetika C.S.R., *11*, 558 — 562 (1960).
2. B. Hadjov, J. Jikov, I. Toncev, *Izgariane na ligniti vîglișcia ot Bolșevic i Bistrița vîrhu liuleeșcia scara Jungk.* Protocol N I T I G., Sofia, 1962.
3. N. Pănoiu, I. Carabogdan, G. Singer, *Considerații privind arderea ligniților din R.P.R. pe grătarul cu împingere răsturnată.* St. cerc. energ., seria B, *2*, 143 — 163 (1962).

*** *Silniki turbospalinowe małej mocy* (Turbomotoare cu ardere internă de mică putere), redactat de dr. W. Gundach, Warszawa, 1963, 368 p.

Lucrarea *Silniki turbospalinowe małej mocy* (Turbomotoare cu ardere internă de mică putere), elaborată de un colectiv de autori sub redacţia principală a prof. dr. W. Gundlach, tipărită de Editura de ştiinţă şi tehnică din Varşovia, concentrează preocupările teoretice şi experimentale acumulate în cadrul catedrei de maşini rotative a Politehnicii din Łódź (R. P. Polonia) în domeniul turbomotoarelor cu ardere internă de mică putere.

După ce se prezintă în capitolul I criteriile de clasificare a turbomotoarelor cu ardere internă de mică putere, soluţiile constructive posibile şi domeniile de utilizare, capitolul al II-lea trece în revistă noţiunile de termodinamică şi dinamica gazelor necesare înţelegerii proceselor din maşinile rotative. Se prezintă particularităţile curgerii prin ajutaje divergente şi convergente, modul de determinare a debitului, ecuaţia energiei unui fluid în mişcare relativă, ca şi elementele de bază necesare unei imagini de ansamblu a proceselor din camerele de ardere. O atenţie deosebită este acordată curgerii prin reţelele de palete, stabilirii mărimilor principale care definesc treapta turbinii şi a compresorului, ca şi analizei comparative a ciclurilor termodinamice. În capitolul al III-lea, consacrat compresorului, este studiat de fapt doar compresorul centrifug care, de altfel, domină aproape complet grupa turbomotoarelor de mică putere. Datele prezentate indică o atentă triere a datelor din literatură şi o justă orientare în prezentarea aspectelor specifice compresoarelor de debit mic şi grad de comprimare ridicat. Capitolele al IV-lea şi al V-lea analizează funcţionarea turbinei şi a grupului compresor-turbină, solicitările la care sînt supuse diverse organe, ungerea şi răcirea.

Cercetările efectuate de autori privind camerele de ardere sînt prezentate în capitolul al VI-lea; se constată o atentă preocupare de lămurire a proceselor aerodinamice din camera de ardere, a pulverizării şi formării amestecului în special. După o trecere în revistă a tipurilor de schimbătoare de căldură utilizate şi a materialelor folosite în construcţia turbomotoarelor cu ardere internă, în capitolul al IX-lea, care reprezintă partea principală a lucrării, se analizează critic motoarele existente în exploatare, fabricate în diverse ţări, scoţîndu-se în relief particularităţile lor constructive, caracteristicile şi performanţele realizate, ca şi problemele apărute în timpul exploatării de durată. Peste 60 de titluri bibliografice completează lucrarea, rezultatul unei munci fructuoase în domeniul construcţiei turbomotoarelor cu ardere internă de mică putere.

V. Pimsner

St. cerc. energ. electr. Tom. 14 Nr. 2 p. 461 Bucureşti 1964

Revista „Studii şi cercetări de energetică şi electrotehnică" publică rezultate originale ale cercetărilor din domeniile: energetică generală, electroenergetică şi electrotehnică, termoenergetică şi termotehnică — sub formă de articole comunicări sau note. Revista mai cuprinde şi rubricile: discuţii, recenzii, informaţii şi altele. Temele abordate constituie cele mai recente realizări ştiinţifice şi tehnice.

RECOMANDĂRI PENTRU AUTORI:

1. Structura lucrării

a) *Introducerea* va situa lucrarea pe fondul cunoştinţelor actuale, va desemna obiectivele şi va indica metodele utilizate;

b) *Tratarea* (despărţită pe subcapitole, numerotată după clasificarea zecimală), va preciza premisele, ipotezele, simplificările adoptate şi va discuta rezultatele, erorile, posibilităţile şi comoditatea aplicării deducerilor matematice;

c) *Concluziile* vor sintetiza rezultatele obţinute, limita lor de valabilitate şi aplicaţiile posibile;

d) Bibliografia după standardele în vigoare;

e) Rezumat (fişă) de cinci, şase rînduri.

2. Forma lucrării

a) Lucrările se predau în 4 exemplare dactilografiate la 2 rînduri (2000 semne pe pagină), inclusiv exemplarul original, fără corecturi, intervenţii.

b) Figurile pe calc un exemplar, pe hîrtie ozalid 2 exemplare;

c) La începutul lucrării se trece clasificarea zecimală internaţională;

d) Volumul lucrării circa 15 pagini.

Se primesc numai lucrări originale.

ERATĂ

Pag.	rîndul sau formula	în loc de:	se va citi:
271	1	c 58 400	c: — 58 400
288	(7)	z_{01} z_{01} 0	z_{01} 0
303	14 de jos	... analizate nu este ...	... analizate ce nu este ...
378	14	tranzistorilor (24 V)	tuburilor
455	Fig. 6	○ ●	● ○

St. cerc. energ. electr. Tom. 14, Nr. 2, 1964

1965 JUL 9

LUCRĂRI APĂRUTE ÎN EDITURA ACADEMIEI R.P.R.

CĂLIN ADRIAN VASILESCU, PERICLE SVORONOS şi VICTOR PIMSNER, *Exploatarea raţională a gazelor naturale*, 367 p. + 7 pl., 26,40 lei.

GH. CARTIANU, *Modulaţia de frecvenţă* (în limba rusă), 579 p. + 7 pl., 39,10 lei.

TRAIAN SĂLĂGEAN, *Fenomene fizice şi metalurgice la sudarea cu arcul electric a oţelurilor*, 219 p., 12,10 lei.

A. MORARU, *Amplidina (maşina electrică amplificatoare de curent continuu cu cîmp transversal)*, 328 p. + 2 pl., 14,90 lei.

D. DAMSKER, *Principii şi mijloace noi de automatizare a acţionărilor electrice*, 439 p., 24,50 lei.

T. OROVEANU, *Scurgerea fluidelor prin medii poroase neomogene*, 329 p., 16,30 lei.

V. N. CONSTANTINESCU, *Lubrificaţia cu gaze*, 635 p., 31 lei.

N. TIPEI, V. N. CONSTANTINESCU, AL. NICA şi O. BIŢĂ, *Lagăre cu alunecare (calcul, proiectare, ungere)*, 436 p., 23,70 lei.

A. BELEŞ şi MIRCEA SOARE, *Paraboloidul eliptic şi hiperbolic în construcţii*, 623 p. + 2pl., 33 lei.

M. SOARE, *Application des équations aux différences finies au calcul des coques*, 460 p. + 8 pl., 33,80 lei.

* * * *Tehnica nucleară în sprijinul producţiei. Unele realizări ale Institutului de fizică atomică al Academiei R.P.R.*, 253 p. + 1 pl., 14,30 lei.

* * * *Sesiunea ştiinţifică jubiliară a Institutului de mecanică aplicată „Traian Vuia" al Academiei R.P.R.*, 445 p. + 1 pl., 23,30 lei.

VASILE MARCU, *Metalizarea prin pulverizare*, 340 p., 21 lei.

SUZANA GÎDEA, M. PROTOPOPESCU, D. DRIMER, *Metalurgia fizică a semiconductorilor*, 501 p. + 4 pl., 31 lei.

I. P. „Informaţia" — c. 1778

43 821

Lei 18

F1736

R

STUDII ŞI CERCETĂRI DE ENERGETICĂ ŞI ELECTROTEHNICĂ

3

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMINE
St. cerc. energ. electr. Tom 14 Nr. 3 p. 463—724 Bucureşti 1964

COMITETUL DE REDACȚIE

Acad. REMUS RĂDULEȚ — *redactor responsabil* ;
Prof. G. BĂRĂNESCU, membru corespondent al Academiei R.P.R. — *redactor responsabil adjunct* ;
Acad. A. AVRAMESCU ;
Prof. M. MARINESCU, membru corespondent al Academiei R.P.R. ;
V. M. POPOV, membru corespondent al Academiei R.P.R. ;
Prof. C. ARAMĂ, membru corespondent al Academiei R.P.R. ;
Prof. T. IONESCU, membru corespondent al Academiei R.P.R. ;
Prof. ȘT. GHEORGHIU ;
Ing. C. APETREI ;
Ing. CS. NAGY ;
Ing. V. PIMSNER ;
Ing. C. A. VASILESCU ;
Ing. ECATERINA ARIE — *secretar de redacție*.

Prețul unui abonament este de 72 lei pe an.

Pentru a se asigura colecția completă și primirea la timp a revistei, reînnoiți abonamentul dv. pe anul 1965.

În țară abonamentele se primesc la oficiile poștale, agențiile poștale, factorii poștali și difuzorii de presă din întreprinderi și instituții.

Comenzile de abonamente din străinătate se primesc la CARTIMEX, București, Căsuța poștală 134 — 135 sau la reprezentanții săi din străinătate.

Manuscrisele, cărțile și revistele pentru schimb, precum și orice altă corespondență se trimit la Comitetul de redacție pe adresa :

BUCUREȘTI, Șos. Vitan nr. 236.

Revista apare de 4 ori pe an.

F 1736

T. MICLESCU, A. PAP, I. NICULESCU, S. IORDACHE

620.92 : 336.12

Aspecte ale întocmirii modelului matematic al bilanțului energetic general

Articolul expune aspecte particulare ale întocmirii modelului matematic al bilanțului energetic general, aspecte ivite în cursul lucrărilor pentru optimizarea bilanțului energetic general al anului 1961.

St. cerc. energ. electr., Tom. 14, 1964, Nr. 3, p. 469

R. RĂDULET, C. I. MOCANU

621.3 : 621.365.52

Calculul exact al factorului de formă al rezistenței echivalente a șarjei cuptoarelor de inducție fără fier pe baza barei model

Calculul puterii absorbite pe unitatea de înălțime de șarjă a cuptoarelor de inducție fără fier, efectuat în ipoteza că șarja ar avea înălțimea infinită și ar fi situată într-un cîmp magnetic alternativ inițial omogen și axial produs de bobina inductoare, conduce la valori mult prea mari față de cele reale. Acest calcul se corectează cu un factor de formă care în cazul refulării nete a curentului indus în șarjă depinde numai de raportul dintre înălțimea și diametrul șarjei.

În această lucrare, pe baza modelului de reprezentare a șarjei printr-o bară dreptunghiulară avînd înălțimea paralelă cu liniile inducției magnetice, se calculează factorul de formă și se compară cu alte expresii ale acestui factor, determinate pe baza altor modele de reprezentare a șarjei.

St. cerc. energ. electr., Tom. 14, 1964, Nr. 3, p. 485

C. I. MOCANU

621.3 : 537.311.5 : 537.311.6

Calculul rezistenței în alternativ a barelor cu secțiune poligonală la refulare netă a curentului electric

Calculul rezistențelor în alternativ al barelor drepte la orice frecvență a curentului electric prin bare este efectuat numai în cîteva cazuri : cilindru, tub, placă infinită fără efect de margine etc. Pentru barele cu secțiune poligonală, la efect pelicular net s-a reușit să se calculeze exact numai rezistența barelor cu secțiune dreptunghiulară.

În lucrare, folosind transformarea conformă pe exteriorul unui cerc se calculează factieul în alternativ k_R ca raport între rezistența în alternativ și rezistența în curent continuu, pentru barele cu secțiune poligonală obținîndu-se expresii strînse pentru secțiunile poligonal regulate. Factorul în alternativ al barei cu secțiune dreptunghiulară rezultă prin particularizarea expresiei care a fost calculată pentru o secțiune poligonală oarecare.

St. cerc. energ. electr., Tom. 14, 1964, Nr. 3, p. 501

STUDII ŞI CERCETĂRI
DE
ENERGETICĂ
ŞI
ELECTROTEHNICĂ

Tomul 14, nr. 3 1964

SUMAR

Pag.

Editorial 465

Energetică generală

T. MICLESCU, A. PAP, I. NICULESCU şi S. IORDACHE, Aspecte ale întocmirii modelului matematic al bilanţului energetic general . . . 469

Electroenergetică şi electrotehnică

R. RĂDULEŢ şi C. I. MOCANU, Calculul exact al factorului de formă al rezistenţei echivalente a şarjei cuptoarelor de inducţie fără fier pe baza barei model 485

C. I. MOCANU, Calculul rezistenţei în alternativ a barelor cu secţiune poligonală la refulare netă a curentului electric 501

C. V. BĂLĂ şi C. APETREI, Reducerea forţelor electrodinamice de scurtcircuit la transformatoarele cu înfăşurări cilindrice stratificate 521

MATEI MARINESCU, Asupra unui proces de transformare a energiei electrice de înaltă frecvenţă în lucru mecanic de joasă frecvenţă. Perspective pentru dezvoltarea a noi tipuri de motoare electrice 533

AUGUSTIN MORARU, Asupra legii de variaţie a întrefierului maşinii sincrone cu poli aparenţi 539

A. C. NICOLAIDE, Contribuţii la studiul încălzirii rotoarelor masive ale maşinilor sincrone la pornire în asincron 549

H. CRISTEA, Folosirea coeficienţilor de repartiţie la determinarea influenţei structurii reţelei electrice asupra repartiţiei optime a puterilor 565

I. ADĂMUŢ şi M. PETCU, Rezultate privind măsurarea curenţilor de conducţie la izolatoare contaminate în condiţii naturale 579

Termoenergetică şi termotehnică

D. GRECOV şi I. IORDACHE, Gradul de negreală al flăcărilor autocarburate 595

N. PĂNOIU, I. CARABOGDAN, G. SINGER şi C. CRĂCIUNEANU, Interdependenţa parametrilor geometrici şi funcţionali la modelarea izotermică monofazică a focarului ciclon orizontal 609

I. CSERVENY şi D. GRECOV, Cicluri mixte gaz-abur cu reacţii endotermice 629
CĂLIN ADRIAN VASILESCU şi VICTOR PIMSNER, Cifra caracteristică a sarcinii termice la motoarele cu aprindere prin compresiune supraalimentate 639
B. GRÜNWALD, Cercetarea procesului de ardere din motorul cu aprindere prin scînteie cu considerarea adîncimii zonei de ardere din flacăra turbulentă 653
I. CSERVENY, Asupra posibilităţilor de aplicare a turbinelor de trecere în centrale termoelectrice 665

Note

AUGUSTIN MORARU, Cîmpul dintre două armături cilindrice cu axele paralele 683
VICTOR V. GHIA şi EUGEN V. FERCALĂ, Studiul influenţei momentului cantităţii de mişcare a aerului asupra unghiului de pulverizare la arzătoarele turbionare 691
N. ANTONESCU, Posibilităţi de generalizare a formulelor de calcul pentru viteza de ardere în curent turbulent 705
IOAN VLĂDEA şi ZENO ARDELEAN, Camera de amestec a ejectoarelor 713

ST. CERC. ENERG. ELECTR. TOM 14 Nr. 3 p. 463–723 BUCUREŞTI 1964

EDITORIAL

O dată cu crearea Institutului de energetică al Academiei R.P.R. şi cu dezvoltarea cercetărilor în acest institut, s-a simţit nevoia unui organ periodic care să cuprindă în paginile sale articole de înalt nivel, publicate de cercetătorii institutului ca rezultat al cercetărilor efectuate.

Astfel a luat naştere, în 1951, revista „Studii şi cercetări de energetică" (în prezent „Studii şi cercetări de energetică şi electrotehnică"), despre care se poate spune că reflectă istoria dezvoltării planice a cercetărilor efectuate în aceste domenii, la noi în ţară şi contribuţia adusă de cercetătorii noştri la dezvoltarea acestor discipline pe plan mondial.

Revista a militat continuu pentru propagarea unei concepţii energetice unitare şi ştiinţifice. Această tendinţă s-a accentuat o dată cu adăugarea în 1955 a rubricii de energetică generală, care, prin tratarea în ansamblu a diferitelor forme ale energiei şi prin fundamentarea economică a soluţiilor energetice optime, a pus la dispoziţia cercetătorilor din ramurile speciale ale energeticii (termoenergetică, hidroenergetică, electroenergetică etc.) metodica pentru a ţine seama de conexiunile energetice şi tehnologice ale problemelor specifice tratate.

Astfel, primele contribuţii privind *analiza consumului specific de energie* au condus la elaborarea unei metodici sistematice şi corespunzătoare condiţiilor specifice ţării noastre.

Publicaţiile privind *metodica inventarierii resurselor energetice* atît de variate ale patriei noastre au stat la baza întocmirii *Atlasului resurselor energetice ale R.P.R.*

În domeniul *prognozei necesarului de energie primară, electrică şi a curbelor de sarcină*, se menţionează contribuţiile privind aplicarea pe scară largă şi fundamentarea economică a utilizării statisticii matematice şi a calculului probabilităţii în prognoza necesarului de energie, studiile legate de precizia prognozelor, modelarea matematică a prognozei necesarului de energie primară pornind de la caracterul limitat a resurselor primare.

Studiile publicate în legătură cu *optimizarea bilanţului energetic de perspectivă* cu ajutorul programării matematice şi al maşinilor electronice numerice de calcul reprezintă o contribuţie principală în problema

atît de importantă, dar şi complexă, a bilanţului energetic de perspectivă. Legat de această problemă s-au publicat şi studii referitoare la problemele tehnico-economice ale transportului de combustibili şi de energie electrică şi ale diferitelor ramuri consumatoare de energie (agricultura, sectorul casnic etc.).

Din aceeaşi categorie de probleme face parte şi *optimizarea structurii sistemului electroenergetic*, pentru pregătirea căreia s-au publicat studii privind stabilirea diferitelor caracteristici ale sistemului, metodica stabilirii rezervei de putere necesare, daunele economice cauzate prin întreruperea alimentării cu energie electrică a consumatorilor şi a variaţiilor de tensiune în sistem, articole care au găsit un viu interes şi pe plan internaţional.

În domeniul funcţionării *sistemelor electroenergetice*, studiile privind apariţia supratensiunilor prelungite la punerea la pămînt a unei faze conduc la elaborarea unei noi teorii prin care acest fenomen este explicat ca fiind datorit unui efect de rezonanţă. În problemele legate de *stabilitatea statică şi dinamică* a reţelelor, cercetările expuse într-o serie de articole aduc o contribuţie de prim ordin la crearea de noi metode de analiză (analiza nodală), metode a căror difuzare a permis aplicaţia lor în exploatare. Nu mai puţin importante sînt cercetările privind *reglajul frecvenţă-putere* şi influenţa asupra stabilităţii reţelelor, *optimizarea repartiţiei* sarcinilor, regimurile tranzitorii ale maşinilor sincrone, aplicarea metodelor statistice în studiul caracteristicilor sistemelor electroenergetice etc.

În domeniul tensiunilor înalte, problemele de supratensiuni la declanşarea liniilor în gol, de coordonare a izolaţiei, studiile privind caracteristicile izolatoarelor fabricate în R.P.R. contribuie la lămurirea multor probleme pe care dezvoltarea reţelelor noastre electroenergetice le pune exploatării acestora.

În domeniul transformatoarelor de mare putere, găsim în primii ani ai apariţiei revistei ansamblul lucrărilor în care se pun bazele unei noi metode pentru calculul forţelor axiale la aceste transformatoare, lucrări care au adus un sprijin important la proiectarea şi la construcţia transformatoarelor de mare putere produse de industria noastră electrotehnică.

În problemele legate de construcţia maşinilor electrice, găsim studii asupra optimului tehnico-economic al dimensionării acestora cu rezultate originale pentru calcul şi proiectare. Grupul de lucrări privind cercetările asupra maşinilor speciale cu inductanţă variabilă sînt ilustrate prin numeroase articole care adîncesc teoria acestor maşini, ducînd la realizarea de noi tipuri de motoare electrice cu mişcare alternativă, cu aplicaţie la acţionarea pompelor cu piston şi a generatoarelor sonice. De asemenea, printr-o serie de articole se pun, pentru prima oară în ţară, bazele proiectării şi construcţiei amplidinei, a amplificatorilor magnetici, a selsinurilor, a sistemelor automate de reglaj, a acţionărilor electrice în industria petrolieră ş.a.

Tot în paginile revistei a văzut pentru prima oară lumina tiparului grupul de lucrări privind noi criterii de stabilitate a sistemelor neliniare,

lucrări care aduc o contribuție de prim ordin la probleme de mare importanță teoretică, privind teoria sistemelor de reglare automată, precum și lucrările de electrotehnică teoretică, care adîncesc prin cercetări fundamentale bazele pe care se sprijină metodele, teoriile și aplicațiile din sectoarele sus-amintite. La aceste studii a adus o contribuție valoroasă și Catedra de electrotehnică a Institutului politehnic din București. Lucrări originale cu caracter fundamental au fost publicate în legătură cu teoria generală a mărimilor electromagnetice și a cîmpului electromagnetic, cu calculul de noi cîmpuri electromagnetice și al curentului electric în conductoare masive din mașini, aparate și dispozitive electrice, cum și cu studiul circuitelor și rețelelor electrice.

Pe măsura adîncirii cercetărilor și cuprinderii a noi aspecte legate de complexitatea problemelor abordate, a căror rezolvare necesită un aparat matematic mai complicat, găsim în paginile apărute în ultimii ani ai revistei articole care privesc cotitura în metodele de analiză și calcul legată de aplicarea metodelor analogice și numerice de calcul, cu ajutorul mașinilor analogice construite în Institutul de energetică și al mașinilor numerice ale Institutului de fizică atomică al Academiei R.P.R.

Pentru a putea realiza o exploatare rațională a resurselor energetice ale țării noastre, încă din primele numere ale revistei au fost expuse bazele științifice ale unor preocupări importante ale Institutului de energetică : *Utilizarea energetică a presiunii gazelor naturale* și *Problema termificării în cadrul economiei energetice* de cercetare, rezolvate în anii următori cu mare eficiență pentru economia noastră națională.

În continuare, în decursul anilor, revista a oglindit activitatea de cercetare în problemele : *Arderea și instalații de ardere pentru lignitii din țara noastră*, insistînd asupra particularităților de ardere a lignitilor și metodelor de obținere a stabilității arderii ; *Organizarea procesului de ardere și recuperare a căldurii la cuptoare*, cu tratarea teoretic experimentală a proceselor termice specifice ; *Cazanul Vuia IE*, reflectînd întregul proces de cercetare științifică — experimentală care a dus la realizarea în decurs de 4 ani a cazanelor industriale Vuia etc.

Revista a oglindit în cuprinsul ei și preocupările teoretice de lărgire a bazelor termodinamicii prin articolele consacrate studiului parametrilor termodinamici, proceselor de lucru al fluidelor, analizei dimensionlă în transmisiunea căldurii. În procesul de ridicare continuă a nivelului cercetării termoenergetice apare și în conținutul articolelor revistei o orientare continuu mai pregnantă spre analiza fenomenelor fizice și a generalizării rezultatelor. Astfel, în ultimii ani au apărut articole privind analiza procesului de ardere a combustibililor, precum și articole privind analiza teoretică a funcționării mașinilor rotative.

În afara rezultatelor de cercetare, revista a publicat lucrări de analiză a orientării în anumite domenii termoenergetice, ca, de exemplu, contribuția la stabilirea unei politici în exploatarea gazelor naturale și în utilizarea lignitilor.

Contribuții fundamentale publicate în domeniul combustibililor solizi, privind studiul clasificării cărbunilor romînești, studiul structurii chimice

al cărbunilor din Valea Jiului prin spectre infraroşii, studiul privind petrografia huilelor din R.P.R., au condus la o mai bună cunoaştere a însuşirilor cărbunilor de la noi din ţară şi la elaborarea unei clasificări originale a acestora.

Printre studiile cu aspect tehnic-ştiinţific şi tehnologic, importante pentru economia naţională, sînt de menţionat lucrările privind îmbogăţirea şi valorificarea prin gazificare şi brichetare a ligniţilor.

Rezultatele unor cercetări cu un obiectiv de cea mai mare importanţă economică au fost publicate în legătură cu cocsul metalurgic. Printre acestea sînt de menţionat lucrările privind ameliorarea şi desulfurarea cocsului metalurgic produs din cărbuni de Valea Jiului, precum şi importanta problemă a fabricării cocsului metalurgic din cărbuni energetici necocsificabili. Pe baza rezultatelor obţinute în urma acestor cercetări s-a elaborat un procedeu original de producere a cocsului metalurgic din cărbuni energetici din R.P.R., procedeu în curs de experimentare în faza semiindustrială.

★

Scurtul bilanţ al revistei noastre demonstrează, alături de multe alte fapte, condiţiile deosebit de favorabile create în ţara noastră pentru cercetarea ştiinţifică în cei 20 de ani care s-au scurs de la eliberarea de sub jugul fascist, precum şi străduinţile oamenilor de ştiinţă romîni din domeniul energeticii pentru a contribui în măsură cît mai mare la ridicarea eficacităţii economice şi a prestigiului internaţional al cercetărilor lor.

ASPECTE ALE ÎNTOCMIRII MODELULUI MATEMATIC AL BILANȚULUI ENERGETIC GENERAL

DE

T. MICLESCU, A. PAP, I. NICULESCU şi S. IORDACHE

620.92 : 336.12

Articolul expune aspecte particulare ale întocmirii modelului matematic al bilanțului energetic general, aspecte ivite în cursul lucrărilor pentru optimizarea bilanțului energetic general al anului 1961.

1. *Introducere.* În lucrările publicate anterior [1], [2], [3], [4], a fost prezentată metoda de determinare a bilanțului energetic general de perspectivă optim. Cum s-a mai arătat, o primă aplicare a acestei metode o constituie elaborarea unui plan optim de aprovizionare cu combustibil și energie pentru un an imediat următor. O aplicare directă a metodei nu permite însă determinarea efectului economic realizat, deoarece s-ar aplica însuși programul optim. Pentru a stabili care este efectul economic al optimizării bilanțului energetic general pentru un an imediat următor și pentru a avea posibilitatea de a analiza soluția optimă prin comparație cu cea reală, s-a făcut cu titlu experimental optimizarea bilanțului energetic general al unui an trecut, anul 1961. Corespunzător acestui an a fost strînsă o cantitate mare de informații privind sursele de energie, instalațiile de producere, transport și transformare a energiei, consumatorii de energie, precum și *soluția reală a modelului matematic al bilanțului energetic general.*

ST. CERC. ENERG. ELECTR. TOM 14 Nr. 3 p. 469—483 BUCUREȘTI 1964

Modelul matematic al bilanţului energetic general corespunzător sistemului energetic general [1]) în funcţiune în 1961 este format din 6 sisteme de relaţii liniare (egalităţi şi inegalităţi) independente între ele, primele 5 avînd de la 10 relaţii cu 16 variabile la 16 relaţii cu 28 de variabile, iar a şasea 252 de relaţii cu 950 de variabile. Modelul matematic al bilanţului energetic general a fost stabilit numai pentru acele părţi ale sistemului energetic general a căror funcţionare este optimizabilă în sensul arătat în lucrările precedente, introducîndu-se anumite simplificări şi limitări admisibile.

Dezvoltînd cele de mai sus, în prezentul articol se expun aspecte particulare ale *întocmirii* modelului matematic al bilanţului energetic general, aspecte ivite în cursul lucrărilor pentru optimizarea bilanţului energetic general al anului 1961.

2. *Sisteme optimizabile.* Se va arăta în primul rînd care părţi ale sistemului energetic general sînt optimizabile din punctul de vedere al funcţionării, în sensul arătat în lucrările precedente. Bilanţul energetic general se poate optimiza, din punctul de vedere al cheltuielilor anuale, pe două căi: în primul rînd prin aprovizionarea consumatorilor cu un *anumit* combustibil, astfel încît cheltuielile de transport de la sursă la consumator să fie cît mai mici, şi, în al doilea rînd, prin schimbarea combustibililor folosiţi de instalaţiile cu posibilităţi de interşanjabilitate a combustibililor, cînd cheltuielile scad atît datorită unui transport mai convenabil, cît şi folosirii combustibililor ţinînd seama de caracteristicile tehnico-economice respective ale fiecărei instalaţii (în continuare ne vom referi la optimizare numai din aceste două puncte de vedere).

Din punctul de vedere al optimizării, consumatorii se împart în următoarele categorii [2]):

a) consumatori care pot consuma doar un singur fel de combustibil, produs de o singură sursă de combustibil, sau se pot alimenta doar de la o sursă de energie;

---

[1]) Prin sistem energetic general se înţelege totalitatea instalaţiilor servind la extracţia, transportul, distribuţia şi utilizarea tuturor purtătorilor de energie şi formelor de energie. Sistemul energetic general este format din sistemele termoenergetic, electroenergetic, hidroenergetic şi sistemul de producere, ameliorare, transport şi utilizare a combustibililor. Bilanţul energetic general conţine sumele cantităţilor de energie şi căldură care au circulat într-o anumită perioadă de timp prin instalaţiile sistemului energetic general.

De aceea, din punct de vedere al exprimării, optimizarea bilanţului energetic general este identică cu optimizarea funcţionării sistemului energetic general pentru o perioadă de timp dată.

[M. Bercovici, C. Dinculescu, T. Miclescu, A. Pap, *Reducerea consumului de energie primară şi a cheltuielilor, prin optimizarea bilanţului energetic general.* Comunicare pentru sesiunea parţială a Conferinţei Mondiale a Energiei cu tema „Lupta contra pierderilor în energetică" (Lausanne — septembrie 1964)].

[2]) T. Miclescu, Al. Pap, S. Iordache, I. Niculescu, *Culegerea datelor în vederea determinării bilanţului energetic general optim al anului 1961.* Institutul de energetică, referat, 1962.

b) consumatori care pot consuma mai multe feluri de combustibil interschimbabile, alimentîndu-se din mai multe surse de la care mai pot fi alimentați și consumatori care utilizează un singur fel de combustibil;

c) consumatori care pot consuma doar un singur fel de combustibil și se alimentează de la mai multe surse care pot alimenta și consumatori din categoria *b*;

d) consumatori care pot consuma doar un singur fel de combustibil și se alimentează de la mai multe surse de combustibil care nu alimentează și consumatori din categoria *b*.

Consumatorii din categoria *a*, împreună cu sursa care îi alimentează și cu instalațiile de pe lanțul sursă-consumator, formează părți de sistem independente cu o singură funcționare posibilă, deci neoptimizabile. Asemenea părți de sistem nu au fost deci cuprinse în modelul matematic. Un exemplu îl constituie consumatorii de antracit cu unică sursă: minele Întreprinderii Miniere Rovinari. Această grupă de consumatori nu mai intervine în considerațiile ce urmează.

Consumatorii din categoriile *b* și *c*, împreună cu sursele care îi alimentează și lanțurile energetice care leagă aceste surse de consumatori, reprezintă părți ale sistemului energetic general funcționînd dependent și optimizabile. Asemenea consumatori sînt consumatorii de păcură, combustibil solid de diferite sorturi și gaz natural. Modelul matematic al acestei părți a sistemului energetic general este compus din 252 de relații cu 950 de variabile.

Consumatorii din categoria *d*, împreună cu sursele care îi alimentează și cu lanțurile energetice de legătură, formează părți ale sistemului energetic general funcționînd independent, dar optimizabile fiecare în parte. Numărul lor este acela al felurilor de combustibil. Asemenea consumatori sînt motoarele cu ardere internă, consumatoare de benzină. A fost întocmit modelul matematic pentru cinci asemenea părți ale sistemului energetic general, obținîndu-se cinci sisteme de relații liniare, avînd de la 10 relații cu 16 variabile la 16 relații cu 28 de variabile.

3. *Optimizarea.* Considerînd sistemul energetic general ca fiind format din sistemele parțiale de producere, prelucrare, transport și utilizare a combustibilului, sistemul termoenergetic și sistemul electroenergetic, să arătăm ce porțiuni din aceste sisteme, în cazul sistemelor optimizabile, au fost cuprinse în modelul matematic al bilanțului energetic general pentru a fi supuse optimizării. Aceste limitări în cuprinderea în întregime a sistemelor energetice optimizabile sînt, în general, determinate nu de motive metodice, ci de lipsa datelor corespunzătoare.

Pentru sistemele de producere, prelucrare, transport și utilizare a combustibililor, ca energie inițială s-a considerat energia conținută de combustibili după operațiile de extracție, preparare și înnobilare. Ca energie finală s-a considerat energia conținută de combustibili la livrarea lor către consumatori, în cazul consumatorilor industriali și casnici, sau

căldura primită de cazanele locomotivelor, în cazul tracţiunii cu abur. Deci lanţurile energetice din aceste sisteme nu cuprind instalaţiile de extracţie, preparare, înnobilare şi toate instalaţiile utilizatoare. Pentru sistemele ce cuprind consumatori din categoriile *b* şi *c*, energiei iniţiale îi corespund cheltuielile făcute în instalaţiile de extracţie, preparare şi înnobilare a combustibilului. Pentru sistemele ce cuprind consumatori de categoria *d*, cheltuielile făcute pentru producerea energiei iniţiale, precum şi cele din instalaţiile utilizatoare, nu interesează din punctul de vedere al optimizării dacă întreaga energie produsă este şi consumată, singurele cheltuieli care se optimizează fiind cheltuielile de transport. În acest ultim caz, limitarea la cheltuielile de transport are un caracter metodic.

Pentru sistemul termoenergetic ca energie iniţială s-a considerat energia conţinută de combustibili la livrarea lor instalaţiilor de producere a căldurii, iar ca energie finală căldura produsă de aceste instalaţii. În continuare, vorbind despre sistemul termoenergetic, ne vom referi la lanţurile energetice care cuprind atît instalaţiile acestui sistem, cît şi instalaţiile de producere, prelucrare şi transport a combustibililor folosiţi în sistemul termoenergetic.

Pentru sistemul electroenergetic, energia iniţială este energia conţinută de combustibili la livrarea lor către centralele electrice. Ca energie finală s-a adoptat energia electrică livrată de centralele electrice sistemului electroenergetic. Această cantitate de energie variază după graficul de sarcină al centralelor şi după modul în care se face transportul energiei electrice. Deoarece în cazul considerat optimizarea s-a întins numai asupra funcţionării centralelor electrice şi nu şi a transportului energiei electrice, valoarea pierderilor de energie la transport s-a considerat constantă şi egală cu pierderile reale din perioada considerată. Fiind cunoscută valoarea energiei electrice consumate, s-a putut determina valoarea energiei electrice livrate sistemului de centralele electrice. Ca şi în cazul sistemului termoenergetic, în continuare, tratînd despre sistemul electroenergetic, vom considera în întregime lanţurile energetice de producere a energiei electrice, adică inclusiv instalaţiile de producere, prelucrare şi transport a combustibililor folosiţi în centralele electrice. Aceasta deoarece atît lanţurile energetice de producere a căldurii, cît şi cele de producere a energiei electrice cuprind instalaţii care fac parte atît din sistemele de producere, prelucrare şi transport a combustibililor, cît şi din sistemele termoenergetice respectiv electroenergetice.

4. *Sursele.* Din energia primară totală produsă în 1961, numai 50,0% este optimizabilă în sensul arătat în § 2, alimentînd consumatori din categoriile *b*, *c* şi *d*. Restul de 50,0% este dat de combustibili a căror repartiţie este unică, cum sînt : benzină de avion, huilă de Valea Jiului spălată pentru cocs şi semicocs, huilă de Banat spălată pentru cocs şi semicocs, antracit de Rovinari, gaze naturale pentru consumatori industriali şi casnici care nu au posibilităţi de a consuma şi alţi combustibili şi care au o singură cale de alimentare.

Din energia primară totală optimizabilă a fost supusă optimizării 98,0%, corespunzînd la 34 de surse-sorturi [3]), și anume:

Tabela 1

Sort	Sursă
1	2
1. Gaze naturale	Bazinul Transilvaniei
2. Gaze naturale	Regiunea Oltenia
3. Benzină auto	Rafinării din regiunea Ploiești
4. Petrol	
5. Motorină	
6. Combustibil pentru calorifer	
7. Gaze lichefiate	
8. Păcură	
9. Benzină auto	Rafinăriile din regiunea Bacău
10. Petrol	
11. Motorină	
12. Combustibil pentru calorifer	
13. Gaze lichefiate	
14. Păcură	—
15. Huilă spălată normal	C. C. Valea Jiului
16. Huilă mixte și șlam	C. C. Valea Jiului
17. Lignit 30—350	T. M. Muntenia
18. Lignit 30—350	T. M. Ardealul
19. Lignit 0—700	T. M. Muntenia
20. Lignit 30—350	I. M. Cîmpulung
21. Lignit 0—30	T. M. Ardealul
22. Lignit 0—30	T. M. Muntenia
23. Huilă triat-sortat	C. C. Valea Jiului
24. Cărbune brun 16—300	I. M. Comănești
25. Lignit 30—350	I. M. Căpeni
26. Lignit 0—30	I. M. Cîmpulung
27. Lignit 0—80	I. M. Rovinari
28. Lignit 0—700	I. M. Rovinari
29. Cărbune brun 0—300	I. M. Tebea
30. Lignit 80—350	I. M. Rovinari
31. Huilă mixte și șlam	T. M. Banat (Cozla)
32. Huilă mixte și șlam	T. M. Banat (Anina)
33. Huilă sortată	T. M. Banat
34. Brichete	C. C. Valea Jiului

5. *Consumatorii industriali și casnici.* Deoarece în modelul matematic al bilanțului energetic general intervin mărimile flux de energie livrată[4]), randament și cheltuieli specifice, care se referă la lanțurile luate în întregime, în continuare se vor prezenta relațiile modelului matematic grupînd lanțurile energetice după categoriile de consumatori.

---

[3]) Prin sursă-sort se înțelege un anumit sort de combustibil dintr-o anumită sursă.

[4]) Fluxul de energie livrată este fluxul de energie care alimentează ultimul consumator al lanțului energetic.

Vom începe cu tratarea consumatorilor industriali şi casnici. Conform împărţirii de la punctul 2, aceştia îi considerăm făcînd parte din categoriile *c* şi *d*.

Nu apar consumatori industriali şi casnici în categoria *b*, deoarece din datele disponibile nu au putut fi determinate posibilităţile lor de interşanjabilitate a combustibililor. S-a admis deci că aceşti consumatori pot consuma numai acel fel de combustibil pe care efectiv l-au consumat, introducînd astfel o limitare a optimizării (suboptimizare).

5.1. Consumatorii industriali şi casnici din categoria *d* sînt consumatorii de motorină, benzină, petrol, gaze lichefiate şi combustibil special pentru calorifer. Corespunzător fiecărui combustibil menţionat avem cîte un model matematic independent, de forma

$$\left.\begin{array}{c} \cdots\cdots \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = W_j \\ \cdots\cdots \end{array}\right\} m, \tag{1}$$

$$\left.\begin{array}{c} \cdots\cdots \\ \sum_{j=1}^{m} x_{ij} = R_i \\ \cdots\cdots \end{array}\right\} n, \tag{2}$$

unde

x este volumul fluxului energetic livrat;
W — volumul consumului de energie;
R — volumul resursei de energie;
i,j — indici referindu-se la sursa de energie, respectiv la consumator;
m — numărul consumatorilor;
n — numărul surselor de energie.

Funcţia de optimizat este

$$A = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\, x_{ij},$$

a_{ij} fiind cheltuielile specifice lei/Gcal. Cum s-a arătat la punctul 3, a_{ij} conţine numai cheltuielile pentru transportul unei Gcal de la sursa i la consumatorul j. Asupra modului de determinare a mărimii a_{ij} vom reveni mai departe.

O problemă importantă o constituie stabilirea consumatorilor echivalenţi şi a surselor echivalente. Numărul consumatorilor este foarte mare şi însăşi delimitarea *unui* consumator este convenţională, deoarece şi o întreagă întreprindere, şi o secţie a acesteia pot fi considerate ca *un* consumator. Pe de altă parte, numărul mare ale consumatorilor trataţi individual conduce la un număr ridicat de relaţii ale modelului mate-

matic, ceea ce îngreuiază rezolvarea practică a problemei. Se va face, așadar, o astfel de grupare a consumatorilor, încît optimizarea, așa cum s-a arătat la punctul 2, să nu-și piardă sensul, și anume : vor fi grupați într-un consumator echivalent consumatorii amplasați la distanțe mici unul de altul, avînd deci aceleași cheltuieli de transport a combustibilului de la sursă la consumator, cu aceleași posibilități de interșanjabilitate a combustibilor și avînd aceleași randamente și cheltuieli specifice la folosirea diferiților combustibili în instalațiile utilizatoare.

Pentru combustibilii lichizi, datele existente au permis stabilirea consumurilor de diverși combustibili pentru cele opt baze de desfacere în care este împărțit teritoriul țării. În acest caz, consumatorul echivalent are un consum egal cu suma consumurilor de un anume tip dintr-o bază de desfacere (W_j). Din definiția consumatorului echivalent rezultă că amplasamentul său fictiv în interiorul bazei trebuie astfel ales, încît cheltuielile de transport să fie egale cu suma cheltuielilor făcute la transportul combustibililor de la sursă la consumatorii dispersați pe suprafața bazei de desfacere. Deci pentru consumatorul echivalent din baza de desfacere j trebuie să avem

$$A'_{ij} = a'_{ij}\, x_{ij} = \sum_{l=1}^{o} a'_{ijl}\, x'_{ijl}, \tag{3}$$

$$x_{ij} = \sum_{l=1}^{o} x_{ijl}, \tag{4}$$

unde x_{ijl} sînt consumurile consumatorilor individuali, iar a'_{ijl} cheltuielile specifice de transport de la sursa i. Atît a'_{ij} cît și a'_{ijl} sînt funcție de distanța de transport l_{ech} respectiv l. Deoarece mărimile x_{ij} și x_{ijl} sînt necunoscute, se face ipoteza, verificată apoi cu datele reale, că, eliminînd consumurile mari concentrate — consumurile orașelor și marilor combinate —, celelalte consumuri sînt uniform repartizate de-a lungul rețelei de cale ferată pe care se realizează cea mai mare parte a transporturilor. Notînd cu σ densitatea liniară de consum, avem

$$A'_{ij} = a'_{ij}\sigma\, L_j = \int_0^{L_j} a'_{ijl}\,\sigma\, dl, \tag{5}$$

sau

$$a'_{ij} = \frac{1}{L_j}\int_0^{L_j} a'_{ijl}\, dl, \tag{6}$$

unde L_j este lungimea totală a rețelei de cale ferată din baza de desfacere j, iar l distanța pe calea ferată, pe drumul cel mai scurt, între sursa i și elementul dl. Expresia mărimii a' este pentru transportul pe cale ferată [5]

$$a' = c_v \left[l + 2{,}5\sqrt{35\,(l+35)}\right] \text{ [lei/t]}, \tag{7}$$

c_v fiind un coeficient diferit de la combustibil la combustibil. Introducînd această expresie în relaţia precedentă, se obţine l_{ech}, distanţa pe calea ferată între sursa i şi consumatorul echivalent j. Ipoteza făcută a fost verificată calculînd distanţa medie de transport pe cale ferată a combustibilului lichid în funcţie de repartiţia reală a combustibilului în 1961 şi de distanţele echivalente determinate cum s-a arătat mai sus şi comparînd-o cu distanţa medie de transport a combustibilului lichid reală. Abaterea este de 0,3% [6].

În cheltuielile de transport nu au fost cuprinse cheltuielile pentru combustibilul necesar realizării transportului pe calea ferată. Aceste cheltuieli au fost înregistrate la cheltuielile consumatorului „tracţiune feroviară". Notîndu-le cu a'', avem

$$a_{ij} = a'_{ij} - a''_{ij}.$$

Analog consumatorului echivalent au fost determinate sursele echivalente în cazul cînd mai multe surse, în apropiere una de alta, în comparaţie cu distanţa la centrele de consum, produc acelaşi sort de combustibil. În cazul combustibilului lichid, rafinăriile din regiunea Ploieşti şi cele din regiunea Bacău au fost grupate astfel că s-au obţinut două surse echivalente de combustibil lichid. Determinarea distanţei echivalente în ce priveşte sursele a fost făcută ţinînd seama de ponderea producţiei fiecărei surse care intră în componenţa sursei echivalente, în producţia acesteia.

Cheltuielile pentru transportul combustibilului sînt, în cazul alimentării consumatorului echivalent de la două sau mai multe surse, mai mari decît cele reale; căci în acest caz fiecare consumator individual va fi alimentat nu din toate sursele, ci de la cea mai apropiată. Diferenţa dintre cheltuieli va fi însă cu atît mai mică, cu cît suprafaţa de pe care s-au grupat consumatorii are dimensiuni mai mici în comparaţie cu distanţa sursă-consumator echivalent. După cum a arătat comparaţia de mai înainte, în practică această diferenţă este neglijabilă.

Modelele matematice ale consumatorilor industriali şi casnici din categoria d menţionaţi au următoarele caracteristici:

Tabela 2

Felul combustibilului consumat	m	n	Numărul variabilelor $m \times n$
1. Motorină	14	2	28
2. Benzină auto	13	2	26
3. Petrol lampant	13	2	26
4. Combustibil pentru calorifer	8	2	16
5. Gaze lichefiate	8	2	16

5.2. Consumatorii industriali şi casnici din categoria c sînt consumatorii de păcură, cărbune de diferite sorturi şi gaze naturale. Corespun-

zător fiecărui fel de combustibil avem cîte un model matematic de forma :

$$\left.\begin{array}{c} \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = W_j \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}\right\} m, \tag{8}$$

$$\left.\begin{array}{c} \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot + \sum_{j=1}^{m} x_{ij} + \ldots \leqslant R_j \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}\right\} n, \tag{9}$$

i fiind sursa de energie care alimentează toți consumatorii din categoriile c și b, adică consumatorii industriali și casnici (categoria c), tracțiunea feroviară și centralele electrice (categoria b).

Partea din funcția de optimizat care privește acești consumatori are forma :

$$A = \ldots + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\, x_{ij} + \ldots$$

Pentru calculul mărimii a_{ij} se fac aceleași considerații ca mai sus, cu observația că pentru combustibilii solizi consumatorii au fost grupați pe regiuni administrative.

Posibilitățile consumatorilor de cărbune de a consuma sorturi cu caracteristici asemănătoare s-au exprimat în gruparea diferitelor sorturi de cărbune, în funcție de puterea calorifică și de granulație, în șase grupe :

Cărbune A — huilă spălată și huilă sortată ;
„ B — huilă mixtă și șlam ;
„ C — lignit sort 30—350 ;
„ D — lignit sort 0—700 ;
„ E — lignit sort 0—30 și 0—80 ;
„ F — cărbune brun sort 0—300 și 30—350.

Caracteristicile modelelor matematice respective sînt următoarele :

Tabela 3

Tipul combustibilului consumat	m	n	Numărul variabilelor $m \times n$
1. Păcură	12	2	24
2. Cărbune A	16	3	48
3. Cărbune B	7	3	21
4. Cărbune C	16	5	80
5. Cărbune D	2	2	4
6. Cărbune E	3	4	12
7. Cărbune F	5	2	10
8. Gaze trim. I	1	2	2
9. Gaze trim. II	1	2	2
10. Gaze trim. III	1	2	2
11. Gaze trim. IV	1	2	2

Au fost considerate două surse echivalente de gaze naturale : centrul podişului transilvănean şi nordul Olteniei. Toţi consumatorii, în afară de oraşul Bucureşti, se pot alimenta doar de la o sursă. Fiind consumatori din categoria *a*, nu intervin în calculele de optimizare, iar consumul lor se scade din producţia surselor de gaze naturale respective. Împărţirea producţiei surselor de gaze pe trimestre a fost justificată într-o lucrare anterioară [4].

6. *Tracţiunea feroviară* este un consumator din categoria *b*. Modelul matematic respectiv este :

$$\left.\begin{array}{c}\cdots\cdots\\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = W_j \\ \cdots\cdots\end{array}\right\} m, \tag{10}$$

$$\left.\begin{array}{c}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \cdots + \sum_{j=1}^{m} \frac{x_{ij}}{\eta_i} + \cdots \leqslant R_i \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{array}\right\} n, \tag{11}$$

$$\left.\begin{array}{c}\cdots\cdots\\ \dfrac{W_j}{\sum_{i=1}^{n} \frac{x_{ij}}{\eta_i H_i}} \geqslant H_j \\ \cdots\cdots\end{array}\right\} m, \tag{12}$$

unde

x_{ij} este cantitatea de căldură cedată cazanelor locomotivelor din centrul j prin arderea combustibilului din sursa i ;

W_j — cantitatea de căldură necesară cazanelor locomotivelor din centrul j ;

η_i — randamentul de ardere în focarele locomotivelor al combustibilului din sursa i ;

i — sursa de energie care alimentează consumatorii industriali şi casnici din categoria *c*, tracţiunea feroviară şi centralele electrice ;

H_i — puterea calorifică inferioară a combustibilului din sursa i ;

H_j — cantitatea de căldură pe care trebuie s-o cedeze cazanului locomotivei tona de combustibil pentru ca acesta să funcţioneze la caracteristicile nominale ;

m, n — numărul de centre de consum, respectiv de surse-sorturi.

Scriind relaţiile de mai sus, s-a presupus că pentru locomotivele din parcul existent în 1961 arderea combustibilului se face cu acelaşi randament, indiferent de tipul locomotivei [7], şi că prin arderea combinată a mai multor combustibili se obţine aceeaşi cantitate de căldură ca la arderea lor separată. Aceste ipoteze sînt admisibile din punct de vedere practic.

În aceste condiții, deși pe parcurs locomotivele se aprovizionează de la depouri diferite, consumurile pot fi considerate drept concentrate în aceste depouri.

Grupul de inegalități (12) exprimă condiția ca, pentru o tonă de combustibil de diferite sorturi ars în focare, cantitatea de căldură să fie cel puțin egală cu cea la care locomotiva dezvoltă parametrii săi normali.

Consumurile de combustibil ale depourilor au fost grupate în cadrul unui consumator echivalent pentru o regiune administrativă. În acest grup de consumatori de categoria *b*, tracțiunea feroviară intervine numai prin locomotivele cu aburi, consumatoare de păcură și combustibil solid de diferite sorturi. Conform celor spuse, caracteristicile modelului matematic sînt:

Tabela 4

m	*n*	Numărul variabilelor $m \times n$
16	18	288

O exprimare mai precisă a grupului de relații (10) și (12) se face ținînd seama de următoarele:

Cantitatea de combustibil consumată de locomotive este folosită pentru transportul călătorilor, mărfurilor de diferite naturi și combustibililor. În raza de aprovizionare cu combustibil a unui depozit se cunosc tipurile locomotivelor care efectuează tracțiunea, deci randamentul motorului lor, cum și traseele feroviare ale diferitelor lanțuri energetice pe suprafața acestui raion, deci sînt cunoscute și valorile respective ale lucrului mecanic pentru transportul unei tone de combustibil. Deci, pentru un punct de aprovizionare cu combustibil a locomotivelor, ecuația corespunzătoare din grupul de ecuații (10) va fi

$$\left.\begin{array}{c} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_{ij} = W'_j + \sum\limits_{l=1}^{o} \sum\limits_{i'j'} \dfrac{x_{i'j'l}}{\eta_{i'j'} H'_i} \dfrac{L_{spl}}{\eta_{ml}} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} m, \qquad (13)$$

unde:

W_j este cantitatea de căldură cedată cazanelor locomotivelor alimentate de centrul j pentru transportul călătorilor și celorlalte mărfuri în afară de combustibili;

$x_{i'.j'.l}$ — fluxul energetic livrat de un lanț oarecare care parcurge traseul l;

$\eta_{i'.j'}$ — randamentul instalațiilor ce urmează pe acest lanț instalațiilor de transport a combustibilului;

l — indice care se referă la traseul parcurs pe calea ferată pe suprafața aferentă centrului j, de către cantitatea de combustibil corespunzătoare unui anume lanț energetic;

o — numărul total de trasee ale lanțurilor care traversează suprafața considerată;

H_i — puterea calorifică inferioară a combustibilului transportat;

L_{spl} — lucrul mecanic efectuat pentru transportul unității de greutate pe traseul l;

η_{iml} — randamentul mecanic al locomotivelor care tractează trenurile pe traseul l.

Grupul de ecuații (12) se va scrie în noua variantă

$$\left.\begin{array}{l} \cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_{ij}}{\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{x_{ij}}{\eta_i H_i}} \geqslant H_j \\ \cdots\cdots\cdots \end{array}\right| m. \tag{14}$$

Calculele efectuate pentru a doua variantă au arătat că, în condițiile practice existente în 1961, termenul al doilea din membrul doi al ecuației (13) are o valoare medie, pentru întreaga rețea de cale ferată, de circa 5%. Dat fiind valoarea mică a acestui termen și complicațiile mari pe care le introduce în rezolvarea problemei această a doua variantă, s-a hotărît rezolvarea problemei folosind prima variantă a ecuațiilor modelului matematic pentru tracțiunea feroviară, în care W_j are valoarea efectivă din 1961.

7. *Sistemului electroenergetic* îi corespunde un model matematic de forma

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_{ij}^{\mathrm{I}} = W^{\mathrm{I}}, \\ &\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_{ij}^{\mathrm{II}} = W^{\mathrm{II}}, \\ &\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_{ij}^{\mathrm{III}} = W^{\mathrm{III}}, \\ &\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_{ij}^{\mathrm{IV}} = W^{\mathrm{IV}}, \end{aligned} \tag{15}$$

$$\left.\begin{array}{l} \cdots\cdots\cdots \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \gamma_{i_j} x_{ij}^{\mathrm{I}} \leqslant W_{\mathrm{disp}\, j}^{\mathrm{I}}, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \gamma_{i_j} x_{ij}^{\mathrm{II}} \leqslant W_{\mathrm{disp}\, j}^{\mathrm{II}}, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \gamma_{i_j} x_{ij}^{\mathrm{III}} \leqslant W_{\mathrm{disp}\, j}^{\mathrm{III}}, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \gamma_{i_j} x_{ij}^{\mathrm{IV}} \leqslant W_{\mathrm{disp}\, j}^{\mathrm{IV}}, \\ \cdots\cdots\cdots \end{array}\right| m, \tag{16}$$

$$\left.\begin{array}{l} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sum_{i=1}^{n} \gamma_{ij} (x_{ij}^{\mathrm{I}} + x_{ij}^{\mathrm{II}} + x_{ij}^{\mathrm{III}} + x_{ij}^{\mathrm{IV}}) \leqslant W_{\mathrm{disp}\ j} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} m, \tag{17}$$

$$\left.\begin{array}{l} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \ldots + \sum_{j=1}^{m} \frac{x_{i_j}}{\eta_{i_j}} + \ldots \leqslant R_i \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} n, \tag{18}$$

unde :

$W^{\mathrm{I}}, \ldots, W^{\mathrm{IV}}$ este cantitatea de energie electrică livrată sistemului de centralele interconectate în fiecare trimestru ;

γ_{ij} — cantitatea de energie electrică produsă la bornele generatoarelor pentru ca o unitate să fie livrată sistemului (deci după ce s-a scăzut consumul de energie electrică al serviciilor auxiliare) ;

$W^{\mathrm{I}}_{\mathrm{disp}\ j} \ldots W^{\mathrm{IV}}_{\mathrm{disp}\ j}$ — cantitatea de energie electrică maximă, posibil a fi livrată într-un *trimestru* de centrala j ;

$W_{\mathrm{disp}\ j}$ — cantitatea de energie electrică maximă, posibil a fi livrată într-un *an* de centrala j ;

i — sursa de energie care alimentează și alți consumatori în afara centralelor electrice ;

m, n — numărul de centrale electrice, respectiv surse de energie.

Au fost luate în considerare în vederea optimizării 17 centrale termoelectrice și centrala hidroelectrică „V. I. Lenin" Bicaz, ($m = 18$), care au produs 55% din energia electrică totală livrată sistemului și 74% din energia electrică produsă de centralele cu putere mai mare ca 10 MW. Restul centralelor electrice au fost considerate ca având regim de funcționare impus, graficul lor de sarcină scăzîndu-se din graficul de sarcină însumat al centralelor sistemului, iar cantitatea de combustibil consumat adunîndu-se consumului de combustibil al consumatorilor casnici și industriali din regiunea respectivă.

Pentru centralele termoelectrice Doicești și Paroșeni mai intervin 4 relații de forma (16), în primul caz, și 5 relații de forma (16), (17), în al doilea caz, exprimînd condiții limitative în folosirea păcurei.

Pentru centrala electrică de termoficare Brazi, care a intrat în funcțiune în trimestrul al III-lea al anului 1961, avem 2 relații de tipul (16).

În afara tuturor acestor relații, mai sînt 12 relații, cîte 3 pentru fiecare trimestru, exprimînd condiția de nedepășire a capacității de transport a conductelor de gaz. Ele au, pentru conducta k pe trimestrul I, forma :

$$x_{ij}^{\mathrm{I}} + \sum_{j} \frac{x_{ij}^{\mathrm{I}}}{\eta_{ij}} \leqslant R_k^I . \tag{19}$$

Primul termen din membrul întîi al inegalităţii este consumatorul industrial şi casnic de gaz metan cu posibilităţi de alimentare din două părţi, iar al doilea termen — consumul de gaz al centralelor electrice care se alimentează pe această conductă. R_k^I este capacitatea de transport a conductei pe primul trimestru obţinută după scăderea consumurilor consumatorilor industriali şi casnici care se alimentează numai pe această conductă.

Ţinînd seama de faptul că regimul de extracţie a gazului metan a fost împărţit în patru perioade corespunzînd celor patru trimestre, că avem două surse de gaz natural, că centralele electrice pot consuma toate la un loc gaz natural, păcură şi toate sorturile de cărbune, alimentarea centralelor electrice se va face de la 30 de surse-sorturi de combustibil echivalente. Caracteristicile modelului matematic sînt:

Tabela 5

Nr. de relaţii	Tipul relaţiei
4	(5)
88	(16)
9	condiţii suplimentare (16)
12	(18)
30	(17)
143	total

Numărul variabilelor este 419. Dacă fiecare centrală ar putea consuma orice fel de combustibil, numărul variabilelor ar fi egal cu produsul relaţiilor de tipul (16) prin numărul surselor: $88 \times 33 = 2\,640$.

8. *Sistemul termoenergetic.* Din sistemul termoenergetic apar explicit în modelul matematic numai instalaţiile de producere a căldurii pentru termoficare în centralele electrice cu posibilităţi de interşanjabilitate a combustibililor. Restul instalaţiilor care produc căldură printr-un singur combustibil sînt înglobate în grupa consumatorilor industriali. Prin această operaţie nu se face o limitare a optimizării.

Modelul matematic al instalaţiilor de producere a căldurii, care apar explicit, este de forma:

$$\left.\begin{array}{l} \cdots\cdots \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_{ij} = W_j \\ \cdots\cdots \end{array}\right\} m, \tag{20}$$

$$\left.\begin{array}{l} \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots + \sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{x_{ij}}{\eta_{ij}} + \cdots \leqslant R_i \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} n, \tag{21}$$

unde :

W_j este cantitatea de căldură produsă în centrul j ;

η_{ij} — randamentul de producere a căldurii în centrul j ;

restul notațiilor fiind cunoscute.

Dacă o instalație de producere a căldurii consumă printre alți combustibili și gaz, fiecare ecuație din grupul de ecuații (20) este înlocuită de patru ecuații corespunzînd celor patru trimestre în care se împarte graficul de producere a căldurii.

Caracteristicile modelului matematic pentru sistemul termoenergetic sînt :

Tabela 6

m	n	Numărul variabilelor
12	4	36

Atît pentru tracțiunea feroviară, cît și pentru sistemele electro- și termoenergetic, partea din funcția de optimizat are forma :

$$A = \ldots + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\, x_{ij} + \ldots$$

9. *Încheiere.* În concluzie, optimizarea bilanțului energetic general al anului 1961 revine la rezolvarea a cinci probleme de programare liniară de tip transport cu dimensiuni ale matricei proceselor, variind între 10×16 și 16×28, și o problemă de programare liniară de formă generală cu 252 de relații și 950 de necunoscute. Calculele necesare întocmirii acestui model matematic, culegerea, sistematizarea și prelucrarea datelor reprezintă un volum însemnat de muncă.

Într-un articol viitor se vor prezenta rezultatele rezolvării problemelor și a analizei rezultatelor.

Primit la redacție la 15 mai 1964.

BIBLIOGRAFIE

1. T. MICLESCU, *Considerații asupra bilanțului energetic de perspectivă.* St. cerc. energ., 3 (1960).
2. T. MICLESCU, AL. PAP, *Procedee de calcul pentru determinarea bilanțului energetic de perspectivă,* I, *Procedee aproximative.* St. cerc. energ., **XII**, *2—A* (1962).
3. T. MICLESCU, AL. PAP, *Procedee de calcul pentru determinarea bilanțului energetic de perspectivă,* II, *Procedee exacte.* St. cerc. energ., **XII**, *3—A* (1962).
4. T. MICLESCU, *Exprimarea regimului de consum și de producere a energiei și purtătorilor de energie în ecuațiile bilanțului energetic general.* St. cerc. energ., **XIII**, *2—A* (1963).
5. G. LELESCU, *Calculul prețului de cost în raport cu distanța.* Revista căilor ferate, *9* (1962).
6. — *Anuarul statistic al R.P.R. 1962.*
7. ȘERBESCU FLOREA, *Stabilirea datelor caracteristice ale locomotivelor.* Analele Inst. cercet. C.F.R. (1957).

CALCULUL EXACT AL FACTORULUI DE FORMĂ AL REZISTENȚEI ECHIVALENTE A ȘARJEI CUPTOARELOR DE INDUCȚIE FĂRĂ FIER PE BAZA BAREI MODEL

DE

ACADEMICIAN R. RĂDULEȚ și C. I. MOCANU

621.3 : 621.365.52

Calculul puterii absorbite pe unitatea de înălțime de șarjă a cuptoarelor de inducție fără fier, efectuat în ipoteza că șarja ar avea înălțimea infinită și ar fi situată într-un cîmp magnetic alternativ de excitație omogen și axial, produs de bobina inductoare, conduce la valori mult prea mari față de cele reale. Acest calcul se corectează cu un factor de formă care, în cazul refulării nete a curentului indus în șarjă, depinde numai de raportul dintre înălțimea și diametrul șarjei.

În această lucrare, pe baza modelului de reprezentare a șarjei printr-o bară dreptunghiulară avînd înălțimea paralelă cu liniile inducției magnetice de excitație, se calculează factorul de formă și se compară cu alte expresii ale acestui factor, determinate pe baza altor modele de reprezentare a șarjei.

1. *Problema factorului de formă.* Cum calculul puterii absorbite pe unitatea de înălțime de șarjă a cuptoarelor de inducție fără fier, efectuat în ipoteza că șarja ar avea înălțime infinită și ar fi situată într-un cîmp magnetic alternativ de excitație omogen și axial, produs de bobina primară, inductoare, a cuptorului, conduce la valori mult prea mari față de cele reale, acest calcul trebuie corectat ținînd seamă de valoarea finită a raportului dintre înălțimea și diametrul șarjei. În această corecție interesează în special cazul refulării nete a curentului electric indus în șarjă, fiindcă randamentul cuptoarelor are numai în aceste condiții o

ST. CERC. ENERG. ELECTR. TOM 14 Nr. 3 p. 485–500 BUCUREȘTI 1964

valoare acceptabilă. Deci corecția poate fi prinsă într-un factor de formă, adică dependent numai de raportul dintre înălțimea și diametrul șarjei, care, înmulțit cu puterea absorbită calculată pentru înălțimea reală cu ajutorul șarjei model infinit înalte, dă puterea efectiv absorbită de șarja de înălțime finită.

Această problemă, apărută către sfîrșitul celui de-al treilea deceniu al secolului nostru, a fost rezolvată de primul dintre autorii acestei comunicări cu ajutorul a două modele ale șarjei, presupunînd refularea curentului indus atît de netă, încît cîmpul magnetic rezultant să poată fi considerat nenul numai în exteriorul șarjei și să fie tangent la suprafața ei.

Unul dintre modelele de reprezentare a șarjei în vederea determinării factorului de formă a fost elipsoidul de rotație [1] și calculul respectiv a fost efectuat în rest exact în 1937, raportul dintre semiaxa de simetrie a elipsoidului și cea perpendiculară pe ea fiind presupus egal cu raportul dintre semiînălțimea și raza șarjei. Un alt model al șarjei a fost o bară infinit lungă presupusă perpendiculară pe inducția cîmpului magnetic alternativ și (practic) omogen, produs de bobina primară a cuptorului (fig. 1), înălțimea h a secțiunii barei fiind presupusă paralelă cu liniile de cîmp ale inducției lui magnetice și egală cu înălțimea reală h a șarjei reprezentate. Puterea absorbită de șarjă a fost identificată cu puterea absorbită de bara model pe o lungime egală cu jumătate din perimetrul șarjei, condiții în care bara model prezintă o suprafață laterală paralelă cu cîmpul magnetic inductor și de arie egală cu aria suprafeței laterale a șarjei. Folosirea barei model pune însă și problema alegerii grosimii acestei bare în funcție de diametrul șarjei. În teza sa de doctorat [2], primul dintre autorii prezentei lucrări a folosit, în 1930, o bară model cu grosimea g egală cu diametrul d al șarjei ($g = d$). În aceste condiții, ariile perpendiculare pe cîmpul magnetic ale barei model, peste care se refulează fluxul magnetic la refulare netă a curentului indus, sînt egale însă cu dublul ariilor suprafețelor de capăt ale șarjei. Fluxul magnetic inductor refulat în aceste condiții peste unitatea de lungime de muchie a barei model este deci egal cu dublul fluxului magnetic inductor refulat peste unitatea de lungime de perimetru al șarjei. De aceea autorul modelului a propus ca în calculul puterii absorbite de șarjă să se țină seamă de afluxul de putere dat de fluxul vectorului

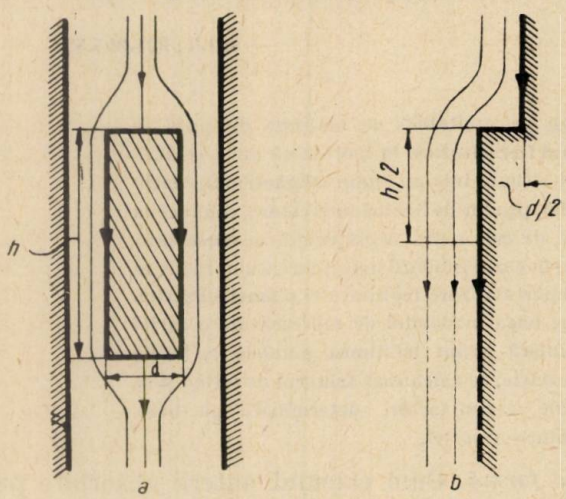


Fig. 1. — a — Modelul plan al șarjei și bobinei inductoare; b — Modelul plan simplificat al șarjei.

lui Poynting numai prin suprafața laterală a barei, ceea ce a condus la un factor de putere puțin prea mic pentru șarje scunde și la unul puțin prea mare pentru șarje înalte. În primul caz se resimte ponderea afluxului de putere prin capetele șarjei, care a fost neglijată în modelul barei; în cel de-al doilea caz această pondere nu se mai resimte, însă apare influența prea marelui flux magnetic refulat peste unitatea de lungime de muchie a barei model, spre a trece peste suprafețele ei laterale. De

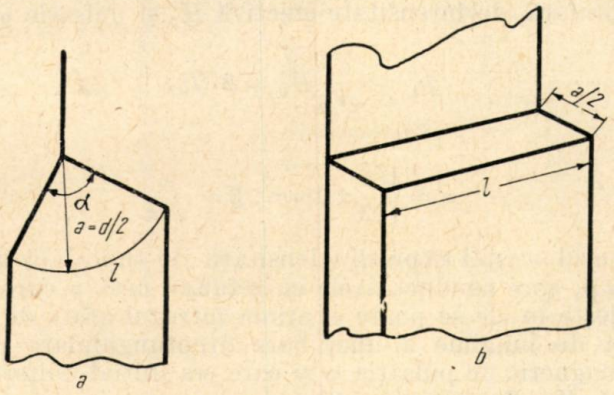


Fig. 2. — *a* — Modelul cilindric; *b* — Modelul plan.

aceea autorul a propus ulterior pentru bara model o grosime egală cu numai jumătate din diametrul șarjei d, pentru ca fluxurile magnetice inductoare, refulate peste unitățile de lungime ale muchiei barei model și perimetrului șarjei să fie egale, creînd astfel situații comparabile și pentru afluxurile de putere prin suprafețele frontale ale barei model și șarjei, ceea ce a permis să se calculeze factorul de formă considerînd pentru bara model afluxul de putere atît prin suprafețele ei laterale, cît și prin suprafețele ei frontale. Acest principiu de reprezentare a unui original cu o axă de simetrie printr-un model plan-paralel a fost folosit de autor cu bune rezultate și într-o lucrare [3] din 1945 privitoare la ecranarea bobinelor cilindrice fără fier în înaltă frecvență. Calculul factorului de formă în condiția $g = \frac{d}{2}$ a fost efectuat și publicat de autorii acestei lucrări [4] și a dat bune rezultate (fig. 2).

În toate calculele bazate pe bara model, cîmpul magnetic rezultant din exteriorul ei a fost aproximat în jumătatea ei superioară prin cîmpul magnetic care s-ar obține în același domeniu dacă bara ar fi de lungime „semiinfinită" și avînd deci numai suprafața ei frontală superioară. S-au obținut astfel simplificări în reprezentările conforme folosite în calculul cîmpului magnetic laplacian plan-paralel din exteriorul barei model. Acestea implică însă anumite abateri ale factorului de formă calculat față de cazul că s-ar fi efectuat un calcul exact, abateri care au fost presupuse mici. Aceasta este adevărat dacă raportul $h : g$ dintre înălțimea și grosimea barei model nu e prea mic.

Lucrarea prezentă cuprinde calculul exact al factorului de formă pe baza barei model de secțiune dreptunghiulară în condiția corectă $g = \frac{d}{2}$.

Ea folosește, ca și lucrările precedente, teorema care arată că puterea activă p_1 absorbită prin unitatea de arie a suprafeței plane a unui conductor de conductivitate σ și permeabilitate μ, care ocupă un semispațiu limitat de un plan și e situat într-un cîmp magnetic alternativ omogen, paralel cu planul-suprafață, de intensitate efectivă H_0 și pulsație ω, are expresia

$$p_1 = \frac{\alpha}{\varkappa^2 \sigma} H_0^2 = \beta H_0^2,$$

unde

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{2} \varkappa \mu \omega \sigma} \; ; \; \beta = \frac{\alpha}{\varkappa^2 \sigma}.$$

Cu ajutorul acestei expresii a densității de suprafață a afluxului de putere activă p_1 spre conductoarele cu refulare netă a curentului electric care se stabilește în ele se poate exprima întregul aflux de putere activă prin unitatea de lungime a unei bare dreptunghiulare perpendiculare pe un cîmp magnetic de pulsație ω și care era inițial uniform și de intensitate efectivă H_0. Ea are expresia

$$P = p_1 \, re \, I_z,$$

unde I_z este o funcțională complexă care rezultă din problema de reprezentare conformă a exteriorului conturului barei situat în planul $w = u + jv$ pe exteriorul unui contur adecuat, ales într-un plan $z = x + jy$.

Cel de-al doilea dintre autori a demonstrat că funcționala I_z are următoarea expresie:

$$I_z = 4 C_1^2 \oint_{\Gamma_z} \sin^2 \varphi \, A_z' \, dz,$$

unde

$$A_z = (1 + j) \oint_{\Gamma_z} \frac{dz}{F'^* (z)},$$

iar

$$w = F(z)$$

este funcțiunea care transformă exteriorul conturului dreptunghiular Γ_w din planul $w = u + jv$ în exteriorul cercului Γ_z de rază unitate $|z| = 1$ din planul complex $z = x + jy$, cu centrul în punctul $z = 0$ al acestuia. Unghiul φ din (3) este unghiul polar al punctului curent z de pe cercul Γ_z de rază unitate, care are ecuația $z = e^{j\varphi}$, iar C_1 este o constantă. Această demonstrație este efectuată mai jos.

2. *Teorema funcționalei A_z în problema curentului de aducție în bara conductoare dreaptă.* Conform unei teoreme a lui Riemann, orice curbă

închisă Γ_w din planul complex $w = u + jv$ se poate transforma printr-o funcțiune

$$w = F(z) \tag{1}$$

într-o curbă Γ_z din planul complex $z = x + jy$.

Dacă H_w și H_z sînt intensitățile cîmpului magnetic din exteriorul conductoarelor parcurse axial de curent de aducție, cu contururile secțiunilor transversale Γ_z și Γ_w în cele două plane complexe corespunzătoare, din egalitatea tensiunilor magnetomotoare elementare

$$H_z \, dz^* = H_w \, dw^* \tag{2}$$

rezultă

$$H_w = H_z \left(\frac{dz}{dw} \right)^* = H_z \frac{1}{F'^*(z)}, \tag{3}$$

Dacă se alege funcția de transformare $w = F(z)$ astfel încît în planul complex $z = x + jy$ cîmpul H_z să fie circular în exteriorul cercului Γ_z care are raza $|z| = 1$, intensitatea H_z derivă dintr-un potențial magnetic U_z care are următoarea expresie:

$$U_z = j \frac{\varkappa I}{2\pi} \ln \frac{1}{z}. \tag{4}$$

în care I este intensitatea curentului — și deci

$$H_z = -\frac{dU}{dz} = j \frac{\varkappa I}{2\pi z}. \tag{5}$$

Într-un punct $z = e^{j\varphi}$ de pe cercul Γ_z cu raza unitate, φ fiind unghiul polar, intensitatea H_{Γ_z} a cîmpului are expresia

$$H_{\Gamma_z} = j \frac{\varkappa I}{2\pi e^{j\varphi}}. \tag{6}$$

Afluxul de putere aparentă s_1 pe unitatea de lungime a barei se calculează cu formula

$$s_1 = \frac{(1+j)\,\alpha}{\varkappa^2 \sigma} \oint_{\Gamma_z} H_z H_z^* \left(\frac{dz}{dw} \right) \left(\frac{dz}{dw} \right)^* dw =$$

$$= \frac{(1+j)\,\alpha\, I^2}{4\pi^2 \sigma} \oint_{\Gamma_z} \frac{dz}{F'^*(z)}. \tag{7}$$

Notînd cu β_1 mărimea

$$\beta_1 = \frac{\alpha}{4\pi^2 \sigma} \tag{8}$$

și cu A_z funcționala complexă

$$A_z = (1+j) \oint_{\Gamma_z} \frac{dz}{F'^*(z)}, \tag{9}$$

afluxul de putere activă P_1 ia expresia

$$P_1 = re\, s_z = \beta_1 I^2\, re\, A_z. \tag{10}$$

În cazul particular al dreptunghiului cu laturile $2a$ și $2b$ (fig. 3), funcția $w = F(z)$, care transformă conform exteriorul dreptunghiului Γ_w

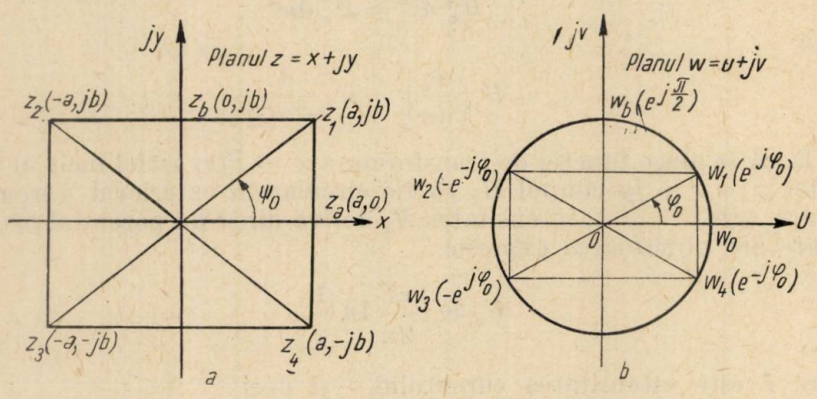


Fig. 3. — Reprezentarea conformă a cîmpului din exteriorul unui dreptunghi pe exteriorul cercului cu raza unitate.

cu centrul în origine pe exteriorul cercului Γ_z cu raza unitate $|z| = 1$, este dată de următoarea relație a lui Christoffel-Schwarz :

$$w = C \int_{\Gamma_z} \prod_{k=1}^{4} \left(1 - \frac{z_k}{z}\right)^{\alpha_k} dz + D, \tag{10}$$

în care C și D sînt constante, $\alpha_k \pi$ sînt unghiurile exterioare, egale cu $\frac{\pi}{2}$, și z_k punctele care corespund prin transformarea (10) vîrfurilor w_k din planul $w = u + jv$ al dreptunghiului Γ_w.

Funcționala A_z pentru dreptunghi are următoarea expresie :

$$A_z = (1+j) \frac{1}{C^*} \oint_{\Gamma_z} \frac{dz}{\left(1 - \frac{z_k^*}{z^*}\right)^{\alpha_k}}. \tag{11}$$

Deoarece pe cercul $|z| = 1$ există relația $z = e^{j\varphi}$, formula (11) a funcționalei se transformă cum urmează :

$$A_z = j(1+j) C^{*-1} \oint_{\Gamma_z} e^{-j\varphi} \prod_{k=1}^{4} (e^{-j\varphi} - e^{-j\varphi} k)^{-\alpha} k \, d\varphi. \tag{12}$$

În (11), trei dintre constantele z_k pot fi alese arbitrar; de exemplu

$$z_1 = e^{j\varphi_0}\,;\; z_2 = e^{-j\varphi_0}\,;\; z_3 = -e^{j\varphi_0}, \tag{13}$$

iar din condiția pe care trebuie să o satisfacă constantele z_k în transformarea pe cerc:

$$\sum_{k=1}^{4} \alpha_k z_k = 0 \tag{14}$$

rezultă valoarea constantei z_4, cu $\alpha_k = \frac{1}{2}$ $(k = 1, 2, 3\ 4)$:

$$z_4 = -(z_1 + z_2 + z_3) = -e^{-j\varphi_0}. \tag{15}$$

Pe cercul Γ_z, funcția $w = F(z)$ are forma:

$$w = C\oint_{\Gamma_z} je^{j\varphi}\cdot e^{-2j\varphi} - (e^{2j\varphi} - e^{2j\varphi_0})^{\frac{1}{2}}(e^{2j\varphi} - e^{-2j\varphi_0})^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}\varphi + D =$$

$$= -2\,C\,j\,k\int_0^{\varphi}\sqrt{1 - k_1^2\sin^2\varphi}\,\mathrm{d}\varphi + D =$$

$$= -2\,C\,j\,k\,E(k_1, \varphi) + D, \tag{16}$$

în care s-a notat cu k_1 modulul supraunitar al integralei eliptice de-a doua speță $E\ (k_1,\ \varphi)$:

$$k_1 = \sqrt{\frac{2}{1 - \cos 2\varphi_0}} = \frac{1}{\sin\varphi_0} = \frac{1}{k}, \tag{17}$$

iar cu k valoarea reciprocă a acestuia.

Din corespondența punctelor w_a $(a,\ o)$ și z_a (e^{j_0}) se determină constanta D:

$$a = -2\,C\,j\,k\,E(k_1, 0) + D\,;\; D = a. \tag{18}$$

Din corespondența punctelor w_1 $(a,\ jb)$ și $z_1(e^{j\varphi_0})$ se calculează constanta C:

$$a + jb = -2C\,j\,k\,E(k_1, \varphi_0) + a:$$

$$C = -\frac{b}{2\,k\,E(k_1, \varphi_0)}. \tag{19}$$

Funcția $w = F(z)$, — care transformă conform cîmpul magnetic din exteriorul unei bare drepte cu secțiune dreptunghiulară, parcursă de curent de aducție, pe exteriorul cilindrului circular cu raza unitate, parcurs de curent de aducție avînd aceeași intensitate I, — se obține din expresiile (16) și (19):

$$w = -\frac{b}{2\,kE(k_1, \varphi_0)}\int_{\Gamma_z} z^{-2}\,(z^2 - e^{2j\varphi_0})^{\frac{1}{2}}(z^2 - e^{-2j\varphi_0})\,\mathrm{d}z + a. \tag{20}$$

Pe cercul Γ_z, valoarea funcției de transformare (20) se obține înlocuind constanta C în ecuația (16):

$$w = jb \frac{E(k_1, \varphi)}{E(k_1, \varphi_0)} + a. \tag{21}$$

Argumentul φ_0 se calculează identificînd cu ajutorul funcției (21) punctele w_b $(0, j\ b)$ și z_b $(e^{j\pi/2})$,

$$jb = jb \frac{E\left((k_1, \frac{\pi}{2}\right)}{E(k_1, \varphi_0)} + a. \tag{22}$$

Întrucît sînt tabelate numai integralele eliptice de modul subunitar $k < 1$, relațiile de calcul al integralei eliptice incomplete $E(k_1, x)$ și al integralei eliptice complete $E\left(k_1, \frac{\pi}{2}\right)$, ambele de speța a doua și modul supraunitar $k_1 = \frac{1}{k}$, sînt:

$$E(k_1, x) = \frac{1}{k}[E(k, y) - k'^2 F(k, y)], \tag{23}$$

$$E\left(k_1, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{k}\left[E\left(k, \frac{\pi}{2}\right) - k'^2 F\left(k, \frac{\pi}{2}\right) + j\left(E'\left(k, \frac{\pi}{2}\right) - k^2 F'\left(k, \frac{\pi}{2}\right)\right)\right], \tag{24}$$

în care s-a notat:

$k = \frac{1}{k_1} = \sin \varphi_0$, modulul subunitar,

$k'^2 = \sqrt{1 - k^2} = \cos \varphi_0$, modulul complimentar subunitar,

$F'\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = F\left(k', \frac{\pi}{2}\right)$ și $E'\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = E\left(k', \frac{\pi}{2}\right)$,

integralele eliptice complete de prima și a doua speță de modul complementar subunitar, iar cu $y = \arcsin [k_1 \sin x]$, argumentul de transformare a integralelor incomplete de prima speță $F(k, y)$ și a doua speță $E(x, y)$.

Pentru argumentul $x = \varphi_0$, argumentul y are valoarea

$$y = \arcsin [k_1 \sin \varphi_0] = \arcsin [\sin \varphi_0 / \sin \varphi_0] = \frac{\pi}{2} \tag{25}$$

și ecuația (22) devine astfel:

$$jb = jb \frac{\frac{1}{k}\left[E\left(k, \frac{\pi}{2}\right) - k'^2 F\left(k, \frac{\pi}{2}\right) + j\left(E'\left(k, \frac{\pi}{2}\right) - k^2 F'\left(k, \frac{\pi}{2}\right)\right)\right]}{\frac{1}{k}\left[E\left(k, \frac{\pi}{2}\right) - k'^2 F\left(k, \frac{\pi}{2}\right)\right]} + a$$

sau

$$\frac{a}{b} = \frac{E'\left(k, \frac{\pi}{2}\right) - k^2 F'\left(k, \frac{\pi}{2}\right)}{E\left(k, \frac{\pi}{2}\right) - K'^2 F\left(k, \frac{\pi}{2}\right)}. \tag{26}$$

Din ecuația (20) se obține modulul k, deci și argumentul φ_0, în funcție de raportul $\frac{b}{a}$. Ecuația (26) se rezolvă dînd diferite valori modulului k $(0 < k < 1)$, rezultînd valorile corespunzătoare ale raportului $\frac{b}{a}$. În tabela 1

Tabela 1

Valorile rapoartelor b/a în funcție de modulul subunitar k

k^2	k'^2	$E - k'^2 F$	$E' - k^2 F'$	b/a
0,00	1,00	0,000000	1,000000	0,00000
0,01	0,99	0,007952	0,979038	0,00877
0,02	0,98	0,015748	0,961513	0,01638
0,03	0,97	0,023652	0,945283	0,02565
0,04	0,96	0,031556	0,929858	0,03394
0,05	0,95	0,039521	0,914958	0,04319
0,06	0,94	0,047487	0,900741	0,05272
0,07	0,93	0,055473	0,887226	0,06252
0,08	0,92	0,063480	0,873254	0,07269
0,09	0,91	0,071509	0,859979	0,08315
0,10	0,90	0,079562	0,846916	0,09394
0,15	0,85	0,120154	0,785044	0,15305
0,20	0,80	0,161346	0,727049	0,22192
0,25	0,75	0,203150	0,671927	0,30234
0,30	0,70	0,245641	0,619063	0,39679
0,35	0,65	0,288569	0,568048	0,50801
0,40	0,60	0,332881	0,518601	0,64188
0,45	0,55	0,377766	0,470508	0,80291
0,40	0,50	0,423607	0,423607	1,00000

s-au calculat valorile lui k și ale raportului $\frac{b}{a}$, iar în figura 4 s-a reprezentat grafic $k = f\left(\frac{b}{a}\right)$.

Cu expresia (21) a funcției de transformare, funcționala A_z din (11) are următoarea expresie:

$$A_z = (1 - j)\frac{4}{b}F\left(k_1, \frac{\pi}{2}\right)E\ (k_1, \varphi_0). \tag{27}$$

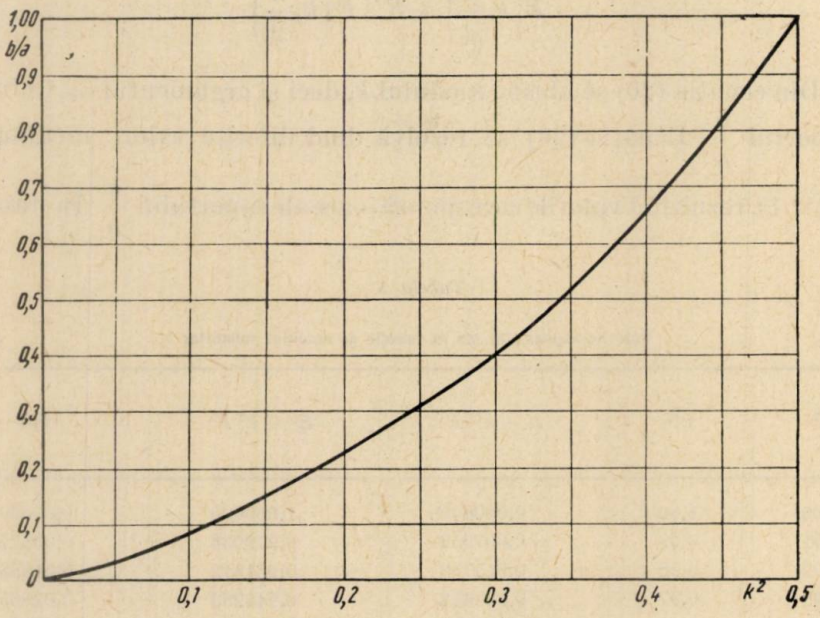


Fig. 4. — Graficul $k = f\left(\frac{b}{a}\right)$, k rădăcină a ecuației (26).

3. *Teorema funcționalei I_z în problema efectului omogen de proximitate.* Fie în planul complex $z = x + jy$ (fig. 5) un cîmp magnetic H_z, nenul la infinit, al cărui potențial magnetic este $V_m(z)$

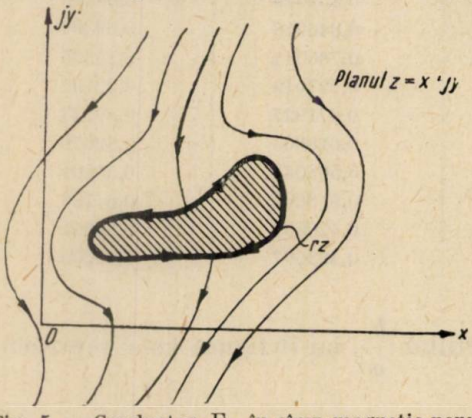


Fig. 5. — Conductor Γ_Z în cîmp magnetic nenul la infinit, la refulare netă a curentului.

$$H_z = -j\frac{dV_m}{dz}. \tag{28}$$

La introducerea în cîmp a unui cilindru conductor circular Γ_z cu raza $|z| = 1$, cîmpul magnetic se modifică mai ales în vecinătatea conductorului, iar noul potențial magnetic V_{1m} are expresia

$$V_{1m} = V_m(z) + V_m\left(\frac{1}{z}\right). \tag{29}$$

În adevăr, din (29) rezultă că la mare depărtare de cilindrul conductor termenul $V_m\left(\frac{1}{z}\right)$ se anulează

$$\lim_{z\to\infty} V_{1m} = \lim_{z\to\infty}\left[V_m(z)+V_m\left(\frac{1}{z}\right)\right] = V_m(z), \tag{30}$$

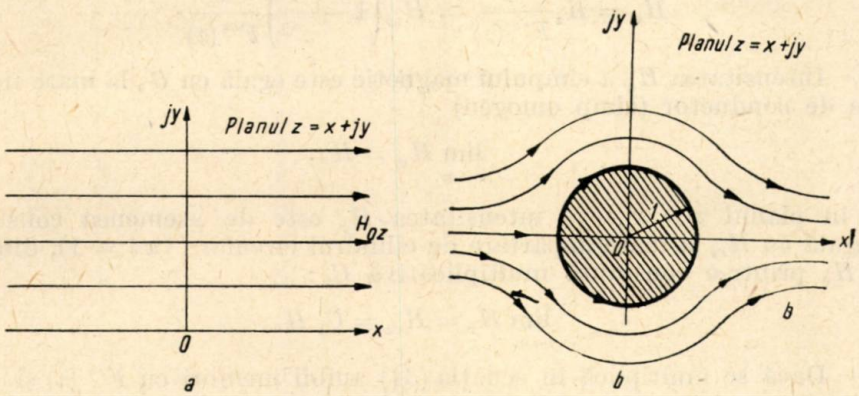


Fig. 6. — *a* — cîmp magnetic uniform în planul z; *b* — conductor cilindric circular în cîmp magnetic.

iar cercul Γ_z rămîne tot o linie de cîmp magnetic:

$$im\ V_{1m}(z) = im\left[V_m(z) + V_m\left(\frac{1}{z}\right)\right] = 0. \tag{31}$$

Dacă în planul complex $z = x + jy$ cîmpul magnetic este uniform, de intensitate H_{oz} (fig. 6), orientat după axa reală ox, potențialul complex V_m are expresia

$$V_m = j\,H_{oz}\,z, \tag{31}$$

iar potențialul V_{1m} al cîmpului modificat prin introducerea cilindrului circular de rază $|z| = 1$ (29) este

$$V_{1m} = jH_{oz}\left(z + \frac{1}{z}\right). \tag{32}$$

Din ecuațiile (28) și (32) se deduce expresia intensității H_z a cîmpului magnetic

$$H_z = H_{oz}\left(1 - \frac{1}{z^{*2}}\right). \tag{33}$$

Dacă în planul complex $w = u + jv$ conturul Γ_w al secțiunii transversale printr-o bară dreaptă se transformă cu funcția $w = F(z)$ din (1) în cercul Γ_z, aceeași funcțiune $F(z)$ realizează transformarea conformă a

cîmpului H_z, nenul la infinit, plan-paralel și modificat de prezența conductorului circular de rază $|z| = 1$, în cîmpul magnetic H_w, nenul la infinit, plan-paralel și modificat de prezența conductorului cilindric și avînd un contur oarecare Γ_z al secțiunii sale transversale.

Expresia H_w a intensității cîmpului magnetic se obține din (3) și (33):

$$H_w = H_z \frac{1}{F'^*(z)} = H_{\infty z}\left(1 - \frac{1}{z^{*2}}\right)\frac{1}{F'^*(z)}. \tag{34}$$

Intensitatea H_w a cîmpului magnetic este egală cu H_0 la mare depărtare de conductor (cîmp omogen)

$$\lim_{w\to\infty} H_w = H_0, \tag{35}$$

iar în planul $z = x + jy$ intensitatea H_z este de asemenea constantă și egală cu $H_{\infty z}$ la mare depărtare de cilindrul circular ($|z| = 1$), diferind de H_0 printr-o constantă multiplicativă C_1:

$$\lim_{z\to\infty} H_z = H_{\infty z} = C_1 H_0. \tag{36}$$

Dacă se multiplică în ecuația (34) ambii membri cu $F'^*(z)$ și se ia limita expresiei astfel obținute, rezultă pentru constanta C_1:

$$C_1 = \lim_{z\to\infty} F'^*(z). \tag{37}$$

Afluxul de putere aparentă s_t prin unitatea de lungime a barei drepte situată transversal într-un cîmp magnetic armonic în timp și omogen în lipsa barei este:

$$s_t = \frac{(1+j)\alpha}{\varkappa^2 \sigma} H_{oz}^2 \oint_{\Gamma_w} \left(1 - \frac{1}{z^2}\right)\left(1 - \frac{1}{z^{*2}}\right)\frac{1}{F'(z)}\frac{dw}{F'^*(z)} =$$

$$= \frac{(1+j)}{\varkappa^2 \sigma} H_{oz}^2 \oint_{\Gamma_z} \left(1 - \frac{1}{z^2}\right)\left(1 - \frac{1}{z^{*2}}\right)\frac{1}{F'^*(z)} dz =$$

$$= \frac{(1+j)\alpha}{\varkappa^2 \sigma} C_1^2 H_0^2 \oint_{\Gamma_z} \left(1 - \frac{1}{z^2}\right)\left(1 - \frac{1}{z^{*2}}\right)\frac{1}{F'^*(z)} dz = \beta H_0^2 I_z \tag{38}$$

și deci afluxul de putere activă P_t, absorbită pe jumătatea de lungime de bară la efect omogen de proximitate, este

$$P_t = \beta H_0^2 re\, I_z, \tag{39}$$

în care s-a notat cu I_z funcționala complexă

$$I_z = (1+j) C_1^2 \oint_{\Gamma_z} \left(1 - \frac{1}{z^2}\right)\left(1 - \frac{1}{z^{*2}}\right)\frac{1}{F'^*(z)} dz, \tag{40}$$

Pe cercul Γ_z există însă relația $z = e^{j\varphi}$ și deci expresia (40) a funcționalei devine:

$$I_z = 4(1+j)\, C_1^2 \oint_{\Gamma_z} \sin^2 \varphi \frac{1}{F'^*(z)}\, dz. \tag{41}$$

Între expresia (9) a funcționalei complexe A_z din problema curentului axial de aducție în bară și expresia (41) a funcționalei complexe I_z din problema curentului transversal indus prin efect de proximitate uniform, există relația:

$$I'_z = 4\, C_1^2 \sin^2 \varphi\, A'. \tag{42}$$

S-a stabilit deci următoarea teoremă a legăturii între funcționalele complexe I_z și A_z:

$$I_z = 4\, C_1^2 \oint_{\Gamma_z} \sin^2 \varphi\, A'_z dz.$$

Pentru bara dreptunghiulară model (fig. 7) $2a = g$ și $2b = h$, mărimea A'_z din (27) are expresia

$$A'_z = (1+j)\frac{1}{jg}\, E(k_1, \varphi_0) \frac{1}{\sqrt{1 - k_1^2 \sin^2 \varphi}}. \tag{43}$$

Deoarece pentru dreptunghi constanta C_1 din formula (37) are expresia

$$C_1 = -\frac{g}{2\, k\, E(k_1, \varphi_0)}, \tag{44}$$

funcționalei complexă I_z din (41) are expresia

$$I_z = 4\, C_1^2 \oint_{\Gamma_z} \sin^2 \varphi\, A'_z dz =$$

$$= (1+j)\frac{g}{jk^2 E(k_1, \varphi_0)} \times$$

$$\times \int \frac{\sin^2 \varphi}{\sqrt{1 - k_1^2 \sin^2 \varphi}}\, d\varphi = 4(1 +$$

$$+ j)\, g \frac{F\left(k, \frac{\pi}{2}\right) + E'\left(k, \frac{\pi}{2}\right) - E\left(k, \frac{\pi}{2}\right)}{E\left(k, \frac{\pi}{2}\right) - k'^2 F\left(k, \frac{\pi}{2}\right)} =$$

$$= 4(1+j)\, g\, \Phi_1(k), \tag{45}$$

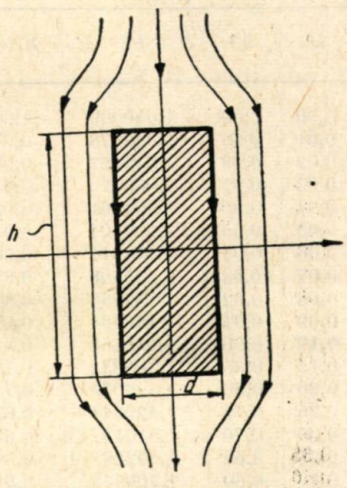


Fig. 7. — Bară dreptunghiulară în cîmp magnetic inițial uniform.

în care s-a notat

$$\Phi_1(k) = \frac{F\left(k, \frac{\pi}{2}\right) + E'\left(k, \frac{\pi}{2}\right) - E\left(k, \frac{\pi}{2}\right)}{E\left(k, \frac{\pi}{2}\right) - k'^2 F\left(k, \frac{\pi}{2}\right)}. \tag{46}$$

Puterea activă P, absorbită de bara dreptunghiulară pe o lungime πd ($d = 2a$), este deci

$$P = \pi h d \frac{H_0^2}{\varkappa^2 \sigma} \Phi_1(k). \tag{47}$$

Factorul de formă k_f al rezistenței echivalente a șarjei se obține împărțind expresia (12) prin puterea

$$P' = \pi d h \frac{\alpha H_0^2}{\varkappa^2 \sigma},$$

pe care ar absorbi-o fîșia de lungime πd și înălțime h a unei plăci de grosime $g = d/2$ prin una din fețele ei cînd e situată în cîmpul magnetic alternativ de pulsație ω și omogen de intensitate efectivă H_0:

$$k_f = \frac{P}{P'} = \Phi_1(k) = \frac{F\left(k, \frac{\pi}{2}\right) + E'\left(k, \frac{\pi}{2}\right) - E\left(k, \frac{\pi}{2}\right)}{E\left(k, \frac{\pi}{2}\right) - k'^2 F\left(k, \frac{\pi}{2}\right)}. \tag{48}$$

Tabela 2

Valorile $\Phi_1(k)$ în funcție de modulul subunitar k

k^2	k'^2	$F + E' - E$	$E' - k^2 F'$	$k_f = \Phi_1(k) = (F + E' - E) / (E' - k^2 F')$
0,00	1,00	1,000000	1,000000	1,000000
0,01	0.99	1,023878	0,979038	1,0457999
0,02	0,98	1,044422	0,961513	1,0862289
0,03	0,97	1,063779	0,946471	1,1239447
0,04	0,96	1,082401	0,929858	1,1640462
0,05	0,95	1,100504	0,915057	1,2026533
0,06	0,94	1,118211	0,900743	1,2414348
0,07	0,93	1,135608	0,886170	1,2814809
0,08	0,92	1,152755	0,873254	1,3200687
0,09	0,91	1,169694	0,859979	1,3601520
0,10	0,90	1,186458	0,846966	1,4008335
0,15	0,85	1,268531	0,785044	1,6158794
0,20	0,80	1,349079	0,727049	1,8555650
0,25	0,75	1,429344	0,671927	2,1272472
0,30	0,70	1,510197	0,619063	2,4394889
0,35	0,65	1,592367	0,568048	2,8032532
0,40	0,60	1,700545	0,518601	3,2790975
0,45	0,55	1,763506	0,470508	3,7481402
0,50	0,50	1,854075	0,423606	4,3768324

Tabela 2 cuprinde valorile factorului de formă $k_f = \Phi_1(k)$ pentru diferite valori ale lui k ($0 < k^2 < 0{,}50$) corespunzînd intervalului $1 < \frac{h}{d} < \infty$ (fig. 8). Pentru a utiliza aceeași tabelă 1 și pentru valorile

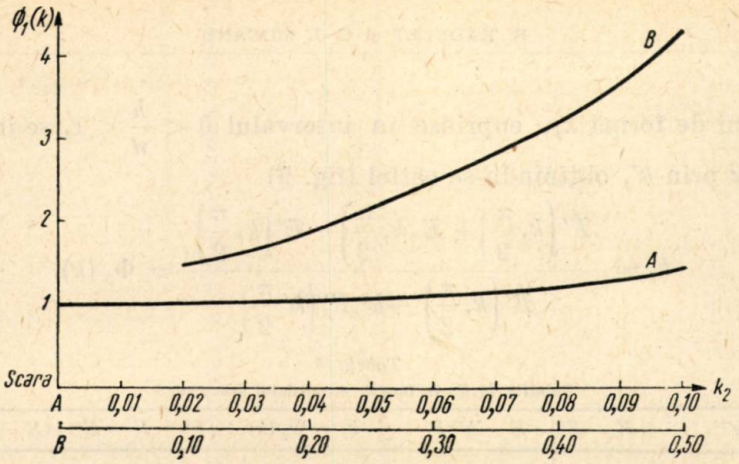


Fig. 8. — Reprezentarea grafică a funcției $\Phi_1 = \Phi_1(k)$.

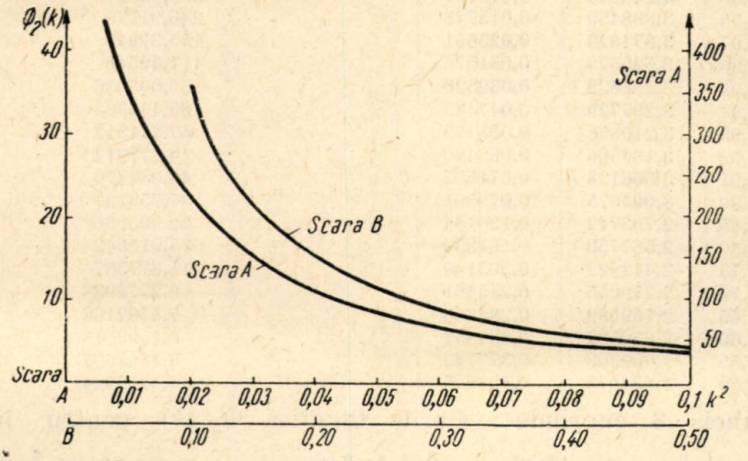


Fig. 9. — Reprezentarea grafică a funcției $\Phi_2 = \Phi_2(k)$.

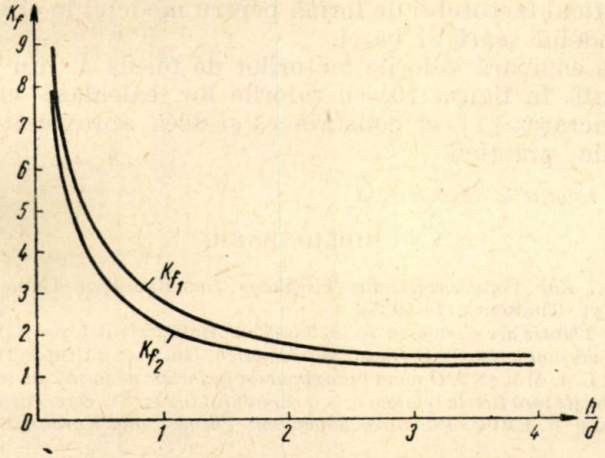


Fig.10. — Reprezentarea grafică a factorului de forma k_{f1} pentru modelul plan și k_{f2} pentru modelul de forma elipsoidului de rotație.

factorului de formă k_f, cuprinse în intervalul $0 < \frac{h}{d} < 1$, se înlocuiește în (13) k prin k', obținîndu-se astfel (fig. 9)

$$k_f = \frac{F'\left(k, \frac{\pi}{2}\right) + E\left(k, \frac{\pi}{2}\right) - E'\left(k, \frac{\pi}{2}\right)}{E'\left(k, \frac{\pi}{2}\right) - k^2 F'\left(k' \frac{\pi}{2}\right)} = \Phi_2(k). \tag{49}$$

Tabela 3

Valorile $\Phi_2(k)$ în funcție de modulul subunitar k

k^2	k'^2	$F' + E - E'$	$E - k'^2 F$	$k_f = \Phi_2(k) + (F' + E - E') / (E - k'^2 F)$
0,00	1,00		0	
0,01	0,99	4,246505	0,011797	359,96524
0,02	0,98	3,888459	0,015748	246,91770
0,03	0,97	3,674876	0,023651	155,37947
0,04	0,96	3,520579	0,031576	111,49543
0,05	0,95	3,398836	0,039520	86,003036
0,06	0,94	3,297729	0,047485	69,446363
0,07	0,93	3,210888	0,055473	57,881852
0,08	0,92	3,134506	0,063480	49,377914
0,09	0,91	3,066128	0,071507	43,083379
0,10	0,90	3,004075	0,079561	37,758198
0,15	0,85	2,755742	0,120154	22,935066
0,20	0,80	2,567750	0,161336	15,915542
0,25	0,75	2,412922	0,203149	11,877587
0,30	0,70	2,279055	0,245661	9,2772938
0,35	0,65	2,159582	0,288863	7,4762168
0,40	0,60	2,050532	0,332881	6,1599675
0,45	0,55	1,959303	0,377747	5,1867637
0,50	0,50	1,854075	0,423606	4,3768324

Tabela 3 cuprinde valorile funcției $\Phi_2(k)$ pentru intervalul $0 < \frac{h}{d} < 1$, respectiv ale factorului de formă k_f corespunzător. În figura 10 s-a trasat graficul factorului de formă pentru modelul în elipsoid de rotație și pentru modelul scurt al barei.

Dacă se compară valorile factorilor de formă k_f din tabelele 2 și 3 și reprezentată în figura 10, cu valorile lor calculate cu aproximația folosită în lucrarea [4] se constată că și acea aproximație e suficientă pentru nevoile practicii.

Primit la redacție la 15 mai 1964

BIBLIOGRAFIE

1. R. RĂDULET, *Zur Vorausberechnung eisenloser Induktionsöfen*. Bull. scientifique École Polyt. Timișoara, **1** (1937).
2. — *Zur Theorie der eisenlosen Induktionsöfen*. Bull. scientif.que Timișoara, **11** (1931).
3. — *Abschirmung eisenloser Hochfrequenzspulen*, Bull. scientifique Timișoara **11** (1945).
4. R. RĂDULET, C. I. MOCANU, *O nouă aproximare a factorilor de formă ai șarjei cuptoarelor de inducție fără fier la refulare netă a curentului indus*. St. cerc. energ. A, **XIV**, *1* (1964).
5. E. JAHNKE und F. EMDE, *Funktionentafeln mit Formeln und Kurven*, Leipzig, 1928.

CALCULUL REZISTENȚEI ÎN ALTERNATIV A BARELOR CU SECȚIUNE POLIGONALĂ LA REFULARE NETĂ A CURENTULUI ELECTRIC

DE

C. I. MOCANU

621.3 : 537.311.5 : 537.311.6

Calculul rezistenței în alternativ a barelor drepte la orice frecvență a curentului electric prin bare este efectuat numai în cîteva cazuri : cilindru, tub, placă infinită fără efect de margine etc. Pentru barele cu secțiune poligonală, la efect pelicular net s-a reușit să se calculeze exact numai rezistența barelor cu secțiune dreptunghiulară.

În lucrare, folosind transformarea conformă pe exteriorul unui cerc se calculează factorul în alternativ k_R ca raport între rezistența în alternativ și rezistența în curent continuu, pentru barele cu secțiune poligonală, obținîndu-se expresii strînse pentru secțiunile poligonal regulate. Factorul în alternativ al barei cu secțiune dreptunghiulară rezultă prin particularizarea expresiei care a fost calculată pentru o secțiune poligonală oarecare.

1. PROBLEMA

Calculul rezistenței în alternativ a barelor drepte pentru orice frecvență a curentului electric de conducție prin bare este efectuat numai în cîteva cazuri : cilindru, tub, placă infinită fără efect de margine, semispațiul conductor infinit omogen sau eterogen în strate etc.

În regim cvasistaționar, intensitățile $\overline{E}$ și $\overline{H}$ ale cîmpurilor electric și magnetic, respectiv densitatea $\overline{J}$ a curentului electric de conducție,

satisfac în mediile omogene și izotrope, de permeabilitate μ și conductivitate σ, o aceeași ecuație cu derivate parțiale

$$\Delta \overline{G} - \varkappa \mu \sigma \frac{\partial G}{\partial t} = 0, \tag{1}$$

unde $\overline{G}$ reprezintă pe $\overline{E}$, pe $\overline{H}$ sau pe $\overline{J}$, iar $\varkappa$ reprezintă coeficientul de raționalizare, egal cu 1 în sistemele de unități de măsură raționalizate și egal cu 4π în cele neraționalizate. Cu $\sigma = 0$, ecuația (1) este valabilă și în exteriorul conductorului, însă numai pentru $\overline{E}$ și $\overline{H}$

$$\Delta \overline{G} = 0. \tag{2}$$

În regim armonic permanent, de pulsație ω, utilizînd reprezentarea în complex $\underline{G}$, formele în complex ale ecuațiilor (1) și (2) sînt

$$\Delta \underline{G} = j \varkappa \mu \omega \sigma \underline{G}; \qquad \Delta \underline{G} = 0. \tag{3}$$

Deoarece în prima din ecuațiile (3) intervine produsul $\mu\omega\sigma$, rezultă că frecvențele înalte au același efect ca o conductivitate mare sau o permeabilitate mare, ultima dînd pentru conductoarele în cîmp magnetic linii de cîmp tangențiale pe suprafețele conductoarelor. La frecvențe destul de înalte, dar care nu depășesc limita pentru o tratare în regim cvasistaționar a problemei, problema exterioară (2) se poate rezolva independent de problema interioară corespunzătoare.

Refularea curentului la frecvențe înalte nu rezultă explicit din ecuația (2) pentru problema interioară. Soluția fundamentală singulară a ecuației lui Helmholtz $\Delta \underline{G} = \underline{\gamma}^2 \underline{G}$ este în problema tridimensională

$$\frac{e^{-\underline{\gamma} r}}{r} = \frac{e^{-(1+j)\alpha r}}{r}; \quad \alpha = \sqrt{\frac{\varkappa \mu \omega \sigma}{2}}; \quad \underline{\gamma} = (1+j)\,\alpha, \tag{4}$$

iar în problema bidimensională

$$\frac{\pi}{2j} H_0^{(2)}(\underline{\gamma} r) = \frac{\pi}{2j} H_0^{(2)}[(1+j)\,\alpha r], \tag{5}$$

în care r este distanța dintre punctul variabil Q și punctul P în care se calculează cîmpul, iar $H_0^{(2)}(\underline{\gamma} r)$ este funcția lui Hankel de speța a doua. Fiindcă soluția fundamentală singulară (4) are pentru $r = 0$ polaritatea $\frac{1}{r}$, se poate construi, pentru ecuația (3) a problemei interioare, o teorie a potențialului analogă potențialului newtonian pentru ecuația lui Laplace:

$$\underline{G}(P) = \frac{1}{4\pi} \int_v \frac{e^{-(1+j)\alpha r}}{r} \overline{F}(Q)\, dv, \tag{6}$$

în care $\overline{F}(Q)$ este o funcție de punct. Din expresia (6) rezultă că $\overline{G}(P)$ se anulează pentru valori mari ale lui $\underline{\gamma}$:

$$\lim_{\underline{\gamma} \to \infty} \overline{G}(P) = 0. \tag{7}$$

De asemenea, în problema bidimensională, soluția fundamentală singulară (5) se anulează cînd $\underline{\gamma}$ tinde către infinit. Pentru valori mari ale lui α, adică la frecvență înaltă, la conductivitate mare sau la permeabilitate mare, intensitatea $\overline{E}_i$ a cîmpului electric, intensitatea $\overline{H}_i$ a cîmpului magnetic și densitatea $\overline{J}$ de curent sînt nule în conductor. Soluțiile fundamentale singulare (4) și (5) sînt diferite de zero la valori mari ale lui α numai dacă în exponentul soluțiilor, $r \to 0$,

$$\lim_{\substack{\alpha \to \infty \\ r \to 0}} \alpha r \neq 0. \tag{8}$$

Pentru valori mari ale lui α are loc deci un fenomen de refulare a curentului pe un strat de grosime mică la periferia conductorului, cunoscut pentru curentul de aducție sub denumirea de efect pelicular net.

La refulare netă a curentului intensitatea $\overline{H}$ a cîmpului magnetic fiind nulă în conductoare și din teorema de refracție a liniilor de cîmp magnetic urmează că conturul secțiunii transversale prin conductoarele drepte este o linie de cîmp magnetic, în exteriorul conductoarelor cîmpul magnetic poate fi deci reprezentat pe modelul cîmpului electrostatic, după corespondența

$$J \to \rho_A, \tag{9}$$

în care ρ_A este densitatea de suprafață a sarcinii electrice, ceea ce implică admiterea unei adîncimi constante de pătrundere a cîmpului electromagnetic.

Reducerea problemei refulării nete a curentului în conductoare la o problemă exterioară permite aplicarea metodelor funcțiilor de variabilă complexă și transformărilor conforme.

H. B. Dwight [1] și S. I. Haefner [2] au arătat că, pentru conductoarele drepte, raportul k_R între rezistența în curent alternativ R_a și rezistența în curent continuu R_0 ale unității de lungime a unei bare de formă dată a secțiunii

$$k_R = \frac{R_a}{R_0} \tag{10}$$

este constant dacă este constantă mărimea adimensională p:

$$p = \sqrt{4\mu\omega\sigma A_0}, \tag{11}$$

în care A_0 este aria secțiunii transversale a barei. Rezultă că același efect pelicular, caracterizat prin factorul în alternativ k_R, se obține în bara cu secțiune mare la frecvență joasă și în bara cu secțiune mică și de aceeași formă la frecvență înaltă.

Metoda transformărilor conforme a fost aplicată pentru calculul rezistenței în alternativ a barelor de J. D. Cockroft [3], W. M. Page [4] și H. B. Dwight [1]. În lucrările menționate s-a folosit transformarea conformă a cîmpului pe semiplanul superior, în care — dificultățile de calcul crescînd cu numărul de fețe ale conductoarelor prismatice — s-a rezolvat numai problema barei dreptunghiulare.

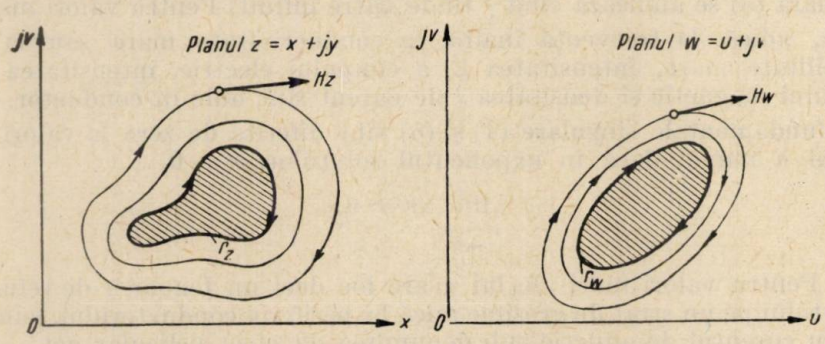


Fig. 1. — Reprezentarea conformă a domeniului (*a*) din exteriorul curbei Γ_z pe domeniul (*b*) din exteriorul curbei Γ_w.

În această lucrare, autorul folosește transformarea conformă pe exteriorul unui cerc și soluționează problema rezistenței în alternativ a barelor cu secțiune poligonală regulată și cu oricîte laturi, la refulare netă a curentului.

2. FUNCȚIONALA COMPLEXĂ L_w PENTRU CONDUCTORUL DREPT PARCURS DE CURENT DE ADUCȚIE

Fie un conductor drept, omogen și izotrop, avînd secțiunea transversală prin conductor, mărginită de o curbă Γ_z (fig. 1), parcurs de un curent electric sinusoidal în timp de pulsație ω reprezentat în complex $\underline{I}$. Orice curbă Γ_z din planul complex $z = x + jy$ se poate transforma într-o curbă Γ_w din planul complex $w = u + jv$, prin funcția

$$z = F(w), \tag{12}$$

iar cîmpul magnetic H_z din exteriorul conductorului avînd conturul Γ_z al secțiunii transversale se transformă în cîmpul magnetic H_w din exteriorul conductorului avînd conturul Γ_w al secțiunii transversale, tensiunile magnetomotoare elementare fiind constante:

$$H_z \, \mathrm{d}z^* = H_w \, \mathrm{d}w^*. \tag{13}$$

Din relația (13) rezultă expresia intensității H_z a cîmpului magnetic:

$$H_z = H_w \left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right)^* = H_w \frac{1}{F'^*(w)}. \tag{14}$$

Cîmpul H_w al conductorului circular Γ_w parcurs de același curent I derivă din potențialul magnetic complex V_{mw}:

$$V_{mw} = j \frac{\varkappa I}{2\pi} \ln \frac{1}{w} \tag{15}$$

și are expresia

$$H_w = -\frac{\mathrm{d}V_{mw}}{\mathrm{d}w} = j \frac{\varkappa I}{2\pi w}. \tag{16}$$

Dacă conductorul circular Γ_w are raza egală cu unitatea ($w = 1$), într-un punct pe conductor $w = e^{j\varphi}$ (φ fiind unghiul polar) cîmpul $H_{\Gamma w}$ are expresia:

$$H_{\Gamma w} = j \frac{\varkappa I}{2\pi} e^{-j\varphi}. \tag{17}$$

Afluxul de putere aparentă P_{ap} pe unitatea de lungime a barei se calculează cu vectorul $S_{\Gamma z}$ al lui Poynting [5]:

$$S_{\Gamma z} = \frac{(1+j)\,\alpha}{\varkappa^2 \sigma} H_z H_z^* = \frac{(1+j)\,\alpha}{\varkappa^2 \sigma} H_w^2 \left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right)\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right)^* \tag{18}$$

și are expresia

$$P_a = \oint_{\Gamma z} S_{\Gamma z}\, \mathrm{d}z = \frac{(1+j)\,\alpha}{\varkappa^2 \sigma} \oint_{\Gamma z} H_w H_w \left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right)\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right)^* \mathrm{d}z =$$

$$= \frac{(1+j)\,\alpha}{\varkappa^2 \sigma} \oint_{\Gamma z} H_w H_w \left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right)^* \mathrm{d}w = \frac{(1+j)\,\alpha I^2}{4\pi^2 \sigma} \oint_{\Gamma z} \frac{\mathrm{d}w}{F'^*(w)} = \eta L_w, \tag{19}$$

în care s-a notat cu L_w funcționala complexă,

$$L_w = (1+j) \oint_{\Gamma w} \frac{\mathrm{d}w}{F'^*(w)} \tag{20}$$

și cu η mărimea reală,

$$\eta = \frac{\alpha I^2}{4\pi^2 \sigma}. \tag{21}$$

Rezistența în curent continuu R_0 pe unitatea de lungime a barei cu aria A_0 a secțiunii transversale fiind

$$R_0 = \frac{1}{\sigma A_0}, \tag{22}$$

factorul în alternativ k_R al rezistenței este egal cu partea reală a raportului dintre puterea P_a (19) și puterea $P_0 = R_0 I^2$ absorbită în curent continuu:

$$k_R = \frac{R_a}{R_0} = re \frac{P_a}{P_0} = \frac{\alpha A_0}{4\pi^2} re\, L_w, \tag{23}$$

iar rezistența în alternativ R_a a unității de lungime a barei este

$$R_a = k_R R_0. \tag{24}$$

3. REZISTENȚA ÎN ALTERNATIV A BAREI PRISMATICE CU SECȚIUNE POLIGONALĂ

Funcția $z = F(w)$, care transformă domeniul din exteriorul conturului poligonal Γ_z (fig. 2*a*) din planul z pe domeniul din exteriorul cercului Γ_w cu raza unitate $|w| = 1$ (fig. 2*b*), este

$$z = C\int \prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{w_k}{w}\right)^{\alpha_k} dw + D, \tag{25}$$

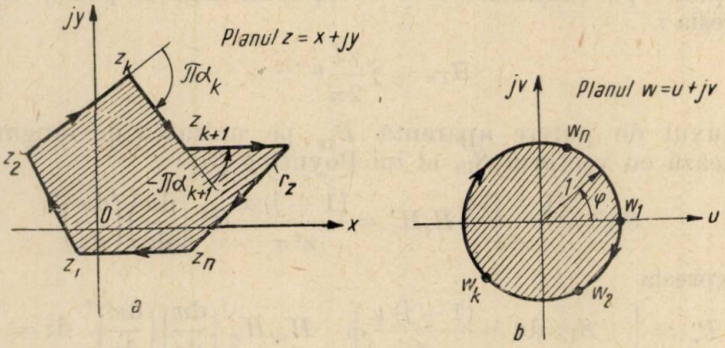


Fig. 2. — Reprezentarea conformă a cîmpului din exteriorul unui poligon pe exteriorul unui cerc.

în care :

α_k sînt rapoartele prin π ale unghiurilor exterioare, pozitive sau negative, după cum unghiurile dau convexități sau concavități la parcurgerea conturului, în sensul în care cîmpul rămîne permanent la stînga, constantele α_k satisfac condiția,

$$\sum \alpha_k = 2\,; \tag{26}$$

w_k — constante complexe corespunzînd prin transformarea (25) vîrfurilor z_k ale poligonului și satisfac condiția

$$\sum \alpha_k w_k = 0\,; \tag{27}$$

C — o constantă de scară și de rotație a conturului poligonal Γ_z, și

D — o constantă care depinde de alegerea poziției unuia dintre vîrfurile poligonului.

Funcționala complexă L_w pentru poligonul Γ_z se calculează cu formulele (20) și (25) :

$$L_w = (1+j)\frac{1}{C^*}\oint_{\Gamma_w} \prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{w_k^*}{w^*}\right)^{-\alpha_k} dw =$$

$$= (1+j)\frac{1}{C^*}\oint_{\Gamma_w} \prod_{k=1}^{n}(w^* - w_k^*)^{-\alpha_k} w^{*-2}\, dw. \tag{28}$$

Deoarece, pe cercul Γ_w, $w = e^{j\varphi}$, formula (28) a funcționalei L_w se exprimă în funcție de unghiul polar φ cum urmează :

$$L_w = j\,(1+j)\,\frac{1}{C^*}\oint_{\Gamma_w} e^{-j\varphi}\prod_{k=1}^{n}(e^{-j\varphi}-e^{-j\varphi_k})^{-\alpha_k}\,\mathrm{d}\varphi. \tag{29}$$

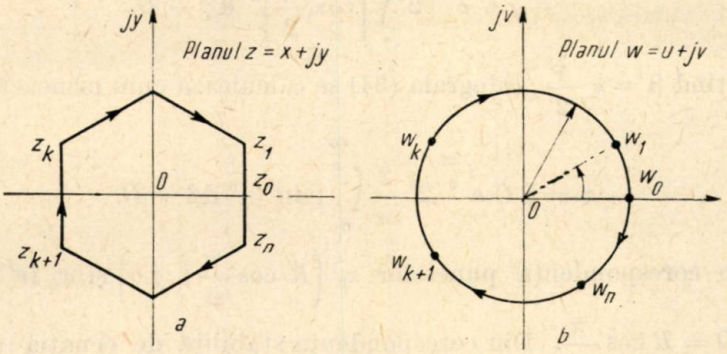


Fig. 3. — Reprezentarea conformă a cîmpului din exteriorul unui poligon regulat pe exteriorul unui cerc.

Pentru poligonul regulat Γ_z cu n laturi $l = 2a$ și rază R a cercului circumscris (fig. 3), constantele care intervin în integrala (25) au valorile :

$$\alpha_k = \frac{2}{n}\,;\; w = e^{j\left(\frac{\pi}{n}+\varphi_k\right)}\,;\; \varphi_k = (k-1)\,\frac{2\pi}{n}\,;\; k = 1, 2, \ldots, n, \tag{30}$$

ar integrala (31) are forma

$$z = C\int_{\Gamma_w} w^{-2}\prod_{k=1}^{n}\left(w - e^{j\left[\frac{\pi}{n}+(k-1)\frac{2\pi}{n}\right]}\right)^{\frac{2}{n}}\mathrm{d}w + D =$$

$$= C\,e^{j\frac{2\pi}{n}}\int w^{-2}\prod_{k=1}^{n}\left(w\,e^{-j\frac{\pi}{n}} - e^{j(k-1)\frac{2\pi}{n}}\right)^{\frac{2}{n}}\mathrm{d}w + D. \tag{31}$$

Însă $e^{jk\frac{2\pi}{n}}$ este rădăcina k a ecuației

$$\left(w\,e^{-j\frac{\pi}{n}}\right)^n - 1 = 0\,;\; w^n + 1 = 0 \tag{32}$$

și deci funcția (31) $z = F(w)$ se transformă astfel :

$$z = C\,e^{j\frac{2\pi}{n}}\int w^{-2}\left[w^n+1\right]^{\frac{2}{n}}\mathrm{d}w + D. \tag{33}$$

Pe cercul Γ_w, integrala (33) are expresia

$$z = C\, e^{j\frac{2\pi}{n}} \int e^{-2j\varphi} \left[e^{jn\varphi} + 1\right]^{\frac{2}{n}} j e^{j\varphi}\, d\varphi + D =$$

$$= j\, C\, e^{j\frac{2\pi}{n}} 2^{\frac{2}{n}} \int \left[\cos\frac{n\varphi}{2}\right]^{\frac{2}{n}} d\varphi + D. \tag{34}$$

Notînd $\beta = n\,\frac{\varphi}{2}$, integrala (34) se calculează cum urmează :

$$z = j\, C\, e^{j\frac{2\pi}{n}} 2^{\frac{2}{n}} \frac{2}{n} \int_0^{\frac{n\varphi}{2}} [\sin\beta]^{\frac{2}{n}}\, d\beta + D. \tag{35}$$

Din corespondența punctelor $z_0\left(R\cos\frac{\pi}{n};\ j\,o\right)$ și $w_0\,(e^{j\,o})$ (fig. 3), rezultă $D = R\cos\frac{\pi}{n}$. Din corespondența stabilită de ecuația (35) între punctul $z_1\left(R\cos\frac{\pi}{n},\ j\,a\right)$ și punctul $w\left(e^{j\frac{\pi}{n}}\right)$, rezultă, luînd $\varphi = \frac{\pi}{n}$,

$$R\cos\frac{\pi}{n} + j\,a = C\, e^{j\frac{2\pi}{n}}\, j\, 2^{\frac{2}{n}} \frac{2}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\sin\beta]^{\frac{2}{n}}\, d\beta + R\cos\frac{\pi}{n}. \tag{36}$$

Integrala din (37) se calculează astfel :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} [\cos x]^m\, dx = \frac{\pi}{m\,2\cdot 2^m} \frac{\Gamma(1+m)}{\Gamma^2\left(1+\frac{m}{2}\right)};\quad re\,(m) > -1, \tag{37}$$

în care $\Gamma(1+m)$ este funcția gamma a lui Legendre, definită de relația

$$\Gamma(1+m) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(m+1)(m+2)\cdots(m+n)}\, n^m. \tag{38}$$

Luînd în (37) pentru constanta m valoarea $m = \frac{2}{n}$ $(n > 3)$, din relația (36) se determină constanta C :

$$C = \frac{n\,a\,\Gamma^2\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\pi\, j\, e^{\frac{2\pi}{n}j}\,\Gamma\left(1+\frac{2}{n}\right)}. \tag{39}$$

Funcția $z = F(w)$ — care transformă conform cîmpul magnetic din exteriorul unei bare drepte cu secțiunea poligonal-regulată cu n laturi, parcursă de curent de aducție, pe exteriorul cilindrului circular cu raza unitate, parcurs de curent de aducție avînd aceeași intensitate I — se obține din relațiile (33) și (39) :

$$z = \frac{n\,a\,\Gamma^2\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\pi\,j\,\Gamma\left(1+\frac{2}{n}\right)} \int w^{-2}\,(w^n+1)^{\frac{2}{n}}\,dw + R\cos\frac{\pi}{n}. \tag{40}$$

Pe cercul Γ_w, funcția de transformare se obține înlocuind constanta C din (39) în formula (36) :

$$z_w = \frac{2\cdot 2^{\frac{2}{n}}\,a\,\Gamma^2\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\pi\,\Gamma\left(1+\frac{2}{n}\right)} \int_0^{\frac{n\varphi}{2}} [\cos\beta]^{\frac{2}{n}}\,d\beta + R\cos\frac{\pi}{n}. \tag{41}$$

Funcționala complexă L_w se calculează din (29) și (41) astfel :

$$L_w = (1+j)\frac{\pi}{n\,a}\,\frac{\Gamma\left(1+\frac{2}{n}\right)}{\Gamma^2\left(1+\frac{1}{n}\right)}\,(2)^{-\frac{2}{n}}\,\frac{2}{n}\int_0^{\frac{n\varphi}{2}} [\cos\beta]^{-\frac{2}{n}}\,d\beta. \tag{42}$$

Dacă în limita superioară de integrare se ia $\varphi = \frac{\pi}{n}$, integrala (42) se calculează cu formula (37), iar funcționala L_w are expresia :

$$L_w = (1+j)\frac{2\pi^2}{n\,a}\,\frac{\Gamma\left(1+\frac{2}{n}\right)\Gamma\left(1-\frac{2}{n}\right)}{\Gamma^2\left(1+\frac{1}{n}\right)\Gamma^2\left(1-\frac{1}{n}\right)}. \tag{43}$$

Întrucît aria A_0 a secțiunii transversale prin bară este

$$A = n\,R^2\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n} = n\,\frac{l^2}{4}\operatorname{cotg}\frac{\pi}{n}, \tag{44}$$

formula factorului în alternativ k_R al rezistenței se calculează din expresiile (23), (43) și (44), în funcție de raza R a cercului circumscris, cum urmează :

$$k_R = \frac{\alpha A_0}{4\pi^2}\,re\,L_w = \frac{\alpha R}{2}\cos\frac{\pi}{n}\,\frac{\Gamma\left(1+\frac{2}{n}\right)\Gamma\left(1-\frac{2}{n}\right)}{\Gamma^2\left(1+\frac{1}{n}\right)\Gamma^2\left(1-\frac{1}{n}\right)}, \tag{45}$$

iar în funcție de latura $l = 2a$ a poligonului astfel :

$$k_R = \frac{\alpha A_0}{4\pi^2} \, re \, L_w = \frac{\alpha l}{4} \operatorname{cotg} \frac{\pi}{n} \frac{\Gamma\left(1+\frac{2}{n}\right)\Gamma\left(1-\frac{2}{n}\right)}{\Gamma^2\left(1+\frac{1}{n}\right)\Gamma^2\left(1-\frac{1}{n}\right)}. \tag{46}$$

În funcție de mărimea adimensională p (11), formula factorului în alternativ k_R al rezistenței este deci :

$$k_R = p \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{n} \sqrt{\frac{\pi}{n \sin \frac{2\pi}{n}} \frac{\Gamma\left(1+\frac{2}{n}\right)\Gamma\left(1-\frac{2}{n}\right)}{\Gamma^2\left(1+\frac{1}{n}\right)\Gamma^2\left(1-\frac{1}{n}\right)}}. \tag{47}$$

O verificare a expresiei factorului k_R se poate obține prin creșterea la infinit a numărului de laturi n al poligonului, astfel că bara prismatică trece în cilindrul circular, iar din formula (45) trebuie să rezulte factorul k_R pentru cilindrul circular :

$$\lim_{n\to\infty} k_R = \lim \frac{\alpha R}{2} \cos \frac{\pi}{n} \frac{\Gamma\left(1+\frac{2}{n}\right)\Gamma\left(1-\frac{2}{n}\right)}{\Gamma^2\left(1+\frac{1}{n}\right)\Gamma^2\left(1-\frac{1}{n}\right)} =$$

$$= \frac{\alpha R}{2} \frac{\Gamma^2(1)}{\Gamma^4(1)} = \frac{\alpha R}{2}, \tag{47a}$$

adică chiar formula lui Kelvin-Sommerfeld.

Fiecare dintre formulele (45), (46) și (47) pentru calculul rezistenței în alternativ a barelor cu secțiune poligonală regulată au o formă strînsă, funcțiile gamma fiind tabelate [7] pentru orice valoare a lui n.

Pentru bara avînd conturul secțiunii transversale de forma triunghiului echilateral $n = 3$ [7] :

$$\Gamma\left(1+\frac{1}{3}\right) = 0{,}8929795116\,; \quad \Gamma\left(1-\frac{1}{3}\right) = 1{,}3541179395,$$

$$\Gamma\left(1+\frac{2}{3}\right) = 0{,}9027452930\,; \quad \Gamma\left(1-\frac{2}{3}\right) = 2{,}6789385348,$$

factorul în alternativ k_{R3} are expresia

$$k_{R3} = p \frac{\cos \frac{\pi}{3}}{2} \sqrt{\frac{\pi}{3 \sin \frac{2\pi}{3}} \frac{\Gamma\left(1+\frac{2}{3}\right)\Gamma\left(1-\frac{2}{3}\right)}{\Gamma^2\left(1+\frac{1}{3}\right)\Gamma^2\left(1-\frac{1}{3}\right)}} = 0{,}454847 \; p. \tag{48}$$

Pentru bara cu secțiune pătrată $n = 4$ [7]:

$$\Gamma\left(1+\frac{1}{4}\right) = 0{,}9064024769\,; \quad \Gamma\left(1-\frac{1}{4}\right) = 1{,}2254167027\,;$$

$$\Gamma\left(1+\frac{1}{2}\right) = 0{,}8862269255\,; \quad \Gamma\left(1-\frac{1}{2}\right) = 1{,}772453851,$$

factorul în alternativ k_{R4} are expresia:

$$k_{R4} = p\,\frac{\cos\frac{\pi}{4}}{2}\sqrt{\frac{\pi}{4\sin\frac{\pi}{2}}\,\frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma^2\left(1+\frac{1}{4}\right)\Gamma^2\left(1-\frac{1}{4}\right)}} = 0{,}398501\ p. \qquad (49)$$

Pentru bara cu secțiunea un poligon regulat cu $n = 10$ laturi [7]:

$$\Gamma\left(1+\frac{1}{5}\right) = 0{,}9182\,; \quad \Gamma\left(1-\frac{1}{5}\right) = 1:0{,}85894\,;$$

$$\Gamma\left(1+\frac{1}{10}\right) = 0{,}9514\,; \quad \Gamma\left(1-\frac{1}{10}\right) = 1:0{,}93578,$$

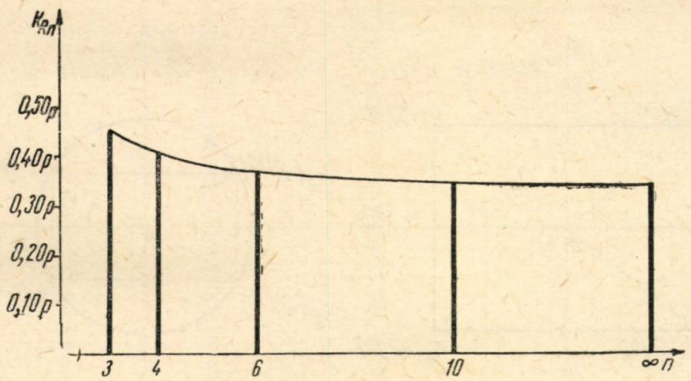


Fig. 4. — Variația factorului de formă k_f cu numărul de laturi ale poligonului.

factorul în alternativ k_{R10} are expresia

$$k_{R10} = p\,\frac{1}{2}\,\cos\frac{\pi}{10}\sqrt{\frac{\pi}{10\sin\frac{\pi}{5}}\,\frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{5}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{5}\right)}{\Gamma^2\left(1+\frac{1}{10}\right)\Gamma^2\left(1-\frac{1}{10}\right)}} =$$

$$= 0{,}35463829\ p. \qquad (50)$$

Dacă se compară factorul în alternativ k_{R10} cu factorul K_{R0} al cilindrului circular (47 *a*)

$$K_{R0} = \frac{\alpha R}{2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\, p = 0{,}35357678\, p,$$

rezultă că abaterea ce se face calculînd rezistența în alternativ a conductoarelor prismatice avînd secțiunile poligonale regulate cu $n > 10$ cu formula (50) este mai mică decît 0,35%. În figura 4 s-a reprezentat grafic factorul în alternativ k_{Rn} al barelor prismatice cu secțiunile poligonale regulate cu n laturi.

Bara prismatică cu secțiunea în poligon regulat cu cea mai mare rezistență în alternativ, la $p = ct$ și refulare netă a curentului, o are bara cu secțiunea în triunghi echilateral și, pe măsură ce numărul de laturi crește, rezistența scade către valoarea minimă a rezistenței la cilindrul circular

4. REZISTENȚA ÎN ALTERNATIV A BAREI CU SECȚIUNE DREPTUNGHIULARĂ

Pentru bara cu secțiune dreptunghiulară, avînd laturile $2a$ și $2b$ (fig. 5), constantele α_k care intervin în integrala (25) a lui Christoffel și Schwarz au valorile

$$\alpha_k = \frac{1}{2};\quad k = 1, 2, 3, 4.$$

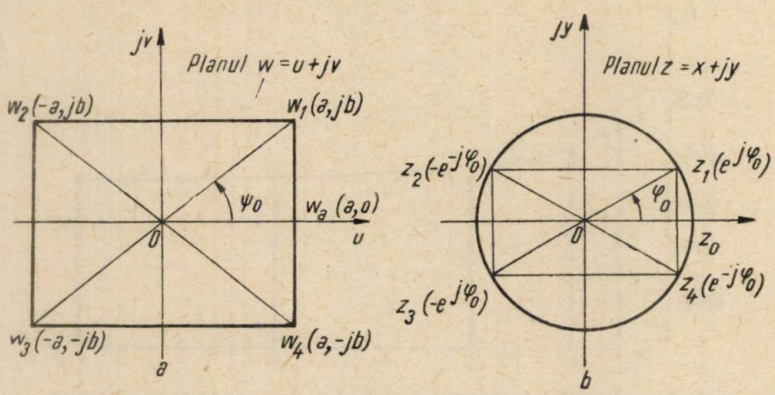


Fig. 5. — Reprezentarea conformă a cîmpului din exteriorul unui dreptunghi pe exteriorul cercului cu raza unitate.

Funcția $z = F(w)$ — care transformă conform exteriorul dreptunghiului din planul z, avînd centrul în origine, latura $2a$ orientată după axa reală x și latura $2b$ orientată după axa imaginară jy (fig. 5), în exteriorul cercului Γ_w din planul w, avînd raza unitate și centrul în origine (fig. 5*b*) — este

$$z = C\int w^{-2} \prod_{k=1}^{4} (w - w_k)^{\frac{1}{2}}\, dw + D. \qquad (51)$$

Trei dintre constantele w_k pot fi alese arbitrar,

$$w_1 = e^{j\varphi_0}; \qquad w_2 = e^{-j\varphi_0}; \qquad w_3 = -e^{j\varphi_0}, \tag{52}$$

iar din condiția (27), pe care trebuie s-o verifice constantele w_k, se obține constanta w_4:

$$w_4 = -(w_1 + w_2 + w_3) = -e^{-j\varphi_0}, \tag{53}$$

adică punctul w_4 este situat pe cercul Γ_w, diametral cu punctul w_2 (fig. 5).

Cu valorile constantelor w_k din (52) și (53), funcția $z = F(w)$ (51) se exprimă astfel:

$$z = C \int w^{-2} (w^2 - e^{2j\varphi_0})^{\frac{1}{2}} (w^2 - e^{-2j\varphi_0})^{\frac{1}{2}} \, dw + D. \tag{54}$$

Pe cercul Γ_w, funcția $z = F(w)$ are forma

$$z_{\Gamma_w} = C \int j \, e^{j\varphi} \cdot e^{-2j\varphi} (e^{2j\varphi} - e^{2j\varphi_0})^{\frac{1}{2}} (e^{2j\varphi} - e^{-2j\varphi_0})^{\frac{1}{2}} \, d\varphi + D =$$

$$= -2 \, C \, j \, k \int_0^{\varphi} \sqrt{1 - k_1^2 \sin^2 \varphi} \, d\varphi + D =$$

$$= -2 \, C \, j \, k \, E(k_1, \varphi) + D, \tag{55}$$

în care s-a notat cu k_1 modulul supraunitar al integralei eliptice de-a doua speță $E(k_1, \varphi)$,

$$k_1 = \sqrt{\frac{2}{1 - \cos 2\varphi_0}} = \frac{1}{\sin \varphi_0} = \frac{1}{k}, \tag{56}$$

iar k este valoarea reciprocă a acestuia.

Din corespondența punctelor $z_a(a, o)$ și $w_a(e^{jo})$ se determină constanta D:

$$a = -2 \, C \, j \, k \, E(k_1, 0) + D; \quad D = a. \tag{57}$$

Din corespondența punctelor $z_1(a, jb)$ și $w_1(e^{jo})$ se calculează constanta C:

$$a + jb = -2 \, C \, j \, k \, E(k_1, \varphi_0) + a; \quad C = -\frac{b}{2 \, k \, E(k_1, \varphi_0)}. \tag{58}$$

Funcția $z = F(w)$ — care transformă conform cîmpul magnetic din exteriorul unei bare drepte cu secțiune dreptunghiulară, parcursă de curent de aducție, pe exteriorul cilindrului circular cu raza unitate, parcurs de curent de aducție avînd aceeași intensitate I — se obține din expresiile (55) și (58):

$$z = -\frac{b}{2 \, k \, E(k_1, \varphi_0)} \int w^{-2} (w^2 - e^{2j\varphi_0})^{\frac{1}{2}} (w^2 - e^{-2j\varphi_0}) \, dw + a. \tag{59}$$

Pe cercul Γ_w, funcția de transformare (59) se obține înlocuind constanta C în ecuația (55):

$$z = jb \frac{E(k_1, \varphi)}{E(k_1, \varphi_0)} + a. \tag{60}$$

Argumentul φ_0 se calculează identificînd prin ecuația (60) punctele z_b (o, jb) și w_b $(e^{j\frac{\pi}{2}})$,

$$jb = jb \frac{E\left(k_1, \frac{\pi}{2}\right)}{E(k_1, \varphi_0)} + a. \tag{61}$$

Întrucît sînt tabelate numai integralele eliptice de modul subunitar $k < 1$, relațiile de calcul ale integralei eliptice incomplete $E(k_1, x)$ și ale integralei eliptice complete $E\left(k_1, \frac{\pi}{2}\right)$, ambele de speța a doua și modul supraunitar $k_1 = \frac{1}{k}$, sînt [6]:

$$E(k_1, x) = \frac{1}{k}[E(k, y) - k'^2 F(k, y)] \tag{62}$$

$$E\left(k_1, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{k}\left[E\left(k, \frac{\pi}{2}\right) - k'^2 F\left(k, \frac{\pi}{2}\right) + j\left(E'\left(k, \frac{\pi}{2}\right) - k^2 F'\left(k, \frac{\pi}{2}\right)\right)\right], \tag{63}$$

în care s-a notat:

$k = \frac{1}{k_1} = \sin \varphi_0$, modulul subunitar;

$k'^2 = \sqrt{1 - k^2} = \cos \varphi_0$, modulul complementar subunitar;

$F'\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = F\left(k', \frac{\pi}{2}\right)$ și $E'\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = E\left(k', \frac{\pi}{2}\right)$,

integralele eliptice complete de prima și a doua speță, de modulul complementar subunitar;

$y = \arcsin [k_1 \sin x]$, argumentul de transformare a integralelor incomplete de prima speță $F(k, y)$ și a doua speță $E(k, y)$.

Pentru argumentul $x = \varphi_0$ argumentul y are valoarea

$$y = \arcsin [k_1 \sin \varphi_0] = \sin^{-1} [\sin \varphi_0 / \sin \varphi_0] = \frac{\pi}{2} \tag{64}$$

și ecuația (61) se calculează astfel:

$$jb_{\alpha} = j\,b\,\frac{\frac{1}{k}\left[E\left(k, \frac{\pi}{2}\right) - k'^2 F\left(k, \frac{\pi}{2}\right) + j\left(E'\left(k, \frac{\pi}{2}\right) - k^2 F'\left(k, \frac{\pi}{2}\right)\right)\right]}{\frac{1}{k}\left[E\left(k, \frac{\pi}{2}\right) - k'^2 F\left(k, \frac{\pi}{2}\right)\right]} + a$$

sau

$$\frac{a}{b} = \frac{E'\left(k, \frac{\pi}{2}\right) - k^2 F'\left(k, \frac{\pi}{2}\right)}{E\left(k, \frac{\pi}{2}\right) - k'^2 F\left(k, \frac{\pi}{2}\right)}. \tag{65}$$

Din ecuația (65) se obține modulul k, deci și argumentul φ_0 în funcție de raportul $\frac{b}{a}$, adică $\varphi_0 = \varphi_0(\psi)$ (fig. 5). Ecuația (65) se rezolvă dînd

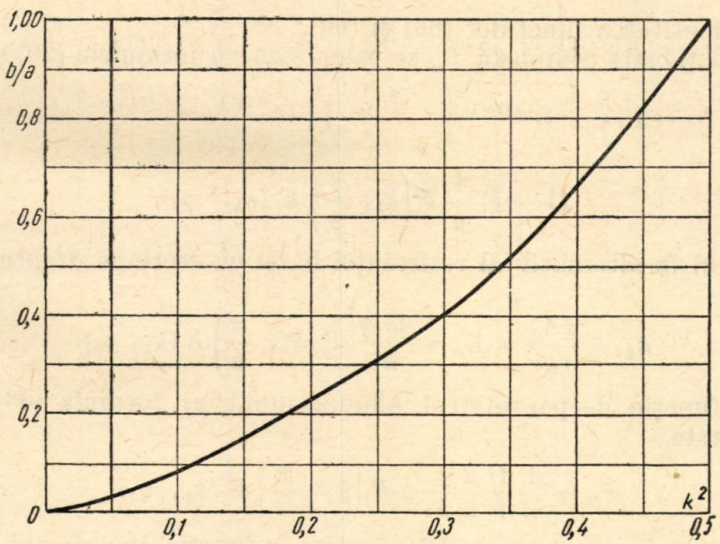


Fig. 6. — Reprezentarea grafică a modulului $k = f(b/a)$.

diferite valori pentru k ($0 < k < 1$), rezultînd valorile corespunzătoare ale raportului $\frac{b}{a}$. În figura 6 s-a reprezentat grafic $k = f(b/a)$.

O primă verificare a funcției de transformare (60) a dreptunghiului pe cerc se obține pentru cazul particular al pătratului, cînd funcția (60) trebuie să fie identică cu funcția (41), obținută prin particularizarea

transformării poligonului regulat cu $n = 4$ laturi. Funcția de transformare (41) are pentru $n = 4$ următoarea expresie:

$$z = \frac{2 \cdot 2^{\frac{1}{2}} a \, \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{4}\right)}{\pi \, \Gamma\left(1 + \frac{1}{2}\right)} \int [\sin \beta]^{\frac{1}{2}} \, d\beta. \tag{66}$$

Dacă se utilizează transformarea lui Legendre [6]

$$F\left(k, \frac{\pi}{2}\right) E'\left(k, \frac{\pi}{2}\right) + F'\left(k, \frac{\pi}{2}\right) E\left(k, \frac{\pi}{2}\right) - F\left(k, \frac{\pi}{2}\right) F'\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

și se ține cont de relația lui Jacobi [6] între funcția gamma $\Gamma\left(1 + \frac{1}{4}\right)$ și integrala eliptică de speța întîi și modul $k = \sin \varphi_0 = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$$F\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = F'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{4}\right),$$

rezultă identitatea funcțiilor (66) și (60).

Funcționala complexă L_w se calculează cu formulele (29) și (60)

$$L_w = j\,(1 + j)\, C^{*-1} \int_{\Gamma_w} e^{-j\varphi} \prod_{k=1}^{4} (e^{-j\varphi} - e^{-j\varphi_k})^{-\alpha_k} \, d\varphi =$$

$$(1 - j) \frac{4}{b} F\left(k_1, \frac{\pi}{2}\right) E\,(k_1, \varphi_0), \tag{67}$$

iar factorul în alternativ al rezistenței barei cu secțiune dreptunghiulară este

$$k_R = \frac{\alpha A_0}{4\pi^2} re\, L_w = \frac{4\alpha a}{\pi^2} F\left(k_1, \frac{\pi}{2}\right) E\,(k_1, \varphi_0). \tag{68}$$

În funcție de parametrul adimensional p, formula (68) a factorului k_R este,

$$k_R = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{2}{\pi} \frac{a}{b}}\, p\, F\left(k_1, \frac{\pi}{2}\right) E\,(k_1, \varphi_0). \tag{69}$$

Dacă se exprimă integralele eliptice în funcție de modulul subunitar k, expresiile (67), (68) și (69) se transformă pe baza relațiilor (62) și (63) pentru integrala $E\left(k_1, \frac{\pi}{2}\right)$ și pe baza următoarei relații pentru integrala $F\left(k_1, \frac{\pi}{2}\right)$ [6]:

$$F\left(k_1, \frac{\pi}{2}\right) = k\left[F\left(k, \frac{\pi}{2}\right) + j\, F'\left(k, \frac{\pi}{2}\right)\right], \tag{70}$$

cum urmează :

$$L_w = (1 - j)\frac{4}{b}\left[F\left(k, \frac{\pi}{2}\right) + jF'\left(k, \frac{\pi}{2}\right)\right]\left[E\left(k, \frac{\pi}{2}\right) - k'^2 F\left(k, \frac{\pi}{2}\right)\right]; \quad (71)$$

$$k_R = \frac{4\alpha a}{\pi^2}\left[F\left(k, \frac{\pi}{2}\right) + F'\left(k, \frac{\pi}{2}\right)\right]\left[E\left(k, \frac{\pi}{2}\right) - k'^2 F\left(k, \frac{\pi}{2}\right)\right]; \quad (72)$$

$$k_R = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{b}\, p\left[F\left(k, \frac{\pi}{2}\right) + F'\left(k, \frac{\pi}{2}\right)\right]\left[E\left(k, \frac{\pi}{2}\right) - k'^2 F\left(k, \frac{\pi}{2}\right)\right]. \quad (73)$$

Dacă se înlocuiește în expresia (73) raportul a/b prin valoarea sa obținută în (65), factorul în alternativ k_R are următoarea expresie :

$$k_R = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, p\left[F\left(k, \frac{\pi}{2}\right) + F'\left(k, \frac{\pi}{2}\right)\right] \times$$
$$\times \sqrt{\left(E\left(k, \frac{\pi}{2}\right) - k'^2 F\left(k, \frac{\pi}{2}\right)\right)\left(\left(E'\left(k, \frac{\pi}{2}\right) - k^2 F'\left(k, \frac{\pi}{2}\right)\right)\right)}. \quad (74)$$

Formula (73) poate fi aplicată în calculul rezistenței în alternativ a barei cu secțiune dreptunghiulară dacă adîncimea de pătrundere $\frac{1}{\alpha}$ este mai mică decît grosimea plăcii. Din condiția ca semigrosimea b a plăcii să fie mai mare decît dublul adîncimii de pătrundere $\frac{1}{\alpha}$ se obține :

$$\frac{2}{\alpha} < b \; ; \quad \frac{2}{b} \leqslant p\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{A_0}},$$

de unde rezultă

$$p \geqslant \sqrt{\frac{32}{\pi}}\sqrt{\frac{a}{b}}. \quad (75)$$

Pentru bara cu secțiune pătrată avînd latura $l = 2a = 2b$, modulele k_1, k și k' au valorile

$$k_1 = \sqrt{2} \; ; \quad k = k' = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad (76)$$

iar integralele eliptice care intervin în formula (73) au valorile [6] :

$$F\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = F'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = 1{,}854075,$$
$$E\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = E'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = 1{,}350644. \quad (77)$$

Factorul în alternativ k_R al rezistenței unei bare drepte cu secțiunea pătrată are, cu valorile (76) și (77), următoarea expresie:

$$k_{R4} = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,2\cdot 1{,}854075\left(1{,}350644 - \frac{1}{2}\,1{,}854075\right)p = 0{,}398501\,p, \quad (78)$$

adică expresia obținută în (49).

Problema rezistenței în alternativ a barei cu secțiune dreptunghiulară la refulare netă a curentului a fost rezolvată de J. D. Cockroft [3] utilizînd transformarea pe semiplanul superior t și apoi o nouă transformare în planul complex u:

$$\frac{dz}{dt} = (t^2-1)\left(t^2 - \frac{1}{k^2}\right); \quad \frac{dw}{dt} = \left(t^2 - \frac{1}{k^2}\right)^{-\frac{1}{2}}; \quad t = sn\,u,$$

în care $sn\,u$ este funcția eliptică sinus a lui Jacobi.

Pentru calculul diferitelor constante, autorul a folosit funcțiuni eliptice Jacobi, obținînd pentru factorul în alternativ k_R următoarea expresie:

$$k_R = 2\pi^{-\frac{3}{2}}(E + k_1^2 F)^{\frac{1}{2}}\,(E' - k^2 F')^{\frac{1}{2}}(F + F')\,(2w/R_0)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= f\left(\frac{b}{a}\right)\sqrt{2\omega/R_0}/\pi. \quad (79)$$

În formula (79), factorii $2\pi^{-\frac{3}{2}}\,(2\omega/R_0)^{\frac{1}{2}}$ se exprimă în funcție de mărimea adimensională p astfel:

$$2\pi^{-\frac{3}{2}}(2\omega/R_0)^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\pi\sqrt{\pi}}\sqrt{2\omega\sigma A_0} = \frac{2}{\pi\sqrt{\pi}}\frac{p}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,p. \quad (80)$$

Cu valoarea (80) a acestor factori, expresia factorului în alternativ (79), calculată de J. D. Cockroft, este identică cu formula (74), calculată de autor. Din cauza dificultăților de calculul constantelor în transformările succesive utilizate în lucrarea [3], au intervenit erori în soluțiile grafice. Pentru factorul în alternativ k_{R4} al barei cu secțiune pătrată, J. D. Cockroft [2] indică următoarea valoare, dedusă din graficul $f\left(\frac{a}{b}\right)$:

$$k_{R4} = 0{,}418\,p, \quad (81)$$

mai mare decît valoarea exactă, calculată în (49).

H. C. Forbes și L. I. Gorman [9] au făcut determinări experimentale ale rezistenței în alternativ a barelor cu secțiune pătrată și dreptunghiulară, la frecvențe cuprinse între 22 și 287 kHz, la valori ale mărimii

p pînă la 10, iar S. I. Haefner [2] a făcut determinări ale rezistenței la frecvențe pînă la 8 000 Hz.

În figura 7 s-a reprezentat grafic, după acești autori, curbele experimentale ale factorului în alternativ k_R pentru diferite valori ale parametrului p, cum și curbele aceluiași factor calculat cu formulele (49) și

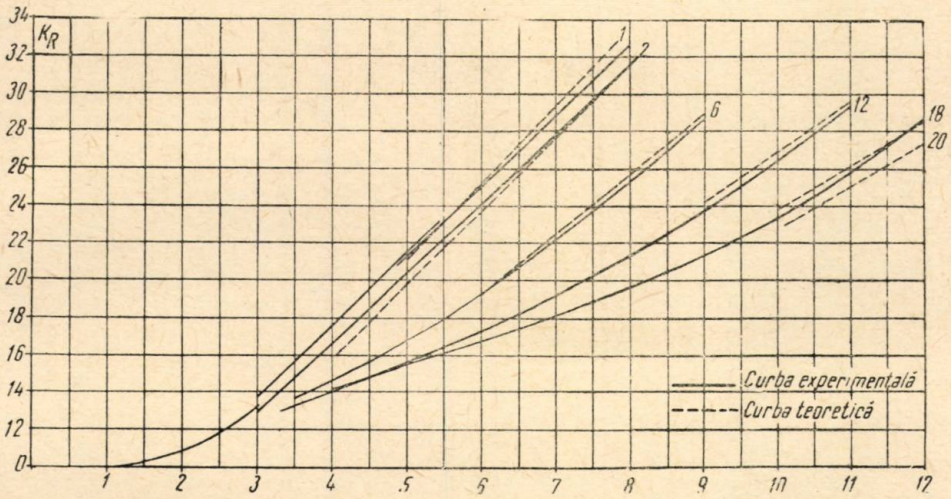


Fig. 7. — Variația factorului în alternativ k_R în funcție de mărimea adimensională p și pentru diferite valori ale raportului b/a egale cu : 1, 2, 6, 12, 18, 20.

(74). În limitele valorilor lui p date de condiția (75), determinările experimentale sînt în concordanță cu rezultatele calculate.

Primit la redacție la 15 mai 1964

BIBLIOGRAFIE

1. H. B. DWIGHT, *Proximity effect in wires and thin tubes.* Trans. A.I.E.E., **42**, 850 (1923).
2. S. I. HAEFNER, *Alternating-current resistance of rectangular conductors.* Proc. I.R.E., **25**, 434 (1937).
3. J. D. COCKROFT, *Skin effect in rectangular conductors at high frequency.* Proc. Royal Soc., **122**, 533 (1929).
4. W. M. PAGE, *Conformal transformation for isolated rectangular conductors.* Proc. Lond. Math., **2**, 321 (1913).
5. R. RĂDULET, C. I. MOCANU, *Efectele de margine și de proximitate în barele cu secțiune dreptunghiulară la refulare netă a curentului electric.* Stud. cerc. energ., A, **XIII**, *4* (1963).
6. P. BYRD, M. FRIEDMANN, *Handbook of elliptic integrals for Engineers and Physicists.* Berlin, Springer Verlag, 1954.
7. E. JAHNKE, F. EMDE, *Funktionentafeln mit Formeln und Kurven.* Verlag Teubner, Leipzig, 1928.
8. H. A. WHEELER, *Skin resistance of a transmission line conductor of polygon cross section.* Proc. I.R.E., **43**, 805 (1955).
9. H. C. FORBES, L. I. GORMAN, *Skin effect in rectangular conductors.* Trans. A.I.E.E., **52**, 516, (1933).

REDUCEREA FORȚELOR ELECTRODINAMICE DE SCURTCIRCUIT LA TRANSFORMATOARELE CU ÎNFĂȘURĂRI CILINDRICE STRATIFICATE

DE

C. V. BĂLĂ și C. APETREI

621.314.2 : 621.3.014.32

Pe baza unei analize a rezistenței mecanice la scurtcircuit a transformatoarelor cu înfășurări cilindrice fabricate în prezent, se studiază forțele electrodinamice care se produc datorită repartiției neuniforme a solenațiilor de-a lungul coloanei transformatorului. Astfel se determină efectul de margine al înfășurărilor și efectul dispunerii înfășurării de reglaj asupra forțelor electrodinamice de scurtcircuit; se propun soluții constructive adecvate pentru diminuarea acestor efecte.

În urma încercării transformatoarelor electrice la probele de scurtcircuit brusc conform propunerilor CEI [1] sau a prescripțiilor VDE [2], s-a constatat că transformatoarele pot prezenta o rezistență mecanică redusă la acțiunea forțelor electrodinamice de scurtcircuit. Pe de o parte, s-a ajuns la concluzia că normele de încercarea transformatoarelor sînt prea rigide și există propuneri de a se reveni asupra lor [3] pentru a verifica construcția transformatoarelor la solicitări cît mai apropiate posibil de cele care pot surveni în exploatarea lor; normele de încercare trebuie să țină seama de condițiile de exploatare și de protecția transformatorului. Dar, pe de altă parte, însăși construcția transformatorului mai prezintă rezerve de îmbunătățire, atît în scopul reducerii forțelor electrodinamice de scurtcircuit, cît și în problema consolidării înfășurărilor.

ST. CERC. ENERG. ELECTR. TOM 14 Nr. 3. p. 521 – 531 BUCUREȘTI 1964

Înfăşurările cilindrice stratificate adaptate în construcţia transformatoarelor de puteri medii prezintă pericolul „flambării", care constă în suprapunerea conductoarelor alăturate din acelaşi strat sub acţiunea forţelor electrodinamice de scurtcircuit. În figura 1 sînt prezentate fotografiile şi schiţele unor înfăşurări cilindrice după încercarea transformatorului la scurtcircuit; figura 1*a* reprezintă o înfăşurare de joasă tensiune, iar figura

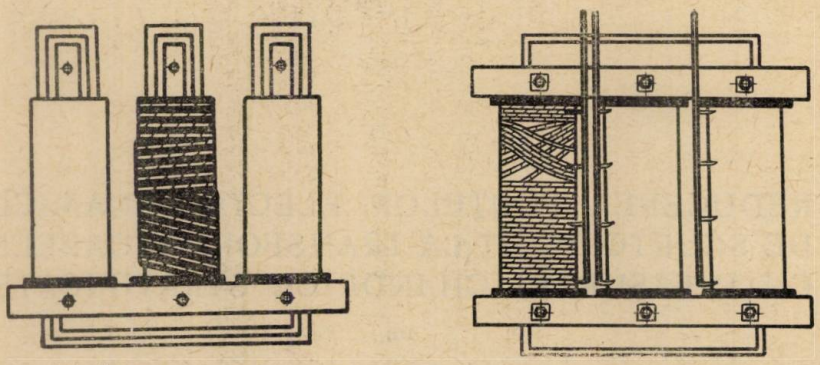


Fig. 1. — Înfăşurări cilindrice stratificate după încercarea transformatoarelor la scurtcircuit brusc.
a — înfăşurare interioară (de joasă tensiune); *b* — înfăşurare exterioară (de înaltă tensiune).

1*b* o înfăşurare de înaltă tensiune. Din examinarea înfăşurărilor după efectuarea probei de scurtcircuit brusc rezultă următoarele concluzii:

a. Conductoarele înfăşurărilor nu au rezistat la forţele electrodinamice de scurtcircuit axiale şi radiale; conductoarele nu au fost distruse imediat, prezentînd în prima perioadă a încercării numai deformaţii la încovoiere.

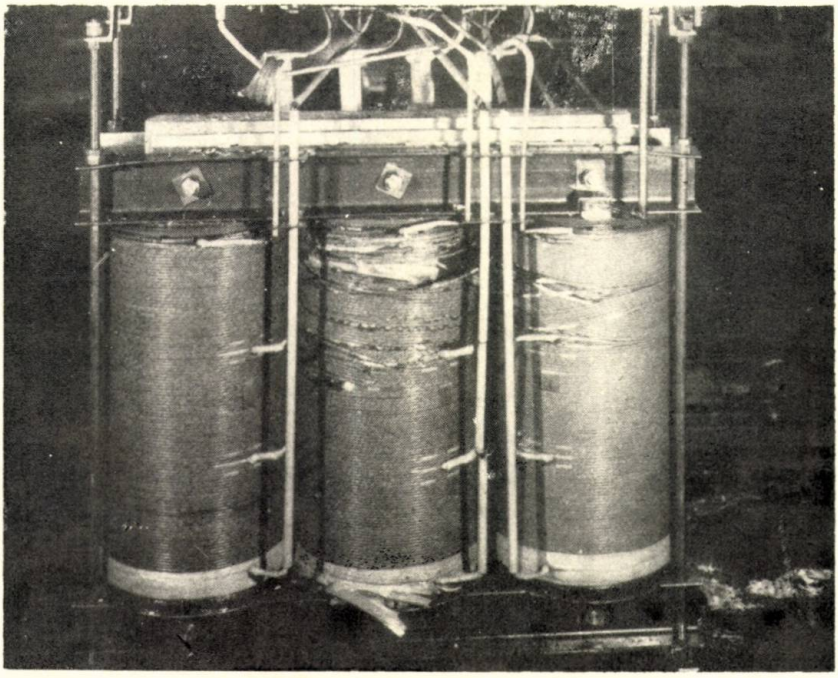
b. Înfăşurările prezintă defecte locale în zonele în care au apărut noduri de forţe; astfel, înfăşurările exterioare (înfăşurările de înaltă tensiune, vezi fig. 1 *b*) prezintă deformaţii spre una din extremităţi, şi anume de partea în care forţele electrodinamice erau mai mari ca urmare a neuniformităţii produse la funcţionarea transformatorului pe priza de —5%. Înfăşurarea interioară (de joasă tensiune) prezintă deformaţii la mijloc, unde valorile forţele rezultante de comprimare, axiale, au fost maxime.

c. Deformările înfăşurărilor s-au produs sub acţiunea forţelor electrodinamice axiale şi radiale (în stratul cel mai exterior al înfăşurării de înaltă tensiune, forţele radiale sînt mai mari la extremităţile înfăşurărilor exterioare, datorită distorsionării cîmpului magnetic de scăpări).

d. Înfăşurările care sînt executate cu conductor-bandă aşezat după latura mare şi fără o consolidare suplimentară exterioară sînt expuse alunecării; astfel, conductoarele alăturate pot aluneca unele peste altele şi sistemul prezintă o rezistenţă redusă la acţiunea forţelor electrodinamice de scurtcircuit.

În continuare se analizează prin metode grafice şi analitice efectul repartiţiei neuniforme a solenaţiei înfăşurărilor de-a lungul coloanei,

c



d

Fig. 1 — Fotografii ale înfășurărilor după încercare la scurtcircuit brusc.

datorită inegalității înălțimilor înfășurărilor și a modului de dispunere a porțiunii de înfășurare destinată reglajului pentru cazul concret al transformatoarelor cu înfășurări stratificate; exemplificarea este prezentată pentru un transformator trifazat avînd următoarele date nominale: 250 kVA, 6 000 V/400 V, 50 Hz, $u_{sc}=6\%$. Înfășurarea de joasă tensiune este de tip cilindric în două strate, bobinată cu două conductoare în paralel, iar înfășurarea de înaltă tensiune este de asemenea de tip cilindric în nouă strate, cu un canal de răcire prevăzut după primele trei strate.

INFLUENȚA NEUNIFORMITĂȚII EXTREMITĂȚILOR BOBINELOR

Transformatoarele din seria 100 — 1 600 kVA permit reglajul tensiunii în trepte de $\pm 5\%$, prin prize scoase de la înfășurarea de înaltă tensiune, și au înfășurarea de joasă tensiune — dimensionată pentru tensiunea de linie de 400 V — executată din conductor-bară. Datorită pasului mare al spirei înfășurării de joasă tensiune, solenația produsă de această înfășurare nu mai este repartizată uniform de-a lungul fiecărei generatoare a înfășurării. În figura 2 *a* s-a reprezentat o secțiune longitudinală prin înfășurările unui transformator, după o generatoare de partea opusă legăturilor la bornele înfășurării de joasă tensiune, iar în figura 2 *b* o secțiune longitudinală de partea legăturilor la bornele de joasă tensiune. Pentru reglajul tensiunii sînt prevăzute prize pe ultimul strat al înfășurării. În ambele secțiuni s-a considerat că înfășurarea de înaltă tensiune este conectată pe priza de reglaj de 0%. După cum rezultă din aceste figuri, la capetele înfășurărilor apare o repartiție neuniformă a solenației înfășurării de joasă tensiune în raport cu solenația înfășurării de înaltă tensiune (secțiunile înfășurărilor reprezintă la scări diferite înseși curbele solenațiilor).

Se pune problema: dispunerea înfășurărilor conform figurii 2 este potrivită pentru a rezulta forțe electrodinamice minime în transformator? În figura 2 s-au mai reprezentat: curba cîmpului magnetic radial produs de înfășurările cu o repartiție uniformă (B_p), calculat în ipoteza că înfășurările sînt așezate în aer; curba cîmpului magnetic radial (B_r), datorită repartiției neuniforme a înfășurării, calculat după metoda amperspirelor reziduale [4] (lungimea liniei de cîmp fiind determinată după relațiile date în lucrarea [5]) și curba cîmpului magnetic rezultat B_i prin înfășurarea de înaltă tensiune pentru cazul defavorabil cînd transformatorul este conectat pe prize de 0%.

În figura 2 *b* s-a reprezentat componenta fluxului radial datorită efectului capetelor de bobine (suprafețe hașurată orizontal) de componenta fluxului radial produsă de porțiunea de reglaj a înfășurării (suprafața hașurată vertical). Din figură rezultă efectul pe care îl au capetele înfășurării la producerea cîmpului radial; dispunerea înfășurărilor ca în figura 2 conduce la o creștere importantă a componentei radiale a cîmpului magnetic, îndeosebi în zonele de capăt.

Pentru reducerea efectului de capăt este preferabilă o dispunere a înfășurărilor astfel încît, după generatoarea de partea opusă legăturilor la

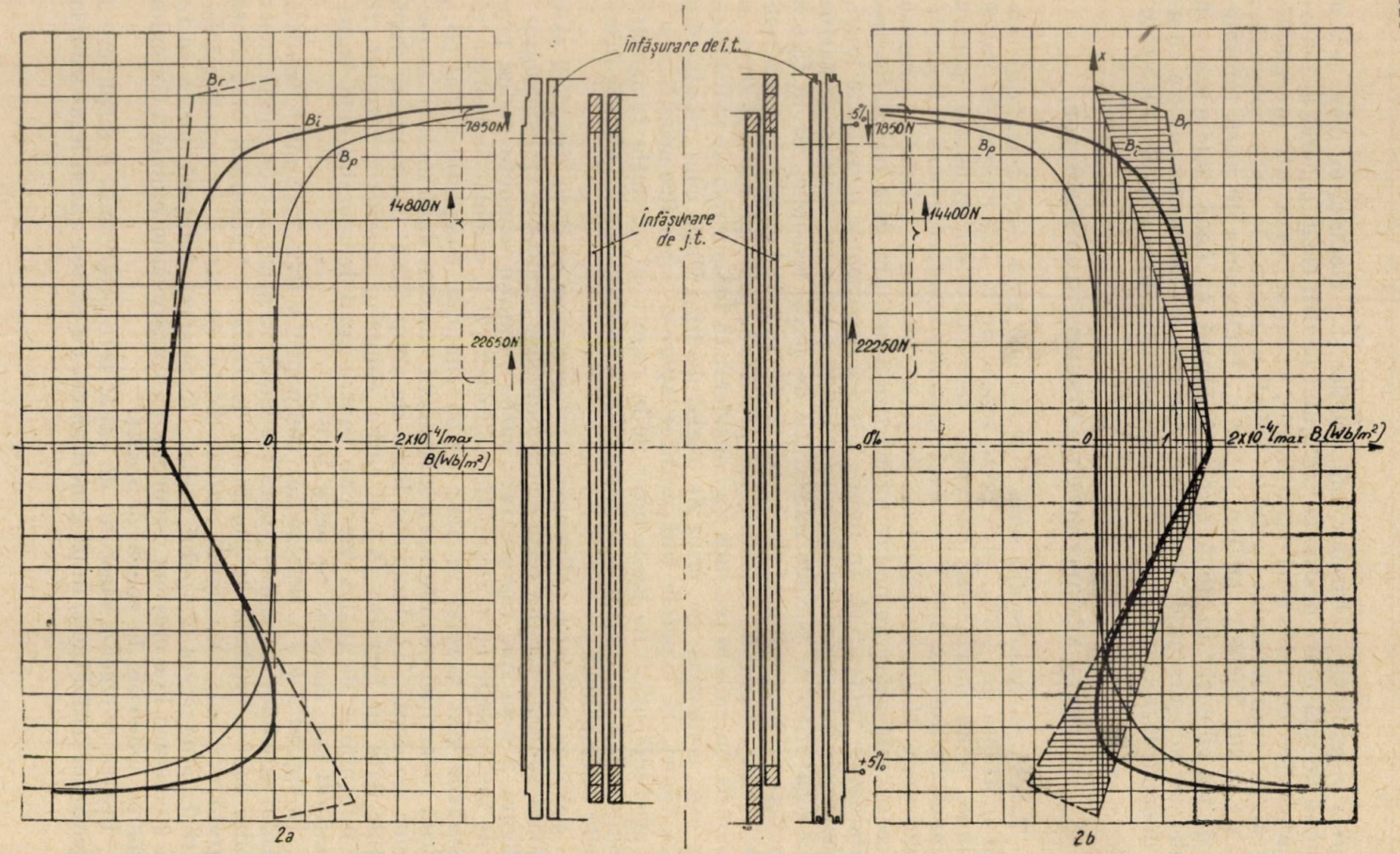


Fig. 2 *a* — Schiţa înfăşurărilor de partea opusă legăturilor înfăşurării de joasă tensiune şi curba cîmpului magnetic radial (B_t) prin înfăşurarea de înaltă tensiune; *b* — schiţa înfăşurărilor de partea legăturilor înfăşurării de joasă tensiune şi curba cîmpului magnetic radial (B_t) prin înfăşurarea de înaltă tensiune.

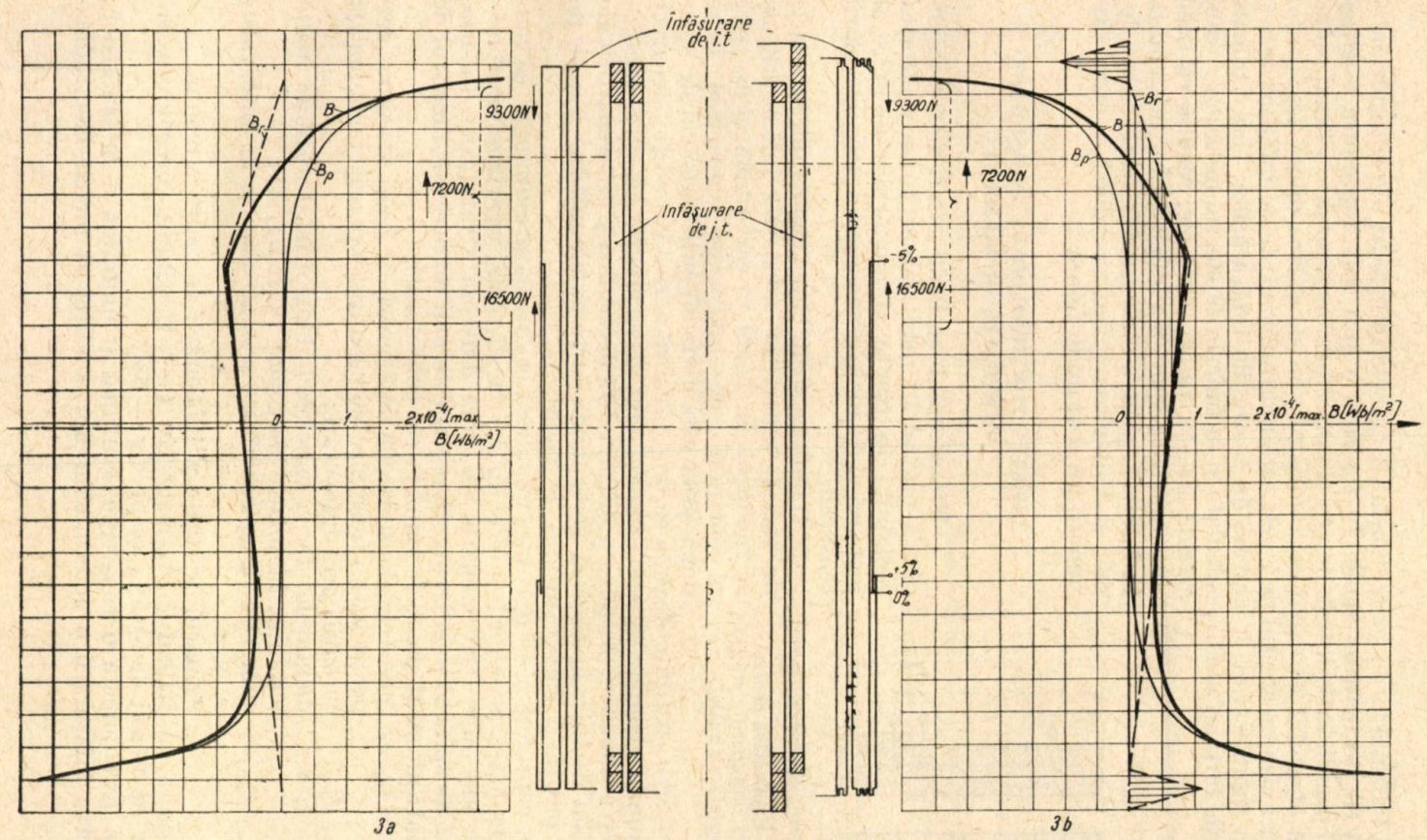


Fig. 3 *a*. — Schiţa înfăşurărilor de partea legăturilor înfăşurării de joasă tensiune şi curba cîmpului magnetic radial (*B*) prin înfăşurarea de înaltă tensiune; *b* — schiţa înfăşurărilor de partea opusă legăturilor înfăşurării de joasă tensiune şi curba cîmpului magnetic radial (*B*) prin înfăşurarea de înaltă tensiune.

bornele înfăşurării de joasă tensiune, ambele înfăşurări ale transformatorului să fie de înălţimi egale. În figura 3 *a* şi *b* sînt reproduse aceleaşi secţiuni pentru înfăşurările de pe coloana transformatorului. Fluxul radial datorită efectului de capăt este micşorat, iar de partea opusă legăturilor de joasă tensiune efectul de capăt este nul (înfăşurările au înălţimi egale).

În figurile 2 şi 3, alături de secţiunile înfăşurărilor sînt indicate şi valorile forţelor axiale, calculate şi în funcţie de efectul de capăt; comparînd aceste valori între ele, rezultă ca fiind avantajoasă dispunerea înfăşurărilor prezentată în figura 3, pentru care rezultă forţe axiale locale şi de deplasare mai mici decît în cazul dispunerii prezentate în figura 2.

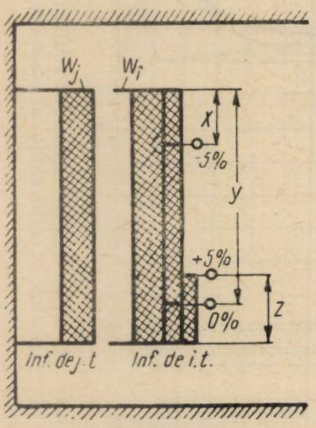


Fig. 4. — Explicativă pentru determinarea dispunerii optime a treptelor de reglaj.

EFECTUL PORŢIUNILOR DE ÎNFĂŞURARE DESTINATE REGLAJULUI

Transformatoarele de puteri mici şi mijlocii se prevăd în mod curent cu posibilitatea reglajului în trepte al numărului de spire al înfăşurării de înaltă tensiune, în scopul reglării tensiunii.

O dată cu schimbarea conexiunii la prizele de reglaj, repartiţia solenaţiei înfăşurării nu se modifică, în cazul în care numărul de spire al porţiunii de înfăşurare conectată între două prize este divizibil prin numărul de spire dintr-un strat. Nu întotdeauna se poate realiza această condiţie, deoarece dimensiunile geometrice ale ferestrei sînt determinate de alte condiţii tehnice şi economice. Se pune problema de a determina şi alte repartiţii ale numărului de spire la care să corespundă forţe axiale minime şi egale pe oricare poziţie a comutatorului de reglaj.

Să considerăm o înfăşurare cilindrică la care să presupunem că porţiunea de înfăşurare cuprinsă între două prize de reglaj cuprinde un număr de spire mai mic decît numărul de spire dintr-un strat (cazul în care numărul de spire al unei trepte de reglaj este mai mare decît numărul de spire dintr-un strat poate fi redus la cel considerat).

Fie w_j, w_i numerele de spire ale înfăşurării de joasă tensiune, respectiv înaltă tensiune, (corespunzătoare prizei nominale);
I_j, I_i curenţii prin înfăşurări;
x, y, z distanţele de la capetele bobinelor înfăşurării de înaltă tensiune, la prizele de reglaj (vezi fig. 4);
w_x, w_y, w_z numerele de spire dintr-un strat dispuse în intervalele x, y, z;
n numărul de strate al înfăşurării de înaltă tensiune.

Notăm cu indicii (+), respectiv (−), mărimile corespunzătoare prizelor de reglaj de + 5%, respectiv − 5%.

Să presupunem o repartiţie continuă şi uniformă a înfăşurărilor; dispunerea înfăşurării o determinăm din condiţia ca forţele electrodina-

mice care produc deplasarea înfășurării și sînt produse în urma neuniformităților introduse de reglajul spirelor, indiferent de priza pe care este conectată înfășurarea, să fie aceleași. Pentru calculul valorilor curenților de scurtcircuit vom considera două cazuri diferite: *a*) curenții de scurtcircuit prin înfășurarea de înaltă tensiune au valori constante indiferent de priza de reglaj și *b*) curenți de scurtcircuit prin înfășurarea de înaltă tensiune sînt proporționali cu tensiunile nominale corespunzătoare prizelor de reglaj.

Calculul forței axiale pe unitatea de lungime a conductorului $f = i\,B$ îl efectuăm pe baza unei aproximări simple a componentei radiale a cîmpului. În ipoteza că pentru cîmpul magnetic radial lungimea liniei de cîmp este constantă și forța care se exercită asupra porțiunii de înfășurare cuprinsă între 0 și x cînd transformatorul este conectat pe priza de -5% se calculează după relația:

$$F_{ox-} = \pi D_m \frac{\mu_0}{2b}\left[I_{i-}\left(\frac{0{,}95\,w_i - w_x}{h}\,x + w_x\right) - \frac{w_j}{h}\,x\,I_{j-}\right]\times$$
$$\times\left(\frac{0{,}95\,w_i - w_x}{h}\,x + w_x\right) I_{i-},$$

în care b este lungimea liniei de cîmp; forța care se exercită asupra porțiunii cuprinse între x și h are expresia:

$$F_{xh-} = \pi D_m \frac{\mu_0}{2b}\left[I_{i-}\left(\frac{0{,}95\,w_i - w_x}{h}\,x + w_x\right) - \frac{w_j}{h}\,x\,I_{j-}\right]\times$$
$$\times\frac{0{,}95\,w_i - w_x}{h}\,(h - x)\,I_{i-};$$

forța rezultantă este:

$$F_{x-} = F_{0x-} + F_{xh-} = \pi D_m \frac{\mu_0}{2b}\left[I_{i-}\left(\frac{0{,}95\,w_i - w_x}{h}\,x + w_x\right) - \right.$$
$$\left. - \frac{w_j}{h}\,x\,I_{j-}\right] 0{,}95\,w_i\,I_{i-}. \qquad (1)$$

Determinînd analog și forțele axiale rezultante care se exercită asupra înfășurărilor conectate pe prizele de 0% și +5% și egalînd aceste forțe, rezultă ecuațiile:

$$0{,}95\,I_{i-}^2\left(w_x - \frac{w_x}{h}\,x\right) = \pm I_i^2\left(w_y - \frac{w_x}{h}\,y\right) = I_{i+}^2\left(w_z - \frac{w_z}{h}\,z\right). \qquad (2.3)$$

La scurtcircuit se presupune nul curentul de magnetizare și, prin urmare, mai rezultă ecuațiile:

$$0{,}95\,w_i\,I_{i-} = w_j\,I_{j-} \qquad (4)$$
$$w_i\,I_i = w_j\,I_j \qquad (5)$$
$$1{,}05\,w_i\,I_{i+} = w_j\,I_{j+}. \qquad (6)$$

Între numerele de spire cuprinse între coordonatele o, x, y, z se mai pot scrie relaţiile :

$$w_y - w_x = \frac{0{,}95\ w_i - w_x}{n} + w_z - w_y = 0{,}05\ w_i, \qquad (7{,}8)$$

în care n este numărul de strate al înfăşurării pînă la priza de -5% ; în sfîrşit, între numerele de spire w_x, w_y, w_z şi coordonatele x, y, z se pot scrie relaţiile :

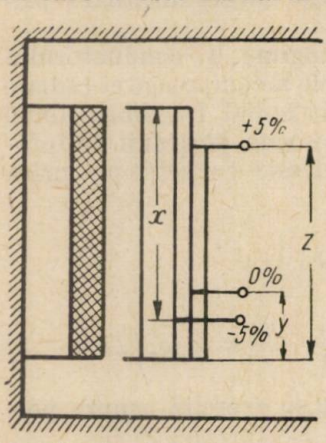


Fig. 5. — Explicativă pentru a două variantă a soluţiei.

$$\frac{w_x}{x} = \frac{w_y}{y} = \frac{w_z}{z}. \qquad (9{,}10)$$

Semnul $(-)$ din ecuaţiile (1) şi (2) corespunde repartiţiei înfăşurării indicate în figura 5, însă ecuaţiile (7) şi (8) trebuie scrise în acest caz astfel :

$$w_y - w_x + \frac{0{,}95\, w_i - w_x}{n} = w_z - w_y = 0{,}05\, w_i. \qquad (7', 8')$$

a. Este important de examinat cum variază forţa axială de deplasare în funcţie de distanţa x la o înfăşurare cilindrică cu $n + 1$ strate, dintre care ultimul incomplet ; din relaţia 1, notînd cu k densitatea numărului de spire pe înălţime (dintr-un strat), rezultă :

$$F = \frac{\mu_0}{2b}\pi D_m I^2 k^2 h^2 n \left(\frac{x}{h} - \frac{x^2}{h^2}\right)\left(\frac{1}{n}\frac{x}{h} + 1\right). \qquad (11)$$

Să notăm cu φ produsul ultimilor doi factori :

$$\varphi = \left(\frac{x}{h} - \frac{x^2}{h^2}\right)\left(\frac{1}{n}\frac{x}{h} + 1\right);$$

funcţia φ, de care depinde forţa F, s-a reprezentat grafic în figura 6 pentru cazurile în care $n = 5$, $n = 10$ şi $n = \infty$; din această figură rezultă că, la valori mari ale numărului de strate, şi la o solenaţie a înfăşurării dată, forţa depinde tot mai puţin de acest număr. Forţa de deplasare este maximă la mijlocul înfăşurării şi creşte rapid în raport cu distanţa x de la capetele înfăşurării.

b Pentru determinarea prizelor, din condiţia egalităţii forţelor de deplasare să scriem şi relaţiile dintre curenţi prin înfăşurări pe cele trei prize de reglaj.

Conform recomandărilor CEI, transformatorul se încearcă la scurtcircuit la aceeaşi valoare maximă a curentului pe oricare priză adică :

$$I_{i-} = I_i = I_{i+}. \qquad (12{,}13)$$

Sistemul de ecuații (2—9,10 și 13) conține necunoscutele w_x, w_y și w_z (respectiv x, y și z), $\frac{I_{j-}}{I_i}$, $\frac{I_j}{I_i}$, $\frac{I_{j+}}{I_i}$, $\frac{I_{i-}}{I_i}$, $\frac{I_{i+}}{I_i}$.

Soluțiile acestui sistem care interesează problema, determinate direct sau cu ajutorul figurii 6 (de observat că la curenți egali rezultă aceleași curbe pentru forțele de deplasare pe oricare treaptă de reglaj) sînt:

$$\alpha)\ x = o,\ y = h,\ z = h,$$

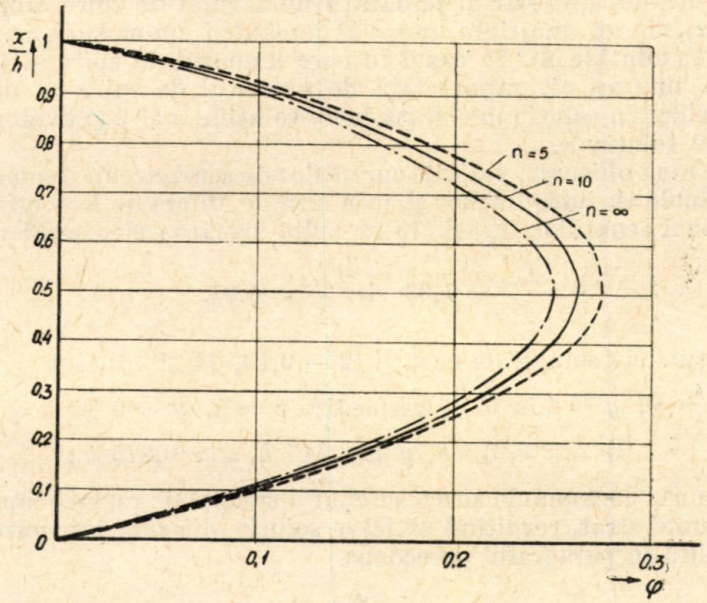


Fig. 6. — $\varphi = \left(\frac{x}{h} - \frac{x^2}{h^2}\right)\left(\frac{1}{n}\frac{x}{h} + 1\right)$.

respectiv $x = h$, $y = o$ și $z = h$; aceste soluții „banale" corespund cazului cînd înfășurarea de reglaj este repartizată într-un număr par de straturi, fiecare treaptă de reglaj fiind formată de porțiunea de înfășurare dintr-un strat;

$\beta)\ x = \frac{h}{4}$, $y = \frac{3h}{4}$, $z = \frac{h}{4}$; respectiv $x = \frac{3h}{4}$, $y = \frac{h}{4}$ și $z = \frac{3h}{4}$; aceste soluții corespund cazului cînd o treaptă de reglaj ocupă jumătate dintr-un strat $\left(y - x = \frac{h}{2}\right)$, iar înfășurarea are priza de -5%, scoasă fie la $1/4\ h$ de la începutul unui strat, fie la $\frac{3}{4}\ h$.

În cazul soluției α nu apar forțe locale (datorită treptelor de reglaj ale înfășurării) care să se exercite asupra înfășurărilor; pe oricare din prizele de reglaj, înfășurarea este repartizată uniform.

Prima soluţie β corespunde cazului în care prizele sînt scoase ca în figura 3 ; pe fiecare priză apar forţe rezultante egale între ele. În schimb, prin această soluţie nu se utilizează complet spaţiul din fereastra transformatorului, ultimul strat fiind bobinat numai parţial. Evident însă că se poate adopta o dispunere a înfăşurării ca în figura 5, obţinîndu-se astfel o utilizare mai bună a spaţiului.

De observat că soluţiile de mai sus corespund înfăşurărilor care au numărul de spire al porţiunii de înfăşurare cuprinse între două prize succesive fie un multiplu par al jumătăţii numărului de spire dintr-un strat (soluţiile α), fie un multiplu impar al jumătăţii numărului de spire dintr-un strat (soluţiile β). În cazul în care numărul de spire al treptei de reglaj este într-un alt raport faţă de numărul de spire al unui strat, este de preferat o soluţie încadrată între soluţiile α şi β şi evident, cît mai aproape de soluţia α.

c. În mod obişnuit, valorile curenţilor de scurtcircuit depind de tensiunile nominale ale înfăşurărilor şi, prin urmare, diferă de la o priză la alta.

În locul ecuaţiilor (12) şi (13), rezultă următoarele ecuaţii :

$$\frac{I_{i-}}{I_i} = 1{,}05 \text{ şi } \frac{I_{i+}}{I_i} = 0{,}95. \qquad (14{,}15)$$

Soluţiile sistemului de ecuaţii (2 — 9,10, 14 şi 15) sînt

α) $x = 0,\ y = h, z = h$, respectiv $x = h,\ y = 0$ şi $z = h$;

β) $x \approx 0{,}215\ h,\ y \approx 0{,}745\ h,\ z \approx 0{,}275\ h$;

acest ultim caz corespunde situaţiei cînd o treaptă de reglaj ocupă 0,53 din înălţimea unui strat, rezultînd astfel o soluţie diferită întrucîtva de soluţia stabilită în paragraful precedent.

★

CONCLUZII

La transformatoarele trifazate, înfăşurările cilindrice stratificate pot fi dispuse conform celor stabilite în lucrare, astfel încît să rezulte o diminuare a forţelor axiale datorite efectului de capăt şi efectului repartiţiei porţiunilor de înfăşurare destinate reglajului tensiunii. Din calculele grafice şi analitice rezultă că înălţimile înfăşurărilor de joasă tensiune şi de înaltă tensiune trebuie să fie aproximativ egale după oricare din generatoare. De asemenea, înfăşurarea de reglaj se poate dispune astfel încît forţele de deplasare să fie aproximativ egale între ele pe oricare din priza de reglaj ; în lucrare se rezolvă problema pentru cazul concret al transformatoarelor cu reglajul tensiunii în trepte de ± 5%. Problema se formulează analog şi pentru alte trepte de reglaj, respectiv pentru alte dispuneri ale înfăşurării de reglaj (de exemplu pentru cazul în care prizele de reglaj au cotele de acelaşi semn).

Primit la redacţie la 5 mai 1964.

BIBLIOGRAFIE

1. * * * *Recommandations de la CEI pour les transformateurs des puissance*, Publication **76**, 1955, ed. 1, Geneva.
2. * * * V D E — 0532/59.
3. L. TORSEKS, *Kurzschluss Festigkeit grosser Transformatoren.* Bericht im Auftrage des Studien Komitees nr. *12* „Transformatoren" CIGRE rap. *142* (1962).
4. C. V. BĂLĂ, C. APETREI, *Calculul și determinarea experimentală a forțelor axiale la transformatoarele de putere.* Electrotehnica, **10**, *8*, 285 — 294 (1962).
5. W. KNAACK, *Schubkräfte bei axial verschobenen Transformatoren-Wicklungen.* E.T.Z.—A., **76**, *6*, 217 — 225 (1955).

ASUPRA UNUI PROCES DE TRANSFORMARE A ENERGIEI ELECTRICE DE ÎNALTĂ FRECVENŢĂ ÎN LUCRU MECANIC DE JOASĂ FRECVENŢĂ. PERSPECTIVE PENTRU DEZVOLTAREA A NOI TIPURI DE MOTOARE ELECTRICE

DE

MATEI MARINESCU

MEMBRU CORESPONDENT AL ACADEMIEI R.P.R.

621.3 : 621.313.13

Un circuit rezonant în care inducţia sau capacitatea variază periodic poate funcţiona ca motor a cărui per oadă a mişcării este un multiplu al perioadei curentului de alimentare. Se determină condiţiile pentru ca transformarea energiei electrice în lucru mecanic să aibă loc cu randament ridicat precum şi condiţiile pentru ca motorul să dezvolte aceeaşi putere la frecvenţe diferite.

INTRODUCERE

În literatura de specialitate găsim în lucrările lui N. Papalexi, referitoare la maşini parametrice, o lucrare privind tratarea unui caz de circuite cuplate parametric [1] în care se semnalează faptul că un *generator* parametric cu inductanţă variabilă poate funcţiona şi ca *motor asincron* cînd în serie cu el se introduce un condensator şi o sursă de curent alternativ.

Ulterior şi folosind o metodă de analiză a acestui efect diferită de aceea a lui N. Papalexi, noi am dezvoltat aceste cercetări privind motorul parametric cu condensator într-o serie de articole publicate în periodicele Academiei R.P.R. şi în străinătate [2], [3], [4], aducînd noi contri-

buţii teoretice privind procesul fizic care stă la baza efectului condensatorului-serie. Atît lucrarea lui N. Papalexi, cît şi cercetările noastre de atunci nu au dus la rezultate practice, privind realizarea unor motoare care, folosind efectul amintit, să poată fi folosite în producţie, concurînd motoarele existente. O dificultate principală în această direcţie de cercetare a fost randamentul redus al prototipurilor experimentale realizate, astfel încît cercetările nu au putut depăşi faza de laborator.

Recent, reluînd acele lucrări şi privind problema din alt punct de vedere, ca urmare a cercetărilor recente asupra motoarelor electromagnetice alimentate în impulsiuni de curent [7], [8], [9], am putut stabili o nouă direcţie de cercetare a acestei probleme şi care poate duce la o sporire substanţială a randamentului unui asemenea motor cu condensator-serie. Totodată, se pare că pe aceeaşi cale va putea fi rezolvată şi problema, rămasă deschisă în tehnică, a motorului electric care cu aceeaşi cantitate de materiale active dezvoltă aceeaşi putere la viteze diferite, cît şi pe aceea a motorului alimentat în înaltă frecvenţă. Rezolvarea acestei din urmă probleme va căpăta o importanţă deosebită prin dezvoltarea sistemului de transmisie a energiei la mare distanţă prin canale hertziene, după procedeul ilustrului savant sovietic Kapitza.

REAMINTIREA REZULTATELOR OBŢINUTE ANTERIOR

S-a arătat în lucrările anterioare [2], [3], [4] că, datorită unei „impedanţe dinamice" care apare în circuitul electric ca consecinţă a variaţiei inductanţei cu deplasarea armăturii mobile după o curbă în formă de clopot (impedanţă dinamică care are valori diferite în cele două faze ale mişcării : faza de accelerare şi faza de frînare), putem acorda circuitului în faza de accelerare cu ajutorul unui condensator-serie de valoare potrivită, acord care nu se va mai păstra în faza de frînare. Va apărea astfel în *faza de accelerare* un curent mare, circuitul fiind acordat, şi deci o forţă electromagnetică mare, care va imprima armăturii o acceleraţie mare, în timp ce în faza de frînare vom avea un curent mic (circuitul fiind desacordat) şi deci o forţă de frînare mică.

Energia cinetică imprimată armăturii mobile în prima fază se va consuma deci în faza a doua, exclusiv în lucru mecanic absorbit de sarcina motorului.

DEZVOLTAREA REZULTATELOR ANTERIOARE. STABILIREA RELAŢIEI DINTRE PUTERE ŞI VITEZA DE ROTAŢIE

Ne propunem în cele ce urmează a stabili relaţia dintre viteza de rotaţie şi puterea dezvoltată de motor. Ţinînd seama de cercetările noastre anterioare, ale căror rezultate au fost prezentate succint în paragraful 2, vom avea în momentul trecerii armăturii mobile prin dreptul polului (fig. 2), între lucrul mecanic al forţelor electromagnetice τ_{em}, energia

cinetică a armăturii mobile, lucrul mecanic τ_f al forțelor datorit sarcinii și începînd din momentul stabilirii regimului permanent, relațiile de mai jos

$$\text{pentru faza de accelerare}: \tau_{em} = \frac{1}{2} m (v_M^2 - v_m^2) \tag{1}$$

$$\text{pentru faza de frînare}: \frac{1}{2} m (v_M^2 - v_m^2) = \tau_f \tag{2}$$

și unde m este masa armăturii mobile, v_m — viteza minimă a armăturii (la începutul fazei de accelerare) și v_M — viteza maximă a armăturii (imediat după faza de accelerare sau la începutul fazei de frînare).

Relația (1) presupune că în faza de accelerare lucrul mecanic al forțelor rezistive este neglijabil față de ceilalți termeni care intervin în această relație, ceea ce se justifică imediat din figurile 1 și 2, unde se vede că distanța între poli x este mare față de înălțimea polului h.

De asemenea, relația (2) presupune că în faza de frînare lucrul mecanic al forțelor electromagnetice este neglijabil, ceea ce s-a spus în paragraful 2.

Din ecuațiile (1) și (2) mai rezultă

$$\tau_{em} = \tau_f, \tag{3}$$

adică lucrul mecanic al forțelor electromagnetice este egal cu lucrul mecanic al forțelor de sarcină, ceea ce este evident apriori. În continuare ne propunem a transforma ecuația (1) sau (2) precum urmează.

Ecuația (1) sau (2) mai poate fi pusă sub forma

$$\tau = \frac{1}{2} m (v_M + v_m)(v_M - v_m). \tag{4}$$

Introducînd viteza medie v_0 și admițînd, într-o primă aproximație, că în

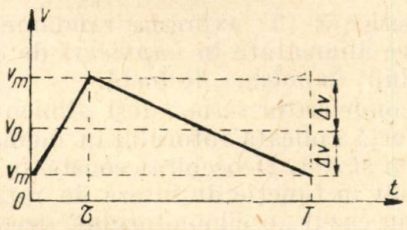


Fig. 1

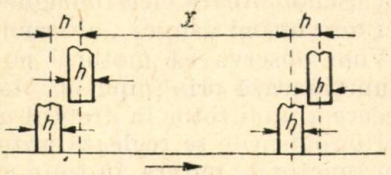


Fig. 2

faza de accelerație mișcarea este uniform accelerată, iar în faza de frînare uniform întîrziată (vezi fig. 1), vom avea

$$v_M = v_0 + \Delta v,$$

$$v_m = v_0 - \Delta v.$$

Înlocuind în (4), obținem

$$\tau = 2\, m v_0^2 (1 - k), \tag{5}$$

unde $k = \frac{v_m}{v_0}$.

Dacă însemnăm cu N viteza de rotație și cu ρ raza rotorului avem $v_0 = 2\pi\, \rho\, N$. Înlocuind în (5), obținem

$$N = \frac{1}{2\pi\rho}\sqrt{\frac{\tau}{2\,(1-k)\,m}} \tag{6}$$

sau, în funcție de puterea $P = N \cdot \tau$,

$$N^{3/2} = \frac{1}{2\pi\,\rho}\sqrt{\frac{P}{2\,(1-k)\,m}}. \tag{7}$$

Relația (7) este deci relația căutată care leagă viteza de rotație a motorului de puterea dezvoltată.

Ea se mai poate scrie în funcție de puterea specifică :

$$P_{0_p} = \frac{P}{m} = \frac{n\,P_p}{n\,m_p} = \frac{P_p}{m_p} \quad (n \text{ fiind numărul de poli})$$

$$N^{3/2} = \frac{1}{2\pi\rho}\sqrt{\frac{P_{sp}}{2(1-k)}}. \tag{7'}$$

Vedem astfel din (7') că la aceeași putere specifică P_{sp} putem avea viteze mai mari sau mai mici, după cum ρ este mai mic sau mai mare. Un astfel de motor va putea deci dezvolta, la aceeași cantitate de material activ, cupluri mai mari sau mai mici, după cum viteza de rotație este mai mică sau mai mare. Nu este dificil de imaginat o construcție adecvată care să realizeze o asemenea performanță. Nu vom intra aici în această problemă, care va fi tratată ulterior.

CONSIDERAȚII ASUPRA RANDAMENTULUI. CONCLUZII

Am stabilit într-o lucrare anterioară [5] expresia randamentului pentru oscilomotoare electromagnetice alimentate în *impulsuri* de curent și deci dezvoltînd asupra „alternorului" *impulsuri* de forță.

Vom observa că motorul cu condensator-serie, deși alimentat în c.a., funcționează prin impulsuri de forță aplicată rotorului în momentele de trecere a unui rotor în dreptul unui stator. Deosebirea constă în aceea că aici impulsurile se reglează automat în funcție de viteza de rotație și deci în funcție de putere, în timp ce în cazul „oscilomotorului" frecvența impulsurilor era imprimată din afară și parametrii oscilomotorului trebuiau să satisfacă unei relații de *rezonanță electromecanică*. Observăm analogia dintre acea relație și expresia (6).

Expresia randamentului stabilită în acea lucrare, și anume

$$\mu = \frac{1}{1 + 2\pi\dfrac{k^2}{\eta \cdot Q_M}}, \tag{8}$$

este valabilă şi în cazul de faţă, după cum se poate vedea urmărind succesiunea raţionamentelor pe baza cărora s-a ajuns la expresia (8). Din această expresie rezultă pentru cazul motorului în înaltă frecvenţă cu condensator-serie următoarele *concluzii* :

1. Randamentul crescînd o dată cu $Q_M = \frac{L_M\,\omega}{R}$ şi deci cu ω, care este mare în cazul alimentării în înaltă frecvenţă, vom putea obţine randamente ridicate şi la puteri mici cînd o dată cu reducerea puterii, deci şi cu reducerea cantităţii de materiale active, scade $\frac{L_M}{R}$, scăderea acestui raport fiind compensată prin creşterea lui ω (influenţa pierderilor în fier poate fi şi ea compensată pînă la o anumită frecvenţă, circa 10 k Hz, prin lamelarea fină a tolelor magnetice şi prin calitatea materialului).

2. Influenţa lui $k = \frac{I_m}{\hat{I}}$, care intervine la pătrat ; deci pentru valori mici ale lui k randamentul tinde către unitate. Dar k va fi cu atît mai mic, cu cît, pentru acelaşi număr de poli de aceeaşi înălţime h, ϱ va fi mai mare şi deci raportul dintre durata impulsiunilor de forţă şi intervalul între impulsuri, va fi mai mare. De aici se vede importanţa distanţării în spaţiu a polilor.

Observaţie finală. Concluziile de la punctele 1 şi 2 ne arată calea care trebuie urmată pentru realizarea, pe baza efectului „rezonanţei dinamice" analizat în lucrările noastre mai vechi, a motorului de înaltă frecvenţă cu condensator-serie, avînd performanţe superioare — competitive cu performanţele actualelor motoare asincrone.

Experienţe ulterioare urmează să confirme concluziile de mai sus.

Primit la redacţie la 30 aprilie 1964

BIBLIOGRAFIE

1. N. PAPALEXI, *Un caz de circuite cuplate parametric*, J. Of. Phys. Acad. Sc. U.R.S.S, *1*, 373—379 (1938).
2. M. MARINESCU, *Rezonanţa dinamică în circuite electrice cu inductanţă variabilă şi condensator.* St. cerc. energ. *3* (1959).
3. — *Die dynamische Resonanz und ihre tehnischer Anwendungen.* III. Int. Kolloquiums der Hochschule für Elektrotehnik, Ilmenau, *23*, 10 (1958).
4. — *The Trans-vertr, a new Transducer for converting hight frequency electric oscillations into low frequency mechanical oscillation.* Int. Colloquiums, Krinitza (Poland), 1959.
5. — *Criterii pentru studiul comparativ al motoarelor parametrice.* Sesiunea I.E. Acad. R.P.R., 26.III. 1964.
6. — *Dinamic resonance in variable inductance circuits with condenser.* Revue d'Electrotechnique et d'Energétique, Acad. R.P.R., *2* (1960).
7. — *Moteurs electromagnetiques à mouvement alternatif et generateurs magnétostrictifs d'ultrasons.* R.G.E., Novembre, 1963.
8. — *Sur certains effets d'instabilité électromécanique.* C.R. Acad. Sc. Paris, **257**, 3578—3581 (1963).
9. — *Sur le principe du transfert extrémal de l'énergie dans les Systèmes électromagnétiques couplés.* C.R. (1946).

ASUPRA LEGII DE VARIAȚIE A ÎNTREFIERULUI MAȘINII SINCRONE CU POLI APARENȚI

DE

AUGUSTIN MORARU

621.313.32 : 621.3.013

În cazul mașinii sincrone avînd piesa polară tăiată după un arc de cerc, se studiază deosebirile dintre legea reală de variație a întrefierului și legile simplificate presupuse de diverși autori, stabilind condiții de admisibilitate și indicînd interpretarea ce trebuie dată unor mărimi.

Se dau formule și diagrame pentru mărimile caracteristice și se fac recomandări pentru folosirea corectă a diagramelor clasice a coeficienților caracteristici ai mașinii sincrone.

Legea de variație a întrefierului sub piesa polară a mașinii sincrone cu poli aparenți este o caracteristică importantă, ea determinînd, pe de o parte, unele calități energetice ale mașinii, iar pe de altă parte influențînd direct complexitatea tehnologiei de realizare a pieselor polare. Aceste două aspecte determină și două tendințe contrare în alegerea legii de variație a întrefierului, respectiv a formei pieselor polare.

Dacă se face abstracție de dificultățile de ordin tehnologic, este indicat a se urmări obținerea unei curbe a cîmpului inductor cît mai apropiate de o sinusoidă, întrucît numai fundamentala cîmpului este utilă, iar armonicile cîmpului produc pierderi suplimentare și armonici nedorite ale t.e.m. induse [1], [2], [3], [4]. În acest scop se preconizează realizarea piesei polare de o anumită formă, descrisă în [5], care asigură formă

sinusoidală a cîmpului inductor, în limitele piesei polare, la funcționarea în gol a mașinii. În sarcină însă, cîmpul se deformează ca urmare a reacției indusului.

Dacă, dimpotrivă, se face abstracție de cerința sinusoidalității cîmpului din întrefier, se adoptă legea de variație a întrefierului, care asigură piesei polare forma cea mai simplă și mai comodă din punct de vedere tehnologic, adică forma circulară, concentrică cu alezajul indusului.

Nici una din aceste tendințe nu este acceptabilă în totalitate decît în cazuri cu totul excepționale. În majoritatea cazurilor practice se alege însă o cale de mijloc, adoptînd o lege de variație a întrefierului care să asigure piesei polare o formă acceptabilă din punct de vedere tehnologic și o curbură a cîmpului inductor cu conținut cît mai scăzut în armonici la funcționarea în gol.

Forma piesei polare care permite în cea mai mare măsură realizarea unui compromis între calitățile energetice și tehnologice ale mașinii este forma circulară, neconcentrică cu alezajul indusului (fig. 1). Legea de variație a întrefierului care rezultă în acest caz a fost aproximată în diferite lucrări fie printr-o parabolă [1], [6], fie printr-o sinusoidă [7] [1]), fără a se analiza legea reală de variație a întrefierului și erorile introduse prin adoptarea legii aproximative.

În cele ce urmează se va căuta să se aducă aceste precizări suplimentare, pornind de la stabilirea legii reale de variație a întrefierului în cazul piesei polare de formă circulară.

În acest studiu, ca și în altele similare [6], [7], se neglijează saturația și ambele armături se consideră netede (fără crestături).

Întrefierul dintre cele două armături ale mașinii se poate defini fie ca o distanță geometrică între armături, fie ca o mărime de calcul al cîmpului din întrefier. Conform celor două moduri de definire se disting mărimile întrefier geometric și întrefier echivalent sau de calcul, care în general au valori apropiate, dar nu egale. Adesea se scapă din vedere această diferențiere, mai ales că prin considerarea efectului crestării armăturilor ca o majorare a întrefierului se creează aparența unei „echivalări" a tuturor influențelor.

Din această cauză, în unele lucrări se vorbește pur și simplu de „întrefier", înțelegînd prin acesta distanța geometrică dintre armături, iar întrefierul echivalent se consideră egal cu cel geometric. Astfel se procedează în toate lucrările citate [1] — [7].

Pentru piesa polară tăiată după un arc de cerc cu rază R_2 mai mică decît raza interioară R_1 a statorului minus întrefierul Δ (fig. 1), în [6] se admite legea de variație a întrefierului:

$$\Delta_k = \Delta_{\min}\left[1 + \frac{q-1}{\alpha^2}\left(\frac{2x}{\tau}\right)^2\right], \qquad (1)$$

[1]) Există și alte studii, citate parțial în [6] și [7], care însă sînt nesistematice sau depășite și, ca atare, nu pot servi ca reper de referință.

Δ_{min} fiind întrefierul (geometric) minim, q — raportul dintre întrefierul maxim și minim de sub piesa polară $q = \frac{\Delta_{max}}{\Delta_{min}}$, α — factorul de acoperire a pasului polar, x — coordonata punctului pe interiorul indusului măsurată din axa polului, iar τ — pasul polar al indusului.

În [7], cu aceleași ipoteze și notații, legea de variație se consideră de forma:

$$\Delta_s = \Delta_{min}\left[1 + (q-1)\frac{1-\cos\frac{\pi x}{\tau}}{1-\cos\frac{\pi\alpha}{2}}\right]. \quad (2)$$

Comparînd cele două expresii, se constată că ele dau valori ale întrefierului egale numai în punctele extreme $x = 0$ și $x = \frac{\alpha\tau}{2}$; în rest expresia (2) dă valori totdeauna mai mari decît (1):

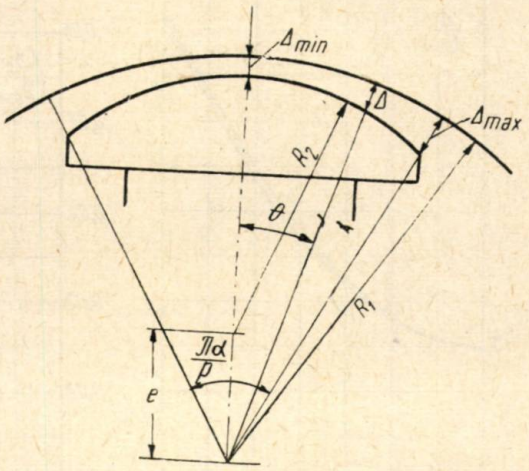


Fig. 1. — Piesă polară circulară, neconcentrică cu alezajul indusului.

$$\Delta_s \geqslant \Delta_k \text{ pentru } 0 \leqslant |x| \leqslant \frac{\alpha\tau}{2}. \quad (3)$$

În figura 2 s-a reprezentat variația întrefierului în funcție de distanța relativă $\frac{2x}{\tau}$ conform expresiilor (1) și (2), pentru valorile medii $\alpha = 0{,}7$ și $q = 2{,}5$.

Pentru a evalua diferențele care se obțin prin folosirea celor două expresii (1) sau (2), s-a calculat diferența lor, care după unele transformări simple se poate pune sub forma:

$$\Delta_s - \Delta_k = (\Delta_{max} - \Delta_{min})\left[\left(\frac{\sin\frac{\pi x}{2\tau}}{\sin\frac{\pi\alpha}{4}}\right)^2 - \left(\frac{2x}{\alpha\tau}\right)^2\right]. \quad (4)$$

Expresia diferenței este maximă pentru

$$x \approx \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\alpha\tau}{2}. \quad (5)$$

În figura 3 s-a reprezentat valoarea maximă a diferenței $(\Delta_s - \Delta_k)_{max}$ raportată la variația întrefierului $(\Delta_{max} - \Delta_{min})$, în funcție de factorul de acoperire α.

În realitate, atît întrefierul geometric, cît și întrefierul echivalent variază în cazul general după legi diferite de (1) sau (2), care reprezintă

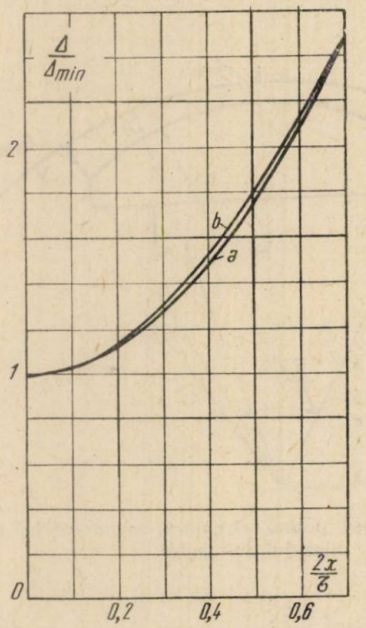


Fig. 2. — Variația întrefierului pentru $\alpha = 0{,}7$ și $q = 2{,}5$ *a*) conform (1) și *b*) conform (2).

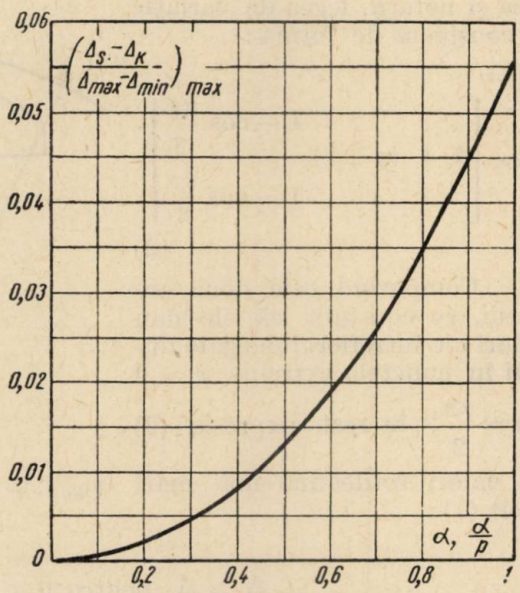


Fig . 3. — Diferența relativă maximă a expresiilor (1) și (2).

numai aproximații cu valabilitate limitată la anumite cazuri particulare.

Cu notațiile din figura 1, întrefierul geometric Δ dintre piesa polară și indus se poate deduce din relația

$$\Delta = R_1 - e\cos\vartheta - \sqrt{R_2^2 - e^2\sin^2\vartheta} \tag{6}$$

care se poate exprima și în funcție de coordonata periferică x, făcînd substituția

$$\vartheta = \frac{x}{R_1} = \frac{\pi x}{p\tau}. \tag{7}$$

Valoarea minimă, respectiv maximă a întrefierului (geometric) este:

$$\Delta_{min} = R_1 - e - R_2, \tag{8}$$

$$\Delta_{max} = R_1 - e\cos\frac{\pi\alpha}{2p} - \sqrt{R_2^2 - e^2\sin^2\frac{\pi\alpha}{2p}}. \tag{9}$$

Expresia (6) a întrefierului geometric scoate în evidență faptul că valorile locale ale întrefierului depind nu numai de valorile extreme și de coordonata punctului, ci și de numărul de perechi de poli p și de raportul dintre valoarea întrefierului minim și pasul polar $\frac{\Delta_{min}}{\tau}$. La limită, cînd $p \to \infty$ și $\frac{\Delta_{min}}{\tau} \to 0$, expresia (6) se confundă cu parabola (1), iar pentru $p = 1$ și $\frac{\Delta_{min}}{\tau} \to 0$ expresia (6) se confundă cu arcul de sinusoidă (2). Valorile intermediare ale lui p aduc curba de variație a întrefierului geometric între cele două curbe extreme, iar creșterea raportului $\frac{\Delta_{min}}{\tau}$ are ca efect aplatizarea curbei de variație în zona absciselor mici.

Întrefierul echivalent se poate calcula mai exact conform lucrării [8], în care se studiază cîmpul dintre două armături cilindrice și se deduce expresia exactă a întrefierului echivalent. Pe baza acestei lucrări și folosind notațiile din figura 1, după unele transformări se poate deduce următoarea expresie a întrefierului echivalent corespunzător armăturii exterioare (indus) [2])

$$\delta_1 + \delta_{min}\left(1 + \nu \sin^2 \frac{\vartheta}{2}\right), \tag{10}$$

unde

$$\delta_{min} = k \frac{2R_1 \Delta_{min}}{2R_1 - \Delta_{min}}, \tag{11}$$

cu

$$k = \frac{1}{\gamma} \operatorname{arg\,th} \gamma, \tag{12}$$

și

$$\nu = \frac{4e R_1}{\Delta_{min}(2R_2 + \Delta_{min})}, \tag{13}$$

iar

$$\gamma = \sqrt{\frac{\Delta_{min}(\Delta_{min} + 2e)}{(2R_1 - \Delta_{min})(2R_2 + \Delta_{min})}}, \tag{14}$$

rămînînd valabilă și relația (7).

Pentru cazul unui număr foarte mare de poli $p \to \infty$ (rezultă $R_1 \to \infty$, $e \to \infty$), prin trecere la limită se obține expresia:

$$\delta_1 = k\left(\Delta_{min} + \frac{x^2}{2R_2 + \Delta_{min}}\right), \tag{15}$$

[2]) Această mărime, egală cu tensiunea magnetică dintre cele două armături raportată la valoarea intensității cîmpului magnetic de pe suprafața armăturii exterioare $\delta_1 = \frac{F_{12}}{H_1}$ se deduce în cazul a două armături echipotențiale cilindrice neconcentrice, cu axe paralele.

unde k este dat de aceeași expresie (12), însă cu

$$\gamma = \sqrt{\frac{\Delta_{min}}{2R_2 + \Delta_{min}}}. \tag{16}$$

În vederea comparării valorii exacte a întrefierului echivalent cu cea rezultată din metodele aproximative (1) și (2), cu valorile extreme conform (8) și (9), s-au calculat pentru valorile medii $\alpha = 0{,}7$, $q = \frac{\Delta_{max}}{\Delta_{min}} = 2{,}5$ și $\frac{\Delta_{min}}{\tau} = 0{,}0318$ curbele $\delta = f(x)$ cu ajutorul formulelor (10) — (16) la $p = 1{,}2{,}3$ și ∞. Pentru evidențierea mai pregnantă a abaterilor, în figura 4 s-a reprezentat diferența dintre curba de variație respectivă și parabola (1), raportate la întrefierul minim Δ_{min}, în funcție de abscisa relativă $\frac{2x}{\tau}$;

$$y = \frac{\delta_1 - \Delta_k}{\Delta_{min}} = f\left(\frac{2x}{\tau}\right). \tag{17}$$

Curba notată cu sin reprezintă curba diferenței (4) raportată la întrefierul minim.

Din studiul curbelor din figura 4 rezultă că în cazul analizat și în altele apropiate folosirea metodelor aproximative (1) și (2) este admisibilă numai la numere mari de poli ($p > 3$). Această limitare însă ar duce la necesitatea calculării unor curbe suplimentare de felul celor prezentate

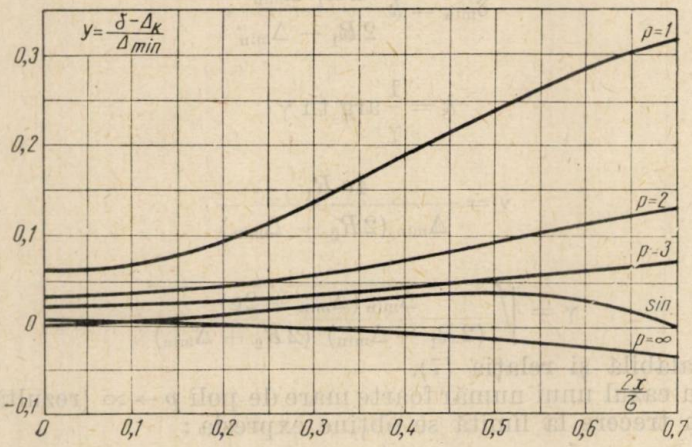


Fig. 4. — Abaterea curbelor de variație a întrefierului de la parabola (1).

în [6] și [7], folosite la calculul parametrilor calitativi și funcționali ai mașinilor sincrone. Pentru a evita acest lucru se recurge la îmbunătățirea gradului de aproximație a curbei reale de variație a întrefierului echivalent printr-o parabolă sau un arc de sinusoidă.

Prin transformări simple se poate arăta că formula aproximativă (2) are aceeași formă cu expresia (10) pentru $p = 1$, diferind doar prin valorile coeficienților δ_{min} și ν. Rezultă că pentru $p = 1$ concluziile lucrării [7] devin exacte, în înțelesul limitat al punctului de vedere analizat, dacă valorile întrefierului minim și a factorului ν se calculează cu formulele (11), (12), (13), iar factorul q se deduce din expresia:

$$q = \frac{\delta_{max}}{\delta_{min}} = 1 + \nu \sin^2 \frac{\pi\alpha}{4p}, \tag{18}$$

unde se ia $p = 1$.

În figurile 5 și 6 se dau diagrame pentru deducerea expeditivă a valorilor întrefierului minim δ_{min} și a factorului ν în funcție de parametrii geometrici $\frac{R_2}{R_1}$ și $\frac{\Delta_{min}}{R_1}$.

În mod analog se observă că pentru $p = \infty$ întrefierul echivalent variază parabolic cu x, rezultînd pentru acest caz valabilitatea exactă a concluziilor lucrării [6], dacă valorile întrefierului minim și a raportului de variație se calculează cu formulele

$$\delta_{min} = k\,\Delta_{min}, \tag{19}$$

$$q = \frac{\delta_{max}}{\delta_{min}} = 1 + \frac{\alpha^2\tau^2}{4\Delta_{min}(2R_2 + \Delta_{min})}, \tag{20}$$

cu k conform (12) și (16).

În figurile 7 și 8 se dau diagrame pentru deducerea factorilor k și q în funcție de rapoartele $\frac{\Delta_{min}}{R_2}$ și $\frac{\Delta_{min}}{\alpha\tau}$, în cazul armăturii statorice plane.

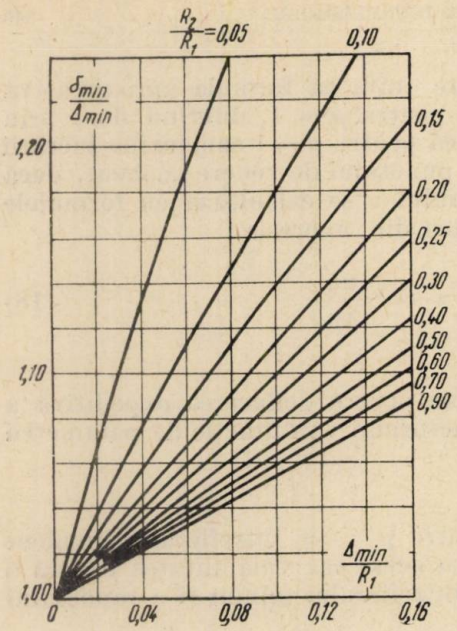
În acest fel, pentru cazurile particulare $p = 1$ și $p = \infty$ s-a creat posibilitatea de a obține rezultate „exacte" și cu ajutorul lucrărilor [6] și [7]. Rămîne de arătat cum trebuie procedat în cazul altor numere de poli sau care este gradul de aproximație introdus prin folosirea fără corecții suplimentare a lucrărilor [6] și [7].

În acest scop se studiază familia de arce de sinusoidă

$$\delta_p(x) = \delta_{min} + (\delta_{max} - \delta_{min}) \frac{\sin^2 \frac{\pi x}{2p\tau}}{\sin^2 \frac{\pi\alpha}{4p}}, \tag{21}$$

cu p ca parametru, care trece prin punctele δ_{min} la $x = 0$ și δ_{max} la $x = \frac{\alpha\tau}{2}$. Se observă că

$$\text{pentru } 1 < p < \infty \text{ rezultă } \delta_\infty(x) < \delta_p(x) < \delta_1(x), \tag{22}$$



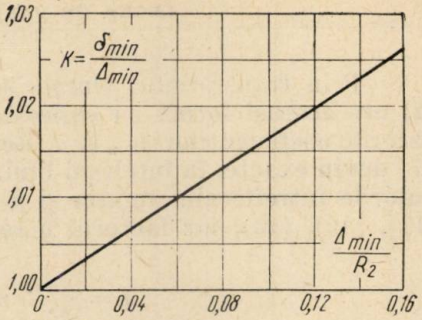


Fig. 7. — Întrefierul echivalent minim raportat la întrefierul geometric minim în funcție de $\frac{\Delta_{min}}{R_2}$, pentru piesa polară conform figurii 1 și armătură statorică plană ($R_1 = \infty$).

Fig. 5 — Întrefierul echivalent minim raportat la întrefierul geometric minim în funcție de $\frac{R_2}{R_1}$ și $\frac{\Delta_{min}}{R_1}$ pentru piesa polară conform figurii 1.

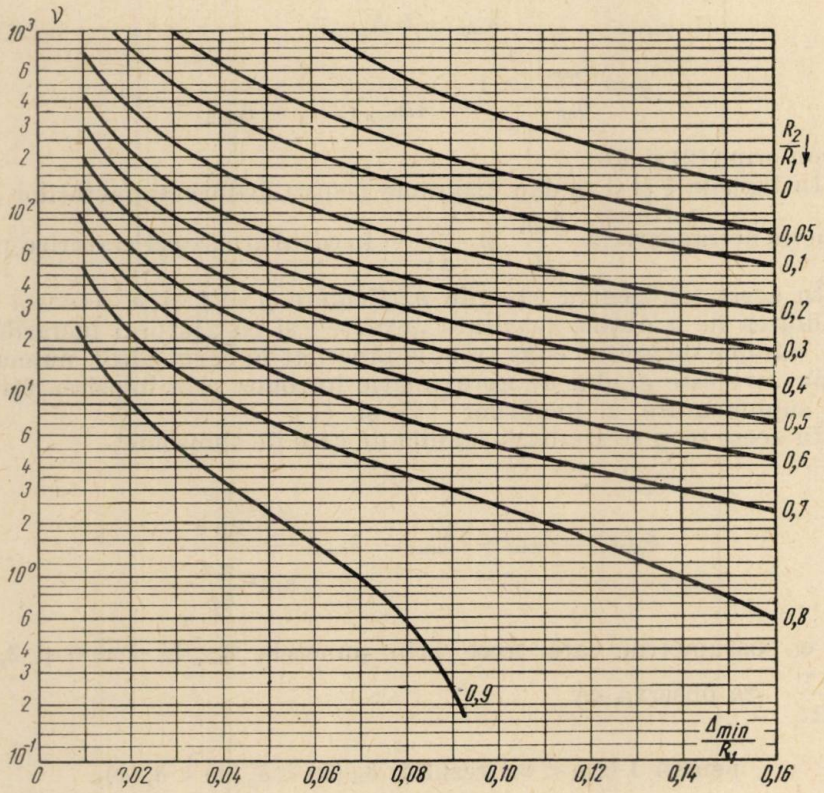


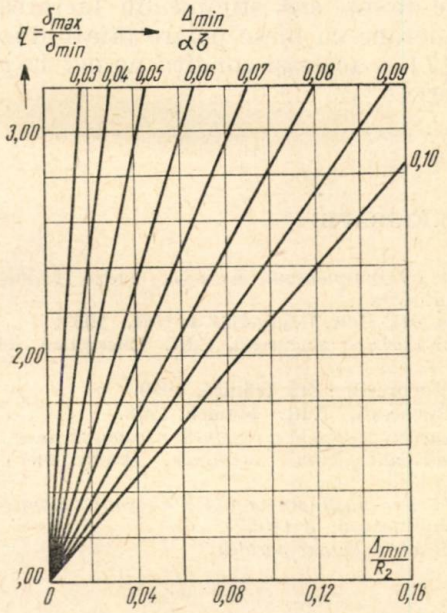
Fig. 6. — Factorul de variație ν (expresia (12)) în funcție de $\frac{R_2}{R_1}$ și $\frac{\Delta_{min}}{R_1}$ pentru piesa polară conform figurii 1.

unde

$$\delta_\infty(x) = \delta_{min} + (\delta_{max} - \delta_{min})\left(\frac{2x}{\alpha\tau}\right)^2, \tag{23}$$

$$\delta_1(x) = \delta_{min} + (\delta_{max} - \delta_{min})\frac{\sin^2\frac{\pi x}{2\tau}}{\sin^2\frac{\pi\alpha}{4}}. \tag{24}$$

În figura 9 s-au reprezentat curbele-diferență $\delta_p(x) - \delta_\infty(x)$ raportate la întrefierul minim δ_{min}, pentru $\alpha = 0{,}7$ și $\frac{\delta_{max}}{\delta_{min}} = 2{,}5$, în funcție de coordonata $\frac{2x}{\tau}$. Se observă că aceste diferențe sînt mult mai mici decît cele reprezentate în figura 4, deci aproximația obținută este mai bună. Pentru toate curbele, cu excepția celei pentru $p = 1$, eroarea de aproximare prin parabolă nu depășește 1% din valoarea întrefierului minim δ_{min}, ceea ce este cu totul satisfăcător pentru calculele tehnice.



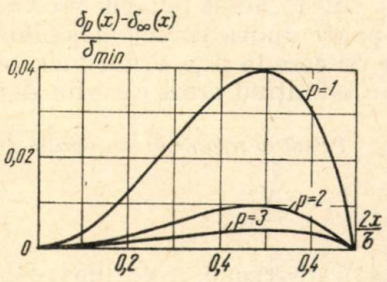


Fig. 9. — Abaterea relativă a curbelor de variație a întrefierului de la parabola (23) pentru $\alpha = 0{,}7$ și $\frac{\delta_{max}}{\delta_{min}} = 2{,}5$.

← Fig. 8. — Raportul de variație al întrefierului echivalent $q = \frac{\delta_{max}}{\delta_{min}}$ în funcție de $\frac{\Delta_{min}}{R_2}$ și $\frac{\Delta_{min}}{\alpha\tau}$, pentru piesa polară conform figurii 1 și armătură statorică plană ($R_1 = \infty$).

Pentru calculul abaterilor se observă că maximul curbelor-diferență are loc la aproximativ aceeași coordonată (5), iar maximul diferenței este dat tot de curba din figura 3 pentru abscisa $\frac{\alpha}{p}$. În sfîrșit, studiind forma curbei-diferență și aproximînd curba din figura 2 printr-o parabolă

se poate stabili următoarea formulă de aproximare a abaterilor față de parabolă :

$$\frac{\delta_p(x) - \delta_\infty(x)}{\delta_{max} - \delta_{min}} = 0{,}215\left(\frac{2x}{p\tau}\right)^2\left[1 - \left(\frac{2x}{\alpha\tau}\right)^2\right]. \qquad (25)$$

CONCLUZII

1. Formulele de aproximație (1) și (2), cu valorile întrefierurilor geometrice (8) și (9), pot da abateri apreciabile de la legea exactă de variație a întrefierului (10) — (16).

2. Legea de variație a întrefierului este influențată și de numărul de poli ai mașinii, contrar ipotezei lucrărilor [6] și [7].

3. Pentru a putea folosi concluziile lucrărilor [6] și [7] cu precizie bună, în formulele (1) și (2) se introduc valorile δ_{min} și δ_{max}, calculate pe baza legii exacte de variație a întrefierului cu expresiile (11), (12), (13) și (18) sau (19) și (20). Cu aceste corecturi, formula de aproximație (1) pentru $p \geqslant 2$ și formula (2) pentru $p = 1$ în domeniul normal de parametri nu dau abateri mai mari de 0,01 δ_{min} față de formulele exacte.

4. În acest fel, cu precizările de mai sus, studiul din lucrarea [6] se poate aplica corect mașinilor sincrone cu piese polare tăiate după un arc de cerc la $p \geqslant 2$, iar lucrarea [7] în aceleași condiții numai la $p = 1$ (sau admițînd erori care nu depășesc 4%).

Primit la redacție la 20 aprilie 1964

BIBLIOGRAFIE

1. М.П. Костенко, Л.М. Пиотровский, *Электрические машины*, часть II. Госэнергоиздат, 1958, Москва-Ленинград.
2. L. M. Piotrovski, *Mașini electrice*, București, Edit. Energetică de stat, 1953.
3. I. M. Postnikov, *Proiectarea mașinilor electrice*. București, Edit. Energetică de stat, 1954.
4. R. Richter, *Mașini electrice*, Vol. II, București, Edit. tehnică, 1959.
5. R. Richter, *Mașini electrice*. Vol. I, București, Edit. tehnică, 1958.
6. М.П. Костенко, Б.Е. Коник, *Определение основной и третей гармоник поля якоря и поля полюсов явнополюсной синхронной машины*. Электричество, *3* (1951).
7. Г.Г. Сорокер, И.И. Горжевский, *Расчет магнитных полей в зазоре явнополюсной синхронной машины*. Электричество, *6* (1952).
8. A. Moraru, *Cîmpul între două armături cilindrice cu axe paralele.*

CONTRIBUŢII LA STUDIUL ÎNCĂLZIRII ROTOARELOR MASIVE ALE MAŞINILOR SINCRONE LA PORNIRE ÎN ASINCRON

DE

A. C. NICOLAIDE

621.313.32 : 621.3.017

În această lucrare se urmăreşte să se dea o metodă simplă de calcul pentru predeterminarea încălzirii unui rotor masiv la pornire. Lucrarea este o continuare a articolului [1], în care s-a examinat cazul variaţiei liniare în raport cu timpul a vitezei rotorului şi s-a dat soluţia analitică a problemei. În lucrarea [2], apărută ulterior, se tratează aceeaşi chestiune fără a se aduce rezultate noi faţă de lucrarea [1] a autorului.

În timpul pornirii în asincron a unei maşini sincrone cu rotorul masiv, în rotor se dezvoltă căldură datorită curenţilor turbionari care apar daţi de cîmpurile învîrtitoare.

Este necesar să se efectueze calculul încălzirii unui rotor masiv pentru a se putea predetermina dacă în timpul pornirii, temperatura rotorului nu atinge valori inadmisibile, ceea ce ar putea duce la distrugerea izolaţiei înfăşurării dispuse pe rotor [1], [2].

Studiul cîmpului electromagnetic şi al efectului termic în conductoare masive a făcut obiectul unor lucrări ample [3], [4], [5], [6], însă studiul încălzirii unui rotor masiv a fost mai puţin examinat în literatură.

În lucrarea de faţă se urmăreşte să se dea o metodă simplă şi generală pentru calculul încălzirii unui rotor masiv la pornire.

Această lucrare este o continuare a unui studiu anterior al autorului [1]. În lucrarea [1] s-a dat prima soluţie analitică cunoscută în literatură

a problemei încălzirii unui rotor masiv la pornire. Ulterior a apărut în literatură articolul [2] al lui Sattler, care tratează numai parțial aceeași chestiune pentru rotorul cu polii ieșiți.

În cele ce urmează, spre deosebire de lucrarea [1], unde se abordează doar cazul particular al variației liniare a vitezei rotorului în funcție de timp în perioada pornirii, se tratează cazul unei variații a vitezei după o lege polinomială în funcție de timp.

CALCULUL ÎNCĂLZIRII UNUI ROTOR MASIV LA PORNIRE

Admitem următoarele ipoteze simplificatoare :

1) rotorul se consideră cilindric și densitatea fluxului de căldură evacuată, uniform distribuită pe suprafața lui ;

2) se neglijează evacuarea căldurii pe la părțile frontale ;

3) influența curburii se consideră neglijabilă ;

4) se presupune că nu are loc cedare de căldură de la rotor spre întrefier ;

5) turația este o funcție de timp de forma unui polinom întreg ;

6) se admite că pierderile din rotor variază proporțional cu alunecarea ;

7) în cazul rotoarelor crestate se va considera drept suprafață activă a rotorului suprafața capetelor dinților. Pierderile specifice pe unitatea de suprafață în acest caz se obțin împărțind pierderile totale din miezul rotorului cu suprafața activă a rotorului. În cazul rotoarelor cu poli aparenți se va considera drept suprafață activă numai suprafața pieselor polare, dacă miezul polului este lamelat, și se va adăuga și suprafața laterală a polului, dacă miezul polului este masiv.

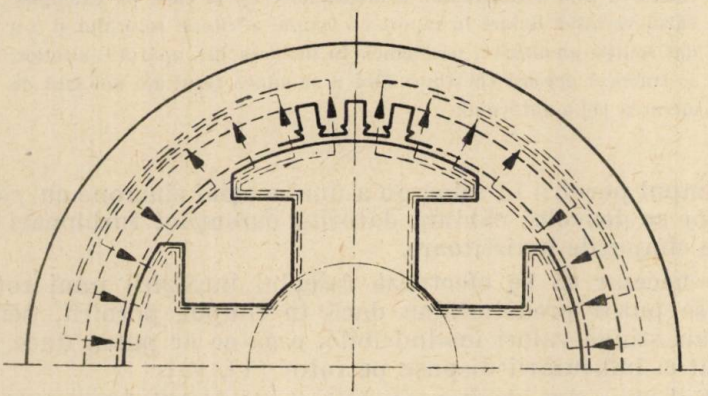


Fig. 1. — Reprezentarea aproximativă la funcționarea în asincron a liniilor cîmpului magnetic longitudinal într-un pol aparent masiv.

Ipotezele de mai sus, cu excepția ipotezei 5, sînt introduse după lucrarea [1]. Cu ipotezele admise, încălzirile calculate vor fi superioare celor reale și deci calculul oferă o deplină siguranță.

Dacă se examinează încălzirea unui rotor masiv cu poli aparenți, este suficient să se determine încălzirea suprafeței rotorului (fig. 1).

Dacă însă se examinează încălzirea unui rotor masiv cu poli înecați, este necesar să se studieze cîmpul temperaturii în adîncimea rotorului pentru a putea determina încălzirea la care este expusă izolația înfășurării dispusă în crestăturile rotorului [8]. Prezența crestăturilor modifică repartiția cîmpului magnetic, a pierderilor și a încălzirii diferitelor zone din rotor. Calculul exact al cîmpului temperaturii din rotor, ținînd seama de existența dinților, ar fi deosebit de complicat. Se pot considera însă două cazuri-limită. Primul caz este acela cînd fluxul magnetic străbate numai capetele dinților și se închide de la un dinte la altul prin crestătură (fig. 2).

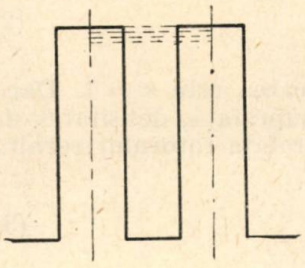


Fig. 2. — Reprezentarea aproximativă la funcționarea în asincron a liniilor de cîmp magnetic între dinții unui rotor masiv în ipoteza că fluxul se închide numai prin crestătură.

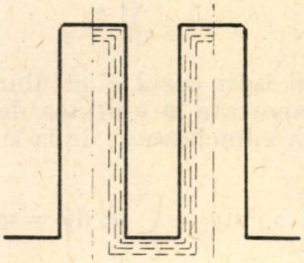


Fig. 3. — Reprezentarea aproximativă la funcționarea în asincron a liniilor de cîmp magnetic între dinții unui rotor masiv în ipoteza că fluxul se închide numai prin fețele laterale ale crestăturii.

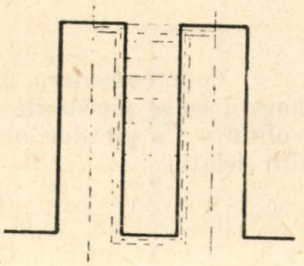


Fig. 4. — Reprezentarea aproximativă la funcționarea în asincron a liniilor de cîmp magnetic între dinții unui rotor masiv, în situația reală, adică cînd fluxul trece atît prin crestătură, cît și prin pereții laterali ai crestăturii.

Al doilea caz este acela cînd fluxul magnetic străbate capetele dinților și se închide de la un dinte la altul prin pereții laterali ai crestăturilor (fig. 3).

Dacă s-ar face calculele pentru primul caz, suprafața activă a rotorului fiind mai mică, s-ar obține pentru aceleași pierderi totale în rotor pierderi specifice mai mari decît în cazul rotorului masiv cilindric neted.

Dacă s-ar face calculele pentru al doilea caz, suprafața activă a rotorului fiind mai mare, s-ar obține pentru aceleași pierderi totale în rotor pierderi specifice mai mici decît în cazul rotorului cilindric neted.

În realitate are loc situația intermediară, și anume fluxul magnetic se închide între capetele dinților vecini, atît prin crestătură, cît și prin pereții laterali ai crestăturii (fig. 4).

Experimental s-a constatat că fluxul magnetic pătrunde pînă la fundul crestăturii, dar el este mai mic în partea inferioară decît în partea superioară [8].

Efectuînd calculele pentru primul caz, se obțin încălziri superioarcelor reale, deci rezultatele oferă deplină siguranță. De aceea se va considera drept suprafață activă a rotorului suprafața capetelor dinților [8].

Vom determina, admițînd ipotezele de mai sus, încălzirea rotoarelor masive.

Conform ipotezei 5, turația în unități relative se poate scrie :

$$\frac{n}{n_s} = n_r = f_r(t) = \sum_{i=1}^{i=n} a_i \frac{t^i}{t_p^i}, \tag{1}$$

unde a_i sînt coeficienții de care depinde forma curbei, t timpul scurs de la începutul pornirii, iar t_p timpul cît durează pornirea. Pentru toate cazurile care intervin în practică, curba $n_r = f_r(t)$ poate fi aproximată prin primii termeni ai polinomului (1), de multe ori chiar numai prin primul termen. Alunecarea este :

$$s = 1 - \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{t^i}{t_p^i} \cdot \tag{2}$$

Vom considera mai întîi cazul cînd alunecarea este $s = 1$. Dacă notăm cu w pierderile raportate la unitatea de suprafață, densitatea de volum w_v a pierderilor la adîncimea y de la suprafața rotorului rezultă din relația

$$\int_0^\infty \rho j^2 \, dy = \int_0^\infty w_v \, dy = w \cdot \tag{3}$$

Vom presupune o variație exponențială a densității de curent cu adîncimea [1], deci

$$j = j_{y=0} \cdot e^{-\alpha y}.$$

Se poate scrie :

$$w_v = w_0 e^{-2\alpha y}.$$

Din relațiile (2) și (3) rezultă

$$\int_0^\infty w_0 e^{-2\alpha y} \, dy = w. \tag{4}$$

Deci

$$w_0 = 2 \alpha w$$

și densitatea de volum a pierderilor prin efect termic la adîncimea y este prin urmare :

$$w_v = 2 \alpha w e^{-2\alpha y}. \tag{5}$$

Deoarece pierderile conform ipotezei 6 se admit proporționale cu turația, rezultă că la o alunecare s densitatea de volum a pierderilor este

$$w_v = 2 \alpha w \left(1 - \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{t^i}{t_p^i}\right) e^{-2\alpha y},$$

unde w sînt pierderile raportate la unitatea de suprafață pentru alunecarea s.

Ecuația de transmisie a căldurii pentru un punct la adîncimea y în interiorul rotorului masiv, cu notațiile folosite în lucrarea de față, este :

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} - \frac{1}{a} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial t} = -\frac{2\alpha w}{k}\left(1 - \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{t^i}{t_p^i}\right) \cdot e^{-2\alpha y}. \tag{6}$$

Condițiile la limită sînt cele de mai jos.

I. Pentru suprafața de cedare a căldurii (spre întrefier în cazul cînd s-ar admite că există o astfel de cedare de căldură) există relația :

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial y}\right)_{y=0} = h\theta_{y=0} \cdot \tag{7}$$

II. Fluxul de căldură la infinit este nul :

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial y}\right)_{y=\infty} = 0 \cdot \tag{8}$$

III. Condiția inițială este

$$\theta(y, t)_{t=0} = 0, \tag{9}$$

deoarece se presupune că în momentul inițial temperatura rotorului este aceeași în toate punctele sale și egală cu aceea a fluidului refrigerent.

Facem schimbările de variabilă

$$\tau = am^2 t, \tag{10}$$

$$\eta = my, \tag{11}$$

unde

$$m = 2\alpha. \tag{12}$$

Notăm

$$\frac{mk}{w}\theta = f \cdot \tag{13}$$

Ținînd seama de relațiile (7), (8), (9), ecuația (6) devine

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - \frac{\partial f}{\partial \tau} = -\left(1 - \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\tau^i}{\tau_p^i}\right) e^{-\eta} \cdot \tag{14}$$

Aplicînd ecuației (11) transformarea dublă a lui Carson cu condițiile la limită și inițială (7), (8), (9), se obține ecuația transformată :

$$q^2 F_q - q^2 F_{\eta=0} - q\left(\frac{\partial F}{\partial \eta}\right)_{\eta=0} - pF_q = -\left(1 - \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{i!}{p^i} \cdot \frac{1}{\tau_p^i}\right) \cdot \frac{q}{q+1}, \tag{15}$$

unde

$$F = F(p, \eta) = p\int_0^\infty f(\tau, \eta) e^{-p\tau} d\tau \tag{16}$$

şi

$$F_q = F_{pq} = q\int_0^\infty F(p,\eta)\, e^{-q\eta}\, d\eta\,, \tag{17}$$

adică cu notaţia cunoscută

$$F_q(p,q) \doteq f(\tau,\eta). \tag{18}$$

Notăm

$$F_{\eta=0} = F_0\,.$$

Ţinînd seama de condiţia (7), ecuaţia (15) dă

$$F_q = -\left(1-\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{i!}{p^i}\cdot\frac{1}{\tau_p^i}\right)\frac{q}{q+1}\cdot\frac{1}{q^2-p} + \frac{q^2+qh'}{q^2-p}F_0\,, \tag{19}$$

sau, descompunînd în fracţii simple,

$$F_q = -\left(1-\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{i!}{p^i}\cdot\frac{1}{\tau_p^i}\right)\left[\frac{Aq}{q-\sqrt{p}} + \frac{Bq}{q+\sqrt{p}} + \frac{Cq}{q+1}\right] + \\ + \frac{q^2}{q^2-p}F_0 + \frac{qh'}{q^2-p}F_0\,, \tag{20}$$

unde

$$A = \frac{1}{2\sqrt{p}\,(1+\sqrt{p})}\,,$$

$$B = -\frac{1}{2\sqrt{p}\,(1-\sqrt{p})}\,,$$

$$C = \frac{1}{1-p}\,.$$

Originalul lui F_q în raport cu q este

$$F = -\left(1-\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{i!}{p^i}\cdot\frac{1}{\tau_p^i}\right)\cdot\left[Ae^{\eta\sqrt{p}} + Be^{-\eta\sqrt{p}} + Ce^{-\eta}\right] + \\ + F_0\left[ch\eta\sqrt{p} + \frac{h'}{\sqrt{p}}sh\eta\sqrt{p}\right]. \tag{21}$$

Din condiţia (II) şi relaţia (21) urmează că trebuie să avem :

$$-\left(1-\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{i!}{p^i}\cdot\frac{1}{\tau_p^i}\right)A + \frac{1}{2}F_0 + \frac{h'}{2\sqrt{p}}F_0 = 0\,. \tag{22}$$

Rezultă :

$$F_0 = \left(1-\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{i!}{p^i}\cdot\frac{1}{\tau_p^i}\right)\frac{1}{(1+\sqrt{p})\,(h'+\sqrt{p})}\,. \tag{23}$$

Înlocuind în relația (21) expresia lui F_0 dată de relația (23), se obține

$$F = \left(1 - \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{i!}{p^i} \cdot \frac{1}{\tau_p^i}\right) \frac{1}{2\sqrt{p}\,(1-\sqrt{p})}\, e^{-\eta\sqrt{p}} + \frac{1}{2}\left(1 - \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{i!}{p^i} \cdot \frac{1}{\tau_p^i}\right) \cdot$$

$$\cdot \frac{1 - \dfrac{h'}{\sqrt{p}}}{(1+\sqrt{p})(h'+\sqrt{p})}\, e^{-\eta\sqrt{p}} - \left(1 - \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{i!}{p^i} \cdot \frac{1}{\tau_p^i}\right) \frac{1}{1-p} \cdot e^{-\eta}$$

sau

$$F = \frac{(h'+1)\, e^{-\eta\sqrt{p}}}{(h'+\sqrt{p})(1+\sqrt{p})(1-\sqrt{p})} \cdot \left(1 - \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{i!}{p^i} \cdot \frac{1}{\tau_p^i}\right) -$$

$$- \frac{1}{1-p}\, e^{-\eta}\left(1 - \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{i!}{p^i} \cdot \frac{1}{\tau_p^i}\right). \tag{24}$$

În baza ipotezei 4 se ia $h' = 0$ și relația (24) devine:

$$F = \left(1 - \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{i!}{p^i} \cdot \frac{1}{\tau_p^i}\right) \cdot \frac{-e^{-\eta\sqrt{p}}}{\sqrt{p}\,(\sqrt{p}+1)(\sqrt{p}-1)} +$$

$$+ \left(1 - \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{i!}{p^i} \cdot \frac{1}{\tau_p^i}\right) \cdot \frac{1}{p-1}\, e^{-\eta}. \tag{25}$$

Relația (25) se poate scrie ca fiind suma a patru termeni:

$$F = S_1 + S_2 + S_3 + S_4, \tag{26}$$

unde s-a notat

$$S_1 = \frac{-e^{-\eta\sqrt{p}}}{\sqrt{p}\,(\sqrt{p}+1)(\sqrt{p}-1)}; \quad S_3 = \frac{e^{-\eta}}{p-1};$$

$$S_2 = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{i!}{\tau_p^i} \cdot \frac{e^{-\eta\sqrt{p}}}{p^{i+\frac{1}{2}}(\sqrt{p}+1)(\sqrt{p}-1)}; \quad S_4 = -\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{i!}{\tau_p^i} \cdot \frac{e^{-\eta}}{p^i(p-1)}.$$

Avem, descompunînd în fracții simple:

$$S_1 = \frac{-e^{-\eta\sqrt{p}}}{\sqrt{p}\,(\sqrt{p}+1)(\sqrt{p}-1)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{-e^{-\eta\sqrt{p}}}{\sqrt{p}-1} +$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot \frac{-e^{-\eta\sqrt{p}}}{\sqrt{p}+1} + \frac{e^{-\eta\sqrt{p}}}{\sqrt{p}}. \tag{27}$$

Se trece la original şi se obţine

$$S_1 \doteqdot \frac{1}{2}\left[\operatorname{erfc}\frac{\eta}{2\sqrt{\tau}} - \exp(-\eta+\tau)\operatorname{erfc}\left(\frac{\eta}{2\sqrt{\tau}} - \sqrt{\tau}\right)\right] -$$

$$-\frac{1}{2}\left[\operatorname{erfc}\frac{\eta}{2\sqrt{\tau}} - \exp(\eta+\tau)\operatorname{erfc}\left(\frac{\eta}{2\sqrt{\tau}} + \sqrt{\tau}\right)\right] +$$

$$+\left[2\tau\frac{e^{-\eta^2/4\tau}}{\sqrt{\pi\tau}} - \eta\operatorname{erfc}\frac{\eta}{2\sqrt{\tau}}\right],$$

sau

$$S_1 \doteqdot -\frac{1}{2}\exp(-\eta+\tau)\operatorname{erfc}\left(\frac{\eta}{2\sqrt{\tau}} - \sqrt{\tau}\right) +$$

$$+\frac{1}{2}\exp(\eta+\tau)\operatorname{erfc}\left(\frac{\eta}{2\sqrt{\tau}} + \sqrt{\tau}\right) + 2\tau\frac{e^{-\eta^2/4\tau}}{\sqrt{\pi\tau}} -$$

$$-\eta\operatorname{erfc}\frac{\eta}{2\sqrt{\tau}}. \tag{28}$$

De asemenea se obţine

$$S_3 \doteqdot e^{-\eta}(e^{\tau}-1). \tag{29}$$

Avem, descompunînd în fracţii simple (anexa 1):

$$S_2 = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{i!}{\tau_p^i}\cdot\frac{e^{-\eta\sqrt{p}}}{p^{i+\frac{1}{2}}(\sqrt{p}+1)(\sqrt{p}-1)} = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{i!}{\tau_p^i} e^{-\eta\sqrt{p}} \times$$

$$\times\left[-\sum_{j=0}^{i}\frac{1}{p^{j+\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{p}-1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{p}+1}\right]. \tag{30}$$

Se trece la original şi se obţine:

$$S_2 \doteqdot -\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{i!}{\tau_p^i}\cdot\left[\sum_{j=0}^{i}(4\tau)^{j+\frac{1}{2}}\cdot\left(I^{2j+1}\operatorname{erfc}\frac{\eta}{2\sqrt{\tau}}\right)\right] -$$

$$-\frac{1}{2}\left[\operatorname{erfc}\frac{\eta}{2\sqrt{\tau}} - \exp(-\eta+\tau)\operatorname{erfc}\left(\frac{\eta}{2\sqrt{\tau}} - \sqrt{\tau}\right)\right]\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{i!}{\tau_p^i} +$$

$$+\frac{1}{2}\left[\operatorname{erfc}\frac{\eta}{2\sqrt{\tau}} - \exp(\eta+\tau)\operatorname{erfc}\left(\frac{\eta}{2\sqrt{\tau}} + \sqrt{\tau}\right)\right]\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{i!}{\tau_p^i}. \tag{31}$$

De asemenea se obţine descompunînd în fracţii simple (anexa 1):

$$S_4 = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{i!}{\tau_p^i}\cdot\frac{-e^{-\eta}}{p^i(p-1)} = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{i!}{\tau_p^i}\cdot(-e^{-\eta})\cdot\left[\sum_{j=1}^{i} -\frac{1}{p^j} + \frac{1}{p-1}\right] \tag{32}$$

și, trecînd la original, avem :

$$S_4 \doteq \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{i!}{\tau_p^i} e^{-\eta} \left[\sum_{j=1}^{i} \frac{\tau^j}{j!} - (e^{\tau} - 1) \right]. \tag{33}$$

Funcția $f(\tau, \eta)$ din relația (13) este dată deci de formula

$$f(\tau,\eta) = \frac{1}{2}\left(1 - \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{i!}{\tau_p^i}\right) \exp(-\eta + \tau) \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\tau} - \frac{\eta}{2\sqrt{\tau}}\right) +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(1 - \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{i!}{\tau_p^i}\right) \exp(\eta + \tau) \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\tau} + \frac{\eta}{2\sqrt{\tau}}\right) +$$

$$+ \frac{2\sqrt{\tau}}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-\eta^2/4\tau} - \eta \operatorname{erfc} \frac{\eta}{2\sqrt{\tau}} -$$

$$- \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{i!}{\tau_p^i} \left[\sum_{j=0}^{i} (4\tau)^{j+\frac{1}{2}} \cdot \left(I^{2j+1} \operatorname{erfc} \frac{\eta}{2\sqrt{\tau}} \right) \right] -$$

$$- \left(1 - \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{i!}{\tau_p^i}\right) e^{-\eta} + \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{i!}{\tau_p^i} \cdot \sum_{j=1}^{i} \frac{\tau^j}{j!} \cdot e^{-\eta}. \tag{34}$$

Încălzirea suprafeței rotorului se obține punînd $\eta = 0$ în expresia (34). Pentru calculele practice, relația (34) se poate simplifica, observînd că termenii care conțin pe $I^j \operatorname{erfc} u$ sînt neglijabili pentru valorile mari ale lui j, de obicei pentru $j \geqslant 4$. Aproximînd curba $n_r = f_r(t)$ prin primii termeni, expresia (34) se poate pune sub o formă mai simplă și mai potrivită pentru calcule în diferitele cazuri care interesează. Prezintă interes practic deosebit cazul variației liniare a turației în timpul pornirii [1], [8], [9].

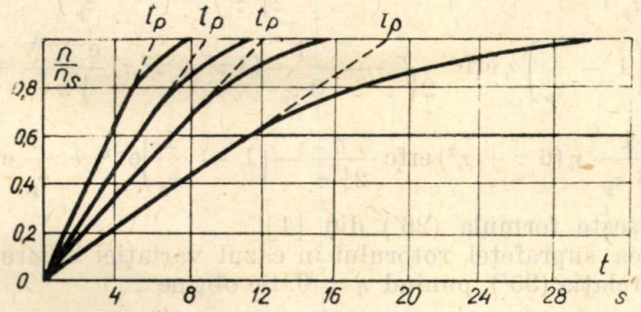


Fig. 5 — Aproximarea curbei $n_r = f_r(t)$, prin dreapta tangentă în origine.

În cazul cînd variația turației în timpul pornirii $n_r = f_r(t)$ nu se abate prea mult de la o dreaptă, se poate face aproximația [10] de a considera turația ca variind liniar în raport cu timpul, după dreapta tangentă

în origine la curba $n_r = f_r(t)$, după cum se indică în figura 5. În acest caz se consideră drept timp de pornire timpul t_p, determinat ca în figura 5. unde sînt indicate patru curbe $n_r = f_r(t)$ și timpul t_p pentru fiecare din ele.

În acest caz avem :

$$n = 1, \quad a_1 = 1,$$

și relația (34) se simplifică și devine

$$f(\tau, \eta) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\tau_p}\right)\exp(-\eta + \tau)\operatorname{erfc}\left(\sqrt{\tau} - \frac{\eta}{2\sqrt{\tau}}\right) +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\tau_p}\right)\exp(\eta + \tau)\operatorname{erfc}\left(\sqrt{\tau} + \frac{\eta}{2\sqrt{\tau}}\right) +$$

$$+ \left(1 - \frac{1}{\tau_p}\right)2\tau\frac{e^{-\eta^2/4\tau}}{\sqrt{\pi\tau}} - \left(1 - \frac{1}{\tau_p}\right)\eta\operatorname{erfc}\frac{\eta}{2\sqrt{\tau}} - \frac{1}{\tau_p}(4\tau)^{3/2} \cdot$$

$$\cdot\left(I^3\operatorname{erfc}\frac{\eta}{2\sqrt{\tau}}\right) - \left(1 - \frac{1}{\tau_p}\right)e^{-\eta} + \frac{\tau}{\tau_p}e^{-\eta} \cdot \qquad (35)$$

Comparînd expresia din linia 8 cu expresia din linia 9 din tabela de originale și imagini (tabela I), se vede că funcția $(4\tau)^{3/2}\left(I^3\operatorname{erfc}\frac{\eta}{2\sqrt{\tau}}\right)$ se poate scrie sub altă formă.

Astfel, relația (35) se poate scrie :

$$f(\tau,\eta) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\tau_p}\right)\exp(-\eta + \tau)\operatorname{erfc}\left(\sqrt{\tau} - \frac{\eta}{2\sqrt{\tau}}\right) +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\tau_p}\right)\exp(\eta + \tau)\operatorname{erfc}\left(\sqrt{\tau} + \frac{\eta}{2\sqrt{\tau}}\right) + \left(1 - \frac{1}{\tau_p}\right)\cdot 2\tau\frac{e^{-\eta^2/4\tau}}{\sqrt{\pi\tau}} -$$

$$- \left(1 - \frac{1}{\tau_p}\right)\eta\operatorname{erfc}\frac{\eta}{2\sqrt{\tau}} - \frac{1}{3\tau_p}(4\tau^2 + \eta^2\tau)\frac{e^{-\eta^2/4\tau}}{\sqrt{\pi\tau}} +$$

$$+ \frac{1}{6\tau_p}\eta(6\tau + \eta^2)\operatorname{erfc}\frac{\eta}{2\sqrt{\tau}} - \left(1 - \frac{1}{\tau_p}\right)e^{-\eta} + \frac{\tau}{\tau_p}e^{-\eta}. \qquad (35')$$

Se regăsește formula (26′) din [1].

Încălzirea suprafeței rotorului în cazul variației liniare a turației se obține din relația (35′), punînd $\eta = 0$. Se obține

$$f(\tau) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\tau_p}\right)e^{\tau}\cdot\operatorname{erfc}\sqrt{\tau} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\tau_p}\right)e^{\tau}\operatorname{erfc}\sqrt{\tau} +$$

$$+ \left(1 - \frac{1}{\tau_p}\right)\frac{2\sqrt{\tau}}{\sqrt{\pi}} - \frac{4\tau^2}{3\tau_p\sqrt{\pi\tau}} - \left(1 - \frac{1}{\tau_p}\right) + \frac{\tau}{\tau_p} \cdot \qquad (36)$$

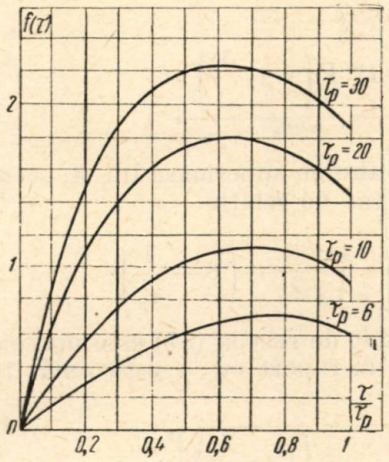


Fig. 6. — Curbele $f(\tau)$ pentru diferite valori ale lui τ_p.

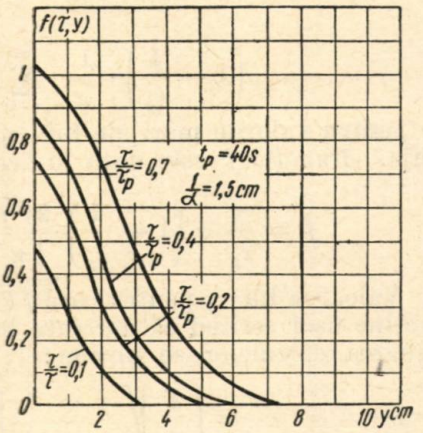


Fig. 8 — Curbele $f(\tau, y)$ pentru diferite valori ale lui $\frac{\tau}{\tau_p}$.

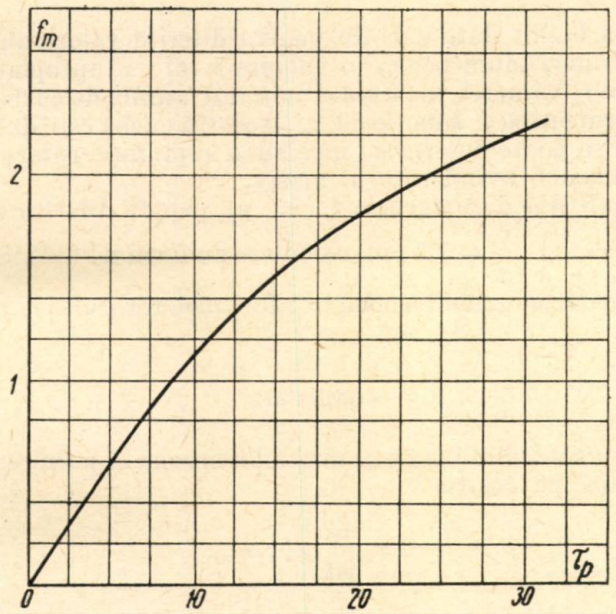


Fig. 7 — Curba $f_m(\tau_p)$ necesară pentru calculul încălzirii maxime.

Pentru a face relația (36) mai potrivită pentru calcule numerice, vom înlocui funcția erfc prin dezvoltarea ei asimptotică [7]. Se obține pentru primul termen al lui f expresia

$$\left(1-\frac{1}{\tau_p}\right)\cdot\frac{1}{\pi}\cdot\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}{\tau^{\nu+1/2}},$$

care pentru valorile mari ale lui τ, și anume superioare lui 4, se poate neglija. Funcția f este dată în acest caz de relația

$$f=\frac{\tau}{\tau_p}+\left(1-\frac{1}{\tau_p}\right)\frac{2\sqrt{\tau}}{\sqrt{\pi}}-\frac{4\,\tau^{3/2}}{3\,\tau_p\sqrt{\pi}}-\left(1-\frac{1}{\tau_p}\right). \tag{37}$$

Valoarea lui τ, pentru care $f(\tau)$ dat de relația (37) este maximum, se obține ușor scriind că derivata lui f în raport cu τ este nulă. După efectuarea calculelor se obține:

$$\frac{\tau}{\tau_p}=\left[\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\tau_p}}+\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\tau_p}+8\left(1-\frac{1}{\tau_p}\right)}\right]^2. \tag{38}$$

Pentru cele mai multe cazuri se obține aproximativ $\frac{\tau}{\tau_p}=0{,}7$ sau o valoare apropiată.

În figura 6 sînt date curbele pentru diferite valori ale lui τ_p. Se vede că f este maximum pentru o valoare a lui τ apropiată de $0{,}7\ \tau_p$. Dacă notăm cu f_m valoarea maximă a lui f, din familia de curbe din figura 6 se poate construi curba f_m funcție de τ_p. Această curbă este dată în figura 7. Cu ajutorul ei se poate determina încălzirea suprafeței rotorului la pornire pentru orice mașină avînd rotorul masiv.

În figura 8 sînt date curbele $f(\tau,\ y)$, pentru diferite valori ale lui $\frac{\tau}{\tau_p}$, la $t_p=40$ s și $\frac{1}{\alpha}=1{,}5$ cm, calculate cu formula (35). Se pune astfel în evidență repartiția undei termice în adîncimea rotorului la pornirea asincronă.

CONCLUZII

Încălzirea rotorului masiv al mașinii sincrone la pornirea în asincron se poate calcula cu relația

$$\theta=\frac{w}{mk}f(\tau,\eta), \tag{39}$$

unde τ și η se obțin cu relațiile (10) și (11). Valoarea lui $f(\tau,\ \eta)$ se poate calcula cu relația (34). În funcție de cazul studiat se pot face simplificări, limitîndu-se la primii coeficienți a_i din polinomul (1).

Interes deosebit prezintă cazul variației liniare a turației în timpul pornirii, la care se reduc numeroase situații care au loc în practică. Pierderile din rotor se calculează cu ajutorul formulelor indicate în literatură [11], [12].

Valoarea maximă a lui f, adică f_m, se poate lua din curba din figura 7.

Rezultatele obținute prin calcul concordă satisfăcător cu rezultatele obținute experimental (anexa 2).

NOTAȚII

c — căldura specifică a metalului, în $J/g°C$,

$a = \frac{k}{c\delta}$ — difuzibilitatea termică, în cm^2/s,

h — coeficientul de convecție al suprafeței metalului, în cm^{-1},

$h' = \frac{h}{m}$,

k — conductivitatea metalului, în $W/cm°C$,

$m = 2\alpha$,

t — timpul, în s.

t_p — durata pornirii, în s,

w — pierderile pe unitate de suprafață, în W/cm^2,

y — distanța de la suprafața plăcii, în cm,

α — inversul adîncimii de pătrundere a cîmpului electromagnetic, în cm^{-1},

δ — densitatea metalului, în g/cm^3,

$\eta = my$,

θ — încălzirea rotorului față de fluidul refrigerent în punctul situat la distanța y de suprafață,

$$\tau = a\, m^2\, t\,, \qquad \tau_p = a\, m^2\, t_p\,.$$

ANEXA 1

S-au utilizat notațiile :

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2}\, du \qquad \text{— funcția de eroare,}$$

$$\operatorname{erfc} x = 1 - \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-u^2}\, du \text{ — complementul funcției de eroare.}$$

$I^n \operatorname{erfc} n$ — integrala de ordinul n a complementului funcției de eroare.

Menționăm că există tabele cu valorile funcțiilor exp, erf, erfc, I^n erfc, în funcție de diferitele valori ale argumentului [13], [14].

Tabela 1

Tabela de originale și imagini în transformarea Carson

Nr.	$A(t)$	$\varphi(p)$
1	$\frac{\sqrt{p}}{\lambda+\sqrt{p}} e^{-a\sqrt{p}}$	$\exp(a\lambda+\lambda^2 t)\ \operatorname{erfc}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}+\lambda\sqrt{t}\right)$
2	$\frac{p}{\lambda+\sqrt{p}} e^{-a\sqrt{p}}$	$\frac{e^{-a^2/4t}}{\sqrt{\pi t}}-\lambda\ \exp(a\lambda+\lambda^2 t)\ \operatorname{erfc}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}+\lambda\sqrt{t}\right)$
3	$\frac{\lambda}{\lambda+\sqrt{p}} e^{-a\sqrt{p}}$	$\operatorname{erfc}\frac{a}{2\sqrt{t}}-\exp(a\lambda+\lambda^2 t)\ \operatorname{erfc}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}+\lambda\sqrt{t}\right)$
4	$\frac{\sqrt{p}}{(\lambda+\sqrt{p})^2} e^{-a\sqrt{p}}$	$2t\frac{e^{-a^2/4t}}{\sqrt{\pi t}}-(a+2\lambda t)\exp(a\lambda+\lambda^2 t)\ \operatorname{erfc}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}+\lambda\sqrt{t}\right)$
5	$\frac{e^{-a\sqrt{p}}}{1+\sqrt{p}}$	$\operatorname{erfc}\frac{a}{2\sqrt{t}}-\exp(a+t)\ \operatorname{erfc}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}+\sqrt{t}\right)$
6	$\frac{-e^{-a\sqrt{p}}}{-1+\sqrt{p}}$	$\operatorname{erfc}\frac{a}{2\sqrt{t}}-\exp(-a+t)\operatorname{erfc}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}-\sqrt{t}\right)$
7	$\frac{e^{-a\sqrt{p}}}{p^{1/2}}$	$2t\cdot\frac{e^{-a^2/4t}}{\sqrt{\pi t}}-a\ \operatorname{erfc}\frac{a}{2\sqrt{t}}$
8	$\frac{e^{-a\sqrt{p}}}{p^{3/2}}$	$\frac{1}{3}(4t^2+a^2t)\cdot\frac{e^{-a^2/4t}}{\sqrt{\pi t}}-\frac{a}{6}(6t+a^2)\operatorname{erfc}\frac{a}{2\sqrt{t}}$
9	$\frac{e^{-a\sqrt{p}}}{p^{n/2}}$	$(4t)^{n/2}\ I^n\ \operatorname{erfc}\ \frac{a}{2\sqrt{t}}$

La calculul relației (34) s-a utilizat identitatea

$$\operatorname{erfc} x = 2 - \operatorname{erfc}(-x).$$

La descompunerea în fracții simple a expresiilor (30) și (32) s-au folosit respectiv identitățile:

$$\frac{1}{u^{2i+1}(u-1)(u+1)} = \sum_{j=0}^{j=i}\frac{-1}{u^{2j+1}} + \frac{1}{2}\frac{1}{u-1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{u+1};$$

şi

$$\frac{1}{u^i\,(u-1)} = \sum_{j=1}^{j=i} \frac{-1}{u^j} + \frac{1}{u-1}\,.$$

Pentru calculul cu transformate Carson s-au utilizat tabelele din [13] şi [14]. Pentru a permite urmărirea directă a calculelor prezentate în lucrare se dau în tabela 1, după [1] [13] şi [14], transformatele funcţiilor întîlnite mai rar care au fost utilizate în lucrare.

ANEXA 2

EXEMPLU DE CALCUL

Determinarea experimentală a încălzirii rotoarelor masive este greu de făcut, deoarece rotorul se află în mişcare şi de aceea trebuie folosite metode speciale.

Rezultatele unor astfel de încercări şi datele maşinilor pe care au fost efectuate sînt date în lucrarea [8]. Menţionăm că nu se admite ca supratemperatura suprafeţei rotorului să depăşească 200°C.

Vom determina cu ajutorul formulei (39) încălzirile aceloraşi rotoare. Este util de menţionat că parametrii rotorului masiv pot fi determinaţi şi prin calcul cu ajutorul formulelor date în lucrările [11], [12].

Fie *Motorul sincron* tip CM — 6 000 — 2, avînd $S_N = 4\,500$ kVA,

$P_N = 3\,800$ kW, $U_N = 10\,000$ V, $I_N = 260$ A,

$\cos \varphi_N = 0{,}9$, $n = 3\,000$ rot/min.

Datele care ne interesează sînt [8]:

$k = 0{,}49$ W/cm°C $m = 1{,}33$ cm^{-1},

$\delta = 7{,}8$ g/cm^3 $w = 130$ W/cm^2

$c = 0{,}5$ J/g°C $t_p = 28$ s.

Rezultă

$$a = \frac{0{,}49}{0{,}5 \cdot 7{,}8} = 0{,}125,$$

$$\frac{w}{mk} = \frac{130}{1{,}33 \cdot 0{,}49} = 199,$$

$$\tau_p = am^2 t_p = 0{,}125 \cdot (1{,}33)^2 \cdot 28 = 6{,}2.$$

Din figura 7 găsim:

$$f_m = 0{,}76,$$

deci

$$\theta_m = 150°\text{C}.$$

Calculul grafic indicat în lucrarea [8] dă pentru același caz $\theta_m = 160°C$.

Încălzirile maxime constatate cu indicatoarele de temperatură [8] nu au depășit 145°C.

Rezultă că formulele de calcul pe care le-am stabilit dau rezultate acoperitoare și destul de apropiate de cele obținute experimental.

Metoda analogică de calcul a încălzirii polilor inductori masivi ai mașinilor sincrone este indicată în [15].

Primit la redacție la 20 aprilie 1964

BIBLIOGRAFIE

1. A. NICOLAIDE, *Încălzirea rotoarelor masive ale mașinilor sincrone la funcționarea asincronă* Electrotehnica, **8**, *12*, 409—416, (1960).
2. PH. K. SATTLER, *Erwärmung der massiven Ploschuhe von Synchronmotoren beim asynchronen Anlauf*, **83**, *24*, 807—810 (1962).
3. R. RĂDULET, *Zur Theorie der eisenlosen Induktionsöffen*. Timișoara, Tipografia Românească, 1931.
4. A. AVRAMESCU, *Efectul pelicular tranzitoriu*. Bul. științ. Acad. R.P.R., Științe tehn. și chim., *3—4*, 225—239 (1952).
5. R. RĂDULET, *Bazele electrotehnicii*. Vol. **IV**, Inst. politehnic, București (curs litografiat), 1956.
6. A. AVRAMESCU, *Über die Zeitkonstante des Skineffektes* EZT—A, **80**, *3*, 78—82 (1959).
7. I. M. RÎJIK, I. S. GRADSTEIN, *Tabele de integrale sume serii și produse*. București, Ed. tehnică, 1955 (trad. din limba rusă).
8. И.А. СЫРОМЯТНИКОВ, *Режимы работы синхронных генераторов*. Москва-Ленинград, Госэнергоиздат, 1952.
9. И.А. СЫРОМЯТНИКОВ, *Режимы работы асинхронных и синхронных электродвигателей*. Москва-Ленинград, Госэнергоиздат, 1963.
10. О.В. ЛИВАНОВА, С.Г. ШАТРОВА, *О нагреве массивного ротора синхронного двигателя при его пуске*. Электричество, **83**, *2*, 56—58 (1962).
11. И.М. ЮСТНИКОВ, *Проектирование электрических машин*. Киев, Государственное издательство технической литературы, 1960.
12. C. V. BĂLĂ, *Pierderile în rotorul masiv al turboalternatorului la funcționarea în regim asincron* cerc. energ., **10**, *2*, 353—367 (1960).
13. А.В. ЛЫКОВ, *Теория теплопроводности*. Москва-Ленинград, Гостехиздат, 1952.
14. H. S. CARSLAW, J. C. JAEGER, *Conduction of Heat in Solids*. Oxford University Press, 1948.
15. C. V. BĂCĂ, *Despre posibilitatea de rezolvare analogică a problemei încălzirii polilor inductori masivi ai mașinilor sincrone*. St. cerc. energ, **14**, *1*, 71-81 (1964).

FOLOSIREA COEFICIENȚILOR DE REPARTIȚIE LA DETERMINAREA INFLUENȚEI STRUCTURII REȚELEI ELECTRICE ASUPRA REPARTIȚIEI OPTIME A PUTERILOR

DE

H. CRISTEA

621

Lucrarea cuprinde o scurtă privire asupra metodelor de determinare a pierderilor în rețeaua electrică cu referire la considerente, privind ipotezele simplificatoare la folosirea coeficienților de repartiție, pentru calculul coeficienților de pierderi, introducînd și o ipoteză asupra variației sarcinii. În final se dau o serie de expresii pentru determinarea influenței structurii rețelei electrice asupra repartiției optime prin corecția coeficienților de pierderi.

1. CONSIDERAȚII GENERALE

În schema de conexiuni a unui sistem electroenergetic pot avea loc modificări structurale, determinate de continua dezvoltare a sa prin conectarea de noi surse și consumatori sau prin îmbunătățirea condițiilor privind siguranța în exploatare. Primul tip de modificări sînt cele care schimbă topologia rețelei, și anume:

a) crearea legăturilor directe între două noduri ale rețelei;

b) crearea sau suprimarea unui nod în rețea;

c) crearea sau suprimarea unui nod pe una din laturile rețelei.

Cel de-al doilea tip de modificări sînt cele parametrice, din care fac parte:

a) modificarea impedanței unei linii prin dublarea sau suprimarea unuia din circuite;

b) schimbarea tensiunii de exploatare a rețelei;

c) introducerea autotransformatorului de reglaj.

Alte genuri de modificări sînt combinații ale tipurilor amintite. Toate acestea influențează regimul optim al sistemului electroenergetic.

În general, regimul optim al sistemului electroenergetic se determină prin două categorii de căi:

1) prin exprimarea explicită a pierderilor sub diferite forme și determinarea expresiilor optimale, utilizînd formulele de pierderi stabilite;

2) prin stabilirea regimului optim, utilizînd formule de pierderi prin care acestea sînt exprimate separat și prin determinarea condițiilor generale ce trebuie respectate pentru regimuri optimale.

În literatura de specialitate, pentru calculul pierderilor de putere în rețea și regimul optim ținînd cont de ele s-a dovedit a fi practică utilizarea unor formule de coeficienți de pierderi, care se pot determina pe trei căi:

1) pornind de la un regim staționar de bază calculat și folosind matricea $\|Z\|$ [1], [2];

2) pornind de la un regim staționar de bază calculat și folosind matricea $\|Y\|$ și metoda schemelor echivalente REI [4], [5];

3) folosind coeficienții de repartiție pentru calculul coeficienților de pierderi, fără a calcula un regim de bază staționar al sistemului.

Pentru determinarea influenței modificărilor structurale ale rețelei asupra pierderilor și repartiției optime a puterilor în sistemul electroenergetic ținînd seama de pierderile în rețea, de asemenea se pleacă fie de la reconstituirea matricei $\|Z\|$ [3], introducerea modificărilor direct în matricea $\|Y\|$ și trecînd prin reducerea schemei la un nou echivalent, REI [4] [5], sau prin folosirea coeficienților de repartiție o dată calculați pentru rețeaua cu o structură inițială dată [5]. Premergător studiului comparativ al acestor metode în ceea ce privește precizia și operativitatea calculelor este necesară precizarea unor aspecte privind ipotezele simplificatoare și algoritmele de calcul la folosirea coeficienților de repartiție, ceea ce constituie scopul studiului efectuat.

2. CONSIDERAȚII ASUPRA COEFICIENȚILOR DE REPARTIȚIE AI CURENȚILOR ȘI PUTERILOR DIN NODURILE REȚELEI

Pentru a putea folosi coeficienții de repartiție ai curenților la repartiția puterilor injectate în nodurile rețelei, pe laturi, se admit ipoteze simplificatoare, care introduc erori, dar au avantajul simplificării calculelor. S-au analizat sursele de erori provenite prin admiterea acestor ipoteze.

Expresia coeficienților de repartiție ai puterilor din noduri este [6][7]:

$$\mathring{C}_{ik}^{w} = \frac{U_k}{U_i} e^{j(\delta_k - \delta_i)} \times \mathring{C}_{ik} \tag{1}$$

în care:

U_k este tensiunea medie de exploatare a laturii;

U_i — tensiunea nodului i;

$\delta_k - \delta_i$ — decalajul de fază între aceste tensiuni;

$\mathring{C}_{ik}$ — coeficientul de repartiție al curentului din nodul L pe latura K în rețeaua liniarizată.

2.1. Considerarea unei tensiuni medii de exploatare în toate nodurile și pe toate laturile

În acest caz

$$U_i = U_k = U_m.$$

$$\frac{U_m}{U_i} = \frac{U_m}{U_m} = 1.$$

Păstrîndu-se valorile reale ale tensiunilor

$$\left.\begin{aligned} U_k &= U_m \pm \Delta U_k \\ U_i &= U_m \pm \Delta U_i \end{aligned}\right\}, \tag{2}$$

în care ΔU_k și ΔU_i sînt aleatorile de tensiune de la valoarea medie pe laturi și în nodurile rețelei; eroarea comisă prin această ipoteză are expresia:

$$\varepsilon_n = \left[\left(\frac{U_m \pm \Delta U_k}{U_m \pm \Delta U_i} - 1\right) \Big/ \frac{U_m \pm \Delta U_k}{U_m \pm \Delta U_i}\right] \alpha \cdot 100$$

$$\cong \frac{[\Delta U_{ik}]}{U_m} \times 100\,\%. \tag{3}[1]$$

Pentru abaterile admisibile de tensiune de $\pm$ 5%

$$\varepsilon_n = \frac{5+5}{100} \times 100 = 10\,\%.$$

Dacă se are în vedere faptul că abaterile mari de tensiune $[\Delta U_{ik}]$ nu pot exista între două noduri cu legătură electrică puternică (C_{ik} mare), ci numai între două noduri cu legătură electrică slabă (C_{ik} mic) și foarte slabă, eroarea introdusă prin această ipoteză reprezintă o valoare neglijabilă în raport cu circulația de putere pe ramura respectivă. Eroarea se raportează la contribuția nodului respectiv la circulația din ramura k, iar ponderea ei asupra circulației totale pe ramura k este cu atît mai mică cu cît contribuția nodului respectiv este mai mică.

Totuși, pentru determinarea exactă a circulațiilor de putere pe ramuri, admiterea acestei ipoteze introduce erori nesatisfăcătoare. Ea poate fi însă admisă la calculul repartiției optime a puterilor, cu luarea în considerare a pierderilor, unde intervine numai derivata pierderilor al cărei calcul nu trebuie efectuat cu o mare precizie [11].

2.2. Considerarea tensiunilor în fază

$$\delta_k - \delta_i = 0.$$

În acest caz eroarea de calcul a coeficienților de repartiție a puterilor va avea expresia

$$\varepsilon_\delta = [1 - e^{J(\delta_k - \delta_i)}] \times 100\,\%. \tag{4}$$

[1]) S-a neglijat termenul $\Delta U_k \times \Delta Ui$.

Dacă se admite un decalaj

$$\delta_{k-i} = \delta_k - \delta_i = 16°$$

atunci

$$\varepsilon_\delta = (1 - e^{\pm J16°}) = (3{,}90 \pm j^{-2}\,;7)\ \%.$$

Dacă latura k a rețelei are legătură electrică slabă cu punctul de injecție, decalajul de fază între tensiuni este mare, în schimb modulul coeficientului de repartiție este mic, așa încît eroarea raportată la circulația

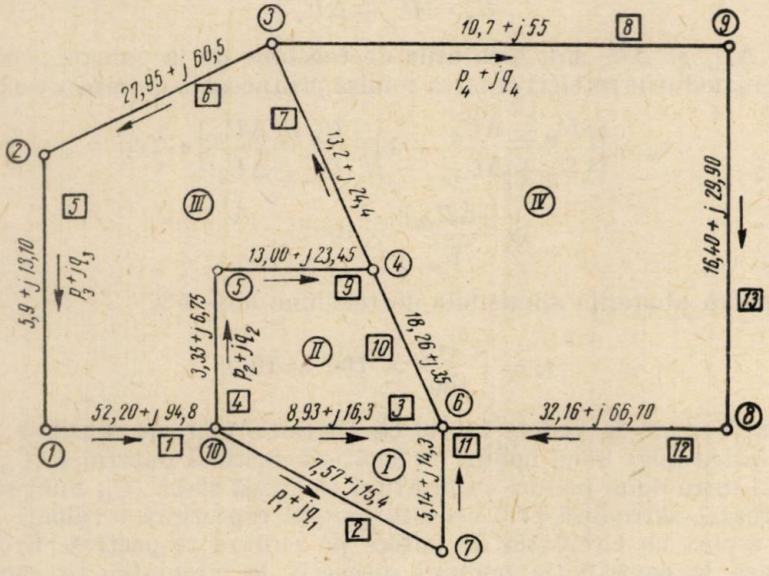


Fig. 1

totală de putere pe latura k este mult mai mică, ceea ce arată că ipoteza este admisibilă.

Pentru rețeaua din figura 1 s-au calculat coeficienții de repartiție în baza admiterii ipotezelor simplificatoare, injectîndu-se în fiecare nod puterea unitară și scoțîndu-se prin nodul de echilibru [8].

Prin rezolvarea sistemului de ecuații de contur

$$\| A \| \times \left\| \frac{p}{q} \right\| = \| B \|, \tag{5}$$

în care

$\|A\|$ este matricea coeficienților, aceeași pentru injecția de putere în orice nod;

p, q — puterea activă și reactivă ca necunoscută pentru fiecare contur;

$\|B\|$ — matricea termenilor liberi, proprie fiecărui nod prin care se injectează putere;

se determină :

$$C_{ik} = \alpha_{ik} + j\gamma_{ik},$$

$\mathring{C}_{ik}$ fiind coeficientul de repartiție a puterii din noduri pe laturi.

În rezolvarea problemei repartiției optime a puterilor ținînd cont de pierderi în rețea, pierderile trebuie exprimate funcție numai de puterile injectate în noduri, de aceea în acest caz trebuie să se precizeze o ipoteză în ceea ce privește variația sarcinilor în noduri. Ca și în celelalte metode amintite, s-a admis că în fiecare nod al rețelei sarcina este proporțională cu suma puterilor injectate în sistem (variație conformă a sarcinilor) :

$$P_{si} = K_{pi} \sum_{i=1}^{m} P_{gi}, \tag{6}$$

în care

P_{si} este sarcina în nodul i ;

$\sum_{i=1}^{m} P_{gi}$ — suma puterilor generate în sistem ;

$K_{pi} = \dfrac{P_{si}^{(b)}}{\sum_{i=1}^{m} P_{gi}^{(b)}}$ — raportul dintre sarcina nodului și suma puterilor generate în regimul de bază ;

ceea ce înseamnă că

$$\sum_{i=1}^{m+n} K_{pi} = 1.$$

Dacă se admite o variație a puterii generate în nodul i, această putere se repartizează în nodurile cu sarcină proporțional cu coeficienții k_{pj} (fig. 2) și deci circulația de putere pe ramura k, exprimată prin coeficienții de repartiție, va fi :

$$\begin{aligned} \Delta P_k &= \mathring{C}_{ik} \Delta P_i - \\ &- \sum_{j=1}^{m+n} K_{pj} \mathring{C}_{jk} \Delta P_i = \\ &= \Delta P_i \left(\mathring{C}_{ik} - \sum_{j=1}^{m+n} K_{nj} \mathring{C}_{jk} \right), \end{aligned} \tag{7}$$

unde

$i = s \div m$ este indicele nodului cu putere injectată ;

$j = 1 \div (m + n)$ — indicele nodului cu sarcină.

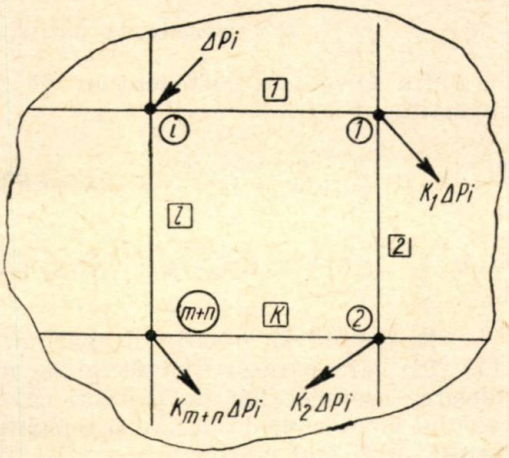


Fig. 2

În această ipoteză deci, coeficienții de repartiție ai puterilor din noduri pe latura k vor avea expresia :

$$\mathring{C}'_{ik} = \mathring{C}_{ik} - \sum_{i=1}^{m+n} K_{pj} \mathring{C}_{jk}. \tag{8}$$

Astfel, calculîndu-se coeficienții de repartiție numai pentru puterile injectate în noduri, se elimină influența nodului de echilibru în calculul repartiției optime a puterilor în care erau satisfăcute ecuațiile :

$$\left.\begin{aligned}\sum P_{gi} - \sum P_{si} &= p.\\ \sum Q_{gi} - \sum Q_{si} &= q\end{aligned}\right\}, \tag{9}$$

unde p, q sînt pierderile de putere activă și reactivă acoperite din nodul de echilibru.

Se completează metoda cu o ipoteză asupra modului de variație a sarcinilor despre care nu se amintește în literatura tehnică privind folosirea coeficienților de repartiție la calculul coeficienților de pierderi [6] [9].

3. CALCULUL COEFICIENȚILOR DE PIERDERI

Din expresia pierderilor în rețea

$$p = \sum_{k=1}^{l} r_k \left(\sum_{i=1}^{m} \mathring{C}'_{ik} \mathring{I}_i \right)^2, \tag{10}$$

în care

$k = 1 \div l$ este indicele laturilor rețelei ;

$\mathring{C}'_{ik} = \alpha_{ik} + i\gamma_{ik}$ — coeficientul de repartiție al puterii injectate în nod ;

$\mathring{I}_i$ — curentul în nodul de injecție i ;

r_k — rezistența activă a laturii ;

se obțin formulele coeficienților de pierderi funcție de coeficienții de repartiție

$$B_{ij} = \frac{1}{U_i \cdot U_j \cdot} \sum_{k=1}^{l} r_k \left[(\alpha_{ik}\alpha_{jk} + \gamma_{ik}\gamma_{jk}) \cos \delta_{ij} + (\alpha_{ik}\gamma_{jk} - \gamma_{ik} \cdot \alpha_{jk}) \sin \delta_{ij} \right], \tag{11}$$

$$C_{ij} = \frac{1}{U_i \cdot U_j \cdot} \sum_{k=1}^{l} r_k \left[(\alpha_{ik}\alpha_{jk} + \gamma_{ik}\gamma_{jk}) \sin \delta_{ij} - (\alpha_{ik}\gamma_{jk} - \gamma_{ik}\alpha_{jk}) \cos \delta_{ij} \right] \tag{12}$$

Ei depind de o serie de mărimi, după cum se vede din expresiile (11) (12) care variază funcție de regimul sistemului electroenergetic. La folosirea coeficienților de pierderi calculați pentru un regim de bază în calculul pierderilor de putere și repartiției optime a puterilor în alt regim, rezultă erori mai mari sau mai mici funcție de abaterea parametrilor de la un regim la altul și de simplificările aduse formulei coeficienților. Problema se pune în două moduri :

1) se calculează coeficienții de pierderi exact după expresiile obținute pentru unul sau mai multe regimuri și se consideră aceeași pentru alte regimuri sau paliere în jurul celor calculate ;

2) se admit ipoteze simplificatoare pentru expresia generală a coeficienților de pierderi excluzînd variația parametrilor de la un regim la altul, considerînd niște valori medii pentru acestea, iar coeficienții de pierderi astfel calculați se folosesc în orice regim. Se analizează mai jos erorile introduse la utilizarea acestor două căi :

3. *a*. Considerarea unei valori medii constante a tensiunii

$$U_i = U_j = U_m, \qquad U_i = U_m \pm \Delta U_i$$
$$U_j = U_m \pm \Delta U_j.$$

În această ipoteză

$$\varepsilon_n = \left\{\left(\frac{1}{(U_i \pm \Delta U_i)(U_j \pm \Delta U_j)} - \frac{1}{U_m^2}\right) \Big/ \frac{1}{(U_m \pm \Delta U_i)(U_m \pm \Delta U_j)}\right\} \times 100$$
$$\cong \frac{[\Delta U_{ij}]}{U_m} \times 100\% \qquad (13)^2)$$

Ca și la punctul 2. 1, la o abatere normală de tensiune de $\pm 5\%$ eroarea este de ordinul 10%.

Eroarea este maximă în cazul a două puncte a căror abatere de tensiune față de tensiunea medie are același sens, adică invers ca la coeficienții de repartiție a puterilor. Erori pînă la 10% pentru anumiți termeni asociate altor erori nu pot fi acceptate.

Variația tensiunilor de la un regim la altul într-un nod dat este mult mai mică decît variația tensiunilor la același regim, față de valoarea medie de exploatare, așa încît condițiile existenței unui reglaj de tensiune erorile de calcul ale coeficienților de pierderi vor fi acceptabile dacă se introduc pentru U_i, U_j valori ale tensiunilor din aceste noduri la un regim mediu de bază.

3. *b*. Neglijarea unghiurilor de decalaj ale tensiunilor în noduri.

Pentru această ipoteză sînt valabile considerațiile făcute la punctul 2 *b*. Deci, ipoteza poate fi admisă neintroducînd erori însemnate față de simplificările aduse formulei. Astfel, vom avea :

$$\cos \delta_{ij} \cong 1 \qquad \sin \delta_{ij} \cong 0$$

și deci formulele coeficienților de pierderi vor avea forma :

$$B_{ij} = \frac{1}{U_i U_j} \sum_{k=1}^{l} r_k (\alpha_{ik} \alpha_{jk} + \gamma_{ik} \gamma_{jk}), \qquad (11)$$

$$C_{ij} = \frac{1}{U_i U_j} \sum_{k=1}^{l} r_k (\alpha_{ik} \gamma_{jk} - \gamma_{ik} \alpha_{jk}). \qquad (12)$$

3. *c*. Neglijarea neuniformității rețelei.

Pentru o rețea uniformă este satisfăcută relația

$$\alpha_{ik} \gamma_{jk} - \gamma_{ik} \alpha_{jk} = 0, \qquad (14)$$

---

2) S-a neglijat termenul $\Delta U_i \Delta U_j$

iar în cazul unor rețele neuniforme termenul de mai sus va fi diferit de zero și cu atît mai mare cu cît neuniformitatea rețelei este mai accentuată. Totuși, față de termenul de bază B_{ij}, dacă se raportează termenul C_{ij} aferent uneia din laturi, se obține eroarea de ordinul :

$$\varepsilon_0 = \sum_{k=1} r_k \frac{\alpha_{ik}\gamma_{jk} - \gamma_{ik}\alpha_{ik}}{\alpha_{ik}\alpha_{jk} + \gamma_{ik}\gamma_{jk}} \times 100\%. \tag{15}$$

Dacă se ia în considerare faptul că termenul $\gamma_{ik}\gamma_{jk} \ll \alpha_{ik}\alpha_{jk}$ el se poate neglija și atunci expresia erorii devine :

$$\varepsilon_0 = \sum_{k=1}^{l} r_k \frac{\alpha_{ik}\gamma_{jk} - \gamma_{ik}\alpha_{jk}}{\alpha_{ik}\alpha_{jk}} \times 100\% = \tag{15'}$$

$$= \sum_{k=1}^{l} r_k \left(\frac{\gamma_{jk}}{\alpha_{jk}} - \frac{\gamma_{ik}}{\alpha_{ik}}\right) \times 100\%. \tag{16}$$

În rețeaua din figura 1, pentru care s-au calculat coeficienții de repartiție pentru două noduri semnificative, s-a obținut o eroare maximă de 4,237%. Deci, ipoteza neglijării neuniformității rețelei în problema calculului pierderilor în rețea poate fi admisă de la caz la caz, depinzînd de gradul de neuniformitate al rețelei. Pentru problema de repartiție optimă unde se calculează derivata pierderilor ipoteza este admisibilă și, în cazul acesta termenul

$$C_{ij} = \frac{1}{U_i U_j} \sum_{k=1}^{l} r_k (\alpha_{ik}\gamma_{jk} - \alpha_{jk}\gamma_{ik}) \tag{12'}$$

se poate neglija, iar expresia finală a coeficienților de pierderi va fi :

$$B_{ij} = \frac{1}{U_i U_j} \sum_{k=1}^{l} r_k (\alpha_{ik}\alpha_{jk} + \gamma_{ik}\gamma_{jk}). \tag{11'}$$

În felul acesta se determină coeficienții de pierderi aferenți nodurilor cu injecții de putere, care se exprimă printr-o formulă simplă funcție de coeficienții de repartiție calculați pentru rețea în prezența unui nod de echilibru și corectați în ipoteza variației conforme a sarcinii prin eliminarea influenței nodului de echilibru. Față de erorile analizate prin admiterea ipotezelor simplificatoare, se constată că cele mai mari erori rezultă în ipoteza admiterii unei tensiuni medii de exploatare, erori care se micșorează mult dacă se introduc în calcul valorile tensiunilor U_i și U_j la un regim mediu de bază. Prin tendința de fixare și menținerea constantă prin reglaj a tensiunilor în nodurile rețelei, această sursă de erori se elimină. În rest, pentru calculul derivatei pierderilor, formula astfel prezentată poate să dea rezultate satisfăcătoare.

Astfel, pierderile de putere în rețea, în cazul general, pentru un sistem electroenergetic cu puteri injectate cunoscute se vor calcula cu formula :

$$p = \frac{1}{U_i U_i} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} B_{ij} P_i P_j, \tag{17}$$

iar derivatele pierderilor cu formula

$$\frac{\partial p}{\partial P_i} = 2\frac{1}{U_i U_j}\sum_{j=1}^{m} B_{ij} P_j. \tag{18}$$

4. CORECȚIA COEFICIENȚILOR DE PIERDERI LA MODIFICAREA STRUCTURII REȚELEI

Drept exemplu de analiză s-a luat cazul modificării impedanței unei legături dintre două noduri adiacente. Regimul de după modificarea impedanței poate fi considerat ca fiind realizat prin metoda suprapunerii unei circulații de putere fictivă echivalentă modificării peste regimul inițial [10].

Fie k latura a cărei impedanță $\dot{Z}_k$ se modifică (fig. 3). Puterea fictivă P_x este injectată și absorbită prin nodurile adiacente legăturii modificate și trecute în întregime printr-o impedanță fictivă $\dot{Z}_f$.

Dacă notăm cu

C_{xk} și C_{yk} — coeficienții de repartiție ai puterilor din nodurile x, y, pe latura k;

$\dot{Z}_{km}$ — impedanța modificată a laturii k;

f_k — factor de modificare,

rezultă circulația de putere pe latura k:

$$P_k = \sum_{i=1}^{m} P_i C_{ik} + (C_{xk} - C_{yk}) P_x. \tag{19}$$

Impedanța echivalentă a impedanțelor $\dot{Z}_k$ și $\dot{Z}_f$ este egală tocmai cu impedanța modificată a laturii respective

$$\dot{Z}_{km} = \frac{\dot{Z}_k \dot{Z}_f}{\dot{Z}_f + \dot{Z}_k}. \tag{20}$$

Din (20) extragem valoarea impedanței fictive

$$\dot{Z}_f = \frac{\dot{Z}_k \cdot \dot{Z}_{km}}{\dot{Z}_k - \dot{Z}_{km}}. \tag{21}$$

Din ecuația de contur

$$\left[\sum_{i=1}^{m} P_i C_{ik} + (C_{xk} - C_{yk}) P_x\right] Z_k - P_x \cdot \dot{Z}_f = 0 \tag{22}$$

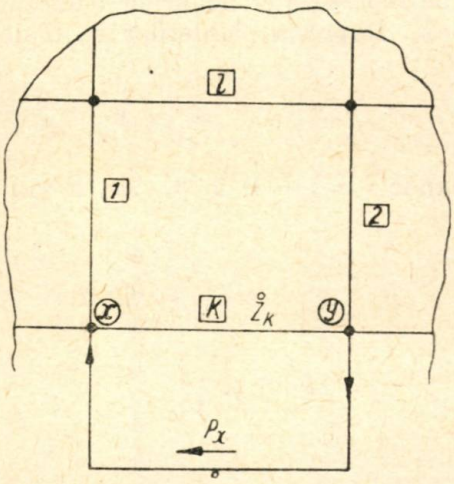


Fig. 3

obținem expresia puterii fictive

$$P_x = -\sum_{i=1}^{m} P_i \cdot C_{ik} \frac{1}{C_{xk} - C_{yk} - \frac{1}{\frac{Z_k}{Z_{km}} - 1}} = -\sum_{i=1}^{m} P_i \cdot C_{ik} f_k, \qquad (23)$$

în care

$$f_k = \frac{1}{C_{xk} - C_{yk} - \frac{1}{\frac{Z_k}{Z_{km}} - 1}} \cdot \qquad (24)$$

Determinînd deci factorul de modificare în funcție de coeficienții de repartiție ai nodurilor adiacente și valorile impedanțelor inițială și modificată, putem afla, cu ajutorul expresiei (23), valoarea puterii fictive injectate.

Fie l una din laturile rețele și ΔP_{xl} circulația de putere datorită injecției în nodul x a puterii P_x (fig. 3). Atunci

$$\Delta P_{kl} = P_x (C_{xl} - C_{yl}) = P_x C'_{xl}, \qquad (25)$$

în care C'_{xl} este coeficientul de repartiție al puterii din nodul x pe latura l.

În acest fel, la nodurile cu injecție de putere se mai adaugă nodul pe unde se injectează puterea fictivă P_x ca echivalentă modificării de structură, care se repartizează pe laturi proporțional cu diferența coeficienților de repartiție ai nodurilor adiacente laturii a cărei impedanță s-a modificat. Expresia pierderilor va fi deci:

$$p' = \frac{1}{U_i U_j} \sum_{i=1}^{x} \sum_{j=1}^{x} B_{ij} \cdot P_i P_j, \qquad (17a)$$

unde $i = j = 1, 2, 3 \ldots m, x$ sau sub altă formă

$$p' = \frac{1}{U_i U_j} \left\| \begin{array}{c|c} p & \begin{array}{l} + B_{1x} \cdot P_1 P_x \\ + B_{2x} P_2 P_x \\ \vdots \\ \end{array} \\ \hline B_{x1} \cdot P_x \cdot P_1 + B_{x2} P_x P_2 + \ldots + (B_{xx} + R_{km}) P_x^2 & \end{array} \right\| \qquad (17b)$$

Dacă se înlocuiește puterea fictivă cu expresia (23), se obțin următoarele expresii componente ale pierderilor în rețea:

$$p' = \frac{1}{U_i U_j}\left[\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} B_{ij} P_i P_j + (B_{xx} + R_{km}) \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} C_{ik} C_{jk} f_{ax}^2 \times P_i P_j \right.$$

$$\left. - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} B_{ix} C_{jk} f_k P_i P_j - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} B_{xj} C_{ik} f_k P_i P_j \right] =$$

$$= \frac{1}{U_i U_j}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} [B_{ij} + (B_{xx} + R_{km}) C_{ik} C_{jk} f_k - B_{ix} C_{jk} f_k - B_{xj} C_{ik} f_n] P_i P_j \quad (17c)$$

Din relația (17 *c*) se extrage formula pentru coeficienții de pierderi corectați:

$$B'_{ij} = B_{ij} + (B_{xx} + R_{km}) C_{ik} C_{jk} f_k^2 - B_{ix} C_{jk} f_k - B_{xj} C_{ik} f_k \quad (26)$$

în componența căreia intră patru termeni:

B_{ij} — coeficientul de pierderi calculat pentru rețeaua cu structura inițială;

B_{xx}; B_{xj}; B_{ix} — coeficienții de pierderi obținuți prin repartiția puterii din nodul x în rețea;

$$\left.\begin{aligned} B_{ix} &= \sum_{k=1}^{l} r_k (\alpha_{xk}\alpha_{ik} + \gamma_{xk}\gamma_{jk}) \\ B_{xj} &= \sum_{k=1}^{l} r_k (\alpha_{xn}\alpha_{jk} + \gamma_{xk}\gamma_{jk}) \end{aligned}\right\} \quad (27)$$

f_k — factorul de modificare calculat după expresia

$$f_k = \frac{1}{C'_{xk} - \dfrac{1}{\dfrac{\mathring{Z}_k}{\mathring{Z}_{km}} - 1}}.$$

Pentru crearea unei legături între două noduri neadiacente unei laturi, pentru impedanța inițială se poate lua o valoare mare $\mathring{Z}_{xy} = 10^6$, sau suma impedanțelor pe unul din contururile dintre cele două noduri [10].

Expresiile pierderilor de putere în rețea și a derivatei funcție de coeficienții de pierderi astfel calculați vor fi:

$$p' = \frac{1}{U_i U_j}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} B'_{ij} P_i P_j,$$

$$\frac{\partial p}{\partial P_i} = \frac{2}{U_i U_j}\sum_{j=1}^{m} B'_{ij} P_j.$$

Pentru cazul în care problema repartiției optime se rezolvă cu un calculator analogic, influența modificării structurii rețelei constă în modificarea termenilor matricei coeficienților de pierderi cu cei corectați [11], prin modificarea rezistențelor decadelor, iar pe un calculator numeric, prin introducerea unei benzi de corecție cu coeficienții de pierderi corectați. Atît într-un caz, cît și în altul, volumul de calcul al determinării influenței modificării structurii asupra repartiției optime constă din cel afectat calculului corecției coeficienților de pierderi.

Metoda analizată de determinare a influenței modificărilor structurii rețelei asupra repartiției optime a puterilor în sistem folosind coeficienții de repartiție poate fi luată în considerare împreună cu celelalte metode metoda echivalentului *REI* sau a matricei.

Metoda corecției coeficienților de pierderi comparativ cu recalcularea regimului de bază corespunzător structurii modificate prezintă avantajul micșorării volumului de calcul, ceea ce face ca problema să se rezolve mai operativ; cu toate acestea, metoda nu se poate aborda fără a apela la un calculator numeric.

Cea mai mare sursă de erori o constituie variația tensiunilor în nodurile rețelei în cazul adoptării unei valori medii unice a tensiunilor pentru toată rețeaua; pentru anumiți termeni, erorile pot ajunge pînă la 10%. Aceste erori pot fi micșorate prin introducerea pentru tensiunile din noduri a unor valori corespunzătoare unui regim mediu de bază; în rețele bine dimensionate și prevăzute cu un reglaj de tensiune, aceste variații se vor menține într-o bandă îngustă, astfel că erorile se vor reduce simțitor.

În ceea ce privește simplificarea relațiilor prin neglijarea neomogenității rețelei, erorile corespunzătoare trebuie analizate de la caz la caz, ele fiind funcție de parametrii și de gradul de neomogenitate al rețelei date.

Primită la redacție la 15 mai 1964

BIBLIOGRAFIE

1. L. K. KIRCHMAYER, *Economic operation of power systems.* J. Wiley & sons, New York, 1958.
2. E. E. GEORGE, *A. New Method, of Making Transmission Sas Formulas Directly from Digital Power Flow Studies.* Power Apparatus and systems, februarie 1960.
3. M. M. GAUSENS, J. PARDIGAN, P. ANGES, J. ANGES, *L'Evolution de méthodes de calcul des reseaux mailles liée a l'utilisation de maschine sisthematique.* Bulletin SFE, *16* (1961).
4. P. DIMO, *Formula pierderilor și optimizării de scheme și regimuri pe un drum nou. Aplicarea analizei nodale cu imagini reprezentative.* Energetica, *6* (1962).
5. P. DIMO, *Soluția problemei pierderilor în rețele electrice cu ajutorul echivalentului REI a analizei nodale, asociat unui calculator numeric.* St. și cerc. energ. *4* (1963).
6. Н.А. МЕЛЬНИКОВ, *Учёт потерь в сети при определении наивыгоднейшего режима энергосистемы.* Электричество, 2 (1960).
7. Н.А. МЕЛЬНИКОВ, *Применения коэффициентов распределения при расчётах сложных схем замещения электрических цепей.* Электричество, *2* (1960).
8. Н.А. КАЧАНОВА, *Метод расчёта коэффициентов распределения для сложных энергосистем использованием вычислительных машин.* Ин-т Электротехники АН-СССР. Lucrare prezentată la sesiunea de comunicări.

9. В.М. Синьков, *Исследование погрешностей в определении наивыгоднейших активных нагрузок при использовании базисного прироста пренебреженной неоднородностью сети.* Институт автоматики Госплана У-ССР.
10. Von Max Frey, *Bestimmung der Auswirkung von Netza underungen auf stromverteilung und Netzverluste mit einer verweiterten Netzverlustformel.* Electrizitätswirtschaft, *23* (1960).
11. E. Arie M. Pomîrleanu, P. Nicolae, *Analiza factorilor care determină repartiția optimă a puterilor într-un sistem electroenergetic.* St. cerc. energ. și electr. (1964).

REZULTATE PRIVIND MĂSURAREA CURENȚILOR DE CONDUCȚIE LA IZOLATOARE CONTAMINATE ÎN CONDIȚII NATURALE

DE

I. ADĂMUȚ și M. PETCU

621.315

În lucrare se prezintă variația curentului de conducție pe izolatoare, în funcție de diverși factori datorită depunerilor din atmosfera contaminată în mediu maritim. Se indică importanța fenomenelor antecedente (durata de expunere a stratului electrolitic la o atmosferă cu diverși parametri) asupra valorii momentane a curenților.

Reducerea rigidității dielectrice a izolatoarelor datorită depunerilor din atmosfera înconjurătoare provenite de la diverse surse industriale sau naturale conduce la mărirea numărului de avarii și la complicarea exploatării [1], [2], [3].

În scopul găsirii formei cele mai adecvate de izolator, a căilor celor mai potrivite de menținere îndelungată a calităților lui izolante în atmosferă viciată, a unor metode de încercare a izolatoarelor în condiții de contaminare și a reproducerii în laborator a diferitelor situații din exploatare, s-au efectuat foarte multe cercetări în ultimii 20 — 30 de ani. O sinteză a rezultatelor acestor lucrări este expusă în lucrările Comitetului de studiu a izolatoarelor (nr. 5) din CIGRE [4]. Direcția de cercetare este indicată de același comitet [5].

În R. P. R. se cercetează de mai mulți ani problema nivelelor de izolație, de către colectivul de tensiuni înalte din Institutul de energetică al Academiei R. P. R. [2], [6], [7], [8]. Din aceste lucrări a reieșit nece-

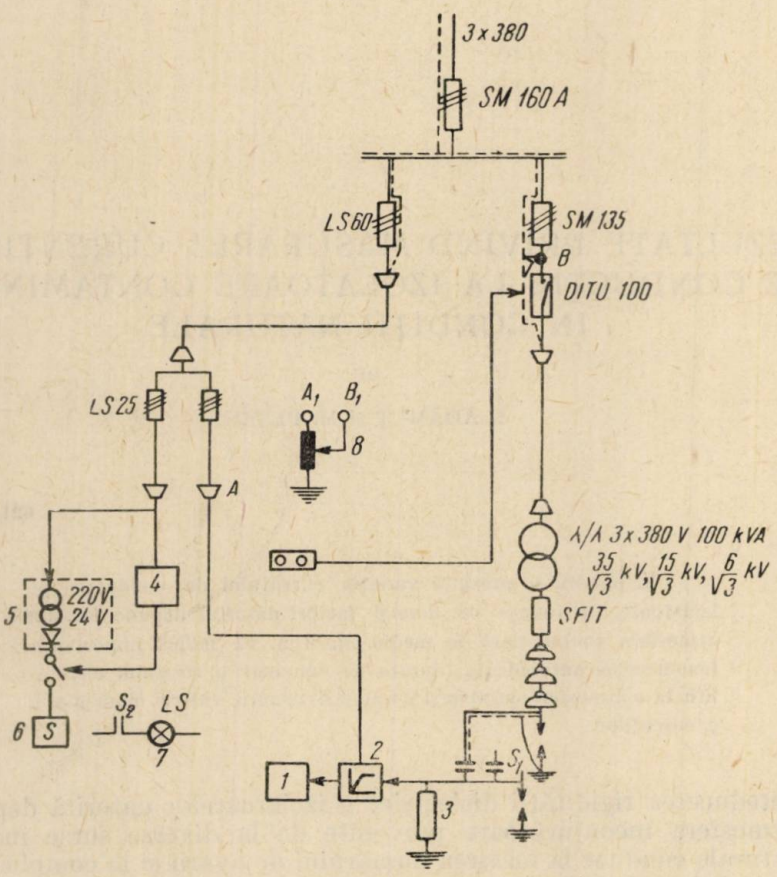


Fig. 1. — Schema de ansamblu a instalației de măsurare a curenților de conducție.

1 — Miliampermetru înregistrator 0—30 mA.
2 — Amplificator.
3 — Rezistență ptr. măsurarea căderii de tensiune. R = 100 Ω
4 — Ceasornice de contact ptr. schimbarea izolatorului.
5 — Grup transformator redresor ptr. alimentare bobine selector și lămpi semnalizare.
6 — Selector: S_1; S_2 contacte, *S* bobină selector.
7 — Lămpi de semnalizare.
8 — Variac de 25 A.

Obs. — Scoțînd siguranțele SM 135, punctul B se poate alimenta monofazat cu tensiune variabilă din priza A.

sitatea cercetării izolatoarelor indigene și din punctul de vedere al comportării lor în condiții de contaminare [2]. Datele obținute, utile industriei ceramice și energetice, vor putea fi folosite și pentru studiul fenomenului complex de descărcare în aer în lungul suprafeței dielectricilor solizi.

1. INSTALAȚIA EXPERIMENTALĂ

Cercetarea s-a efectuat urmărind comportarea izolatoarelor într-o stație experimentală situată pe malul Mării Negre. În figura 1 se arată

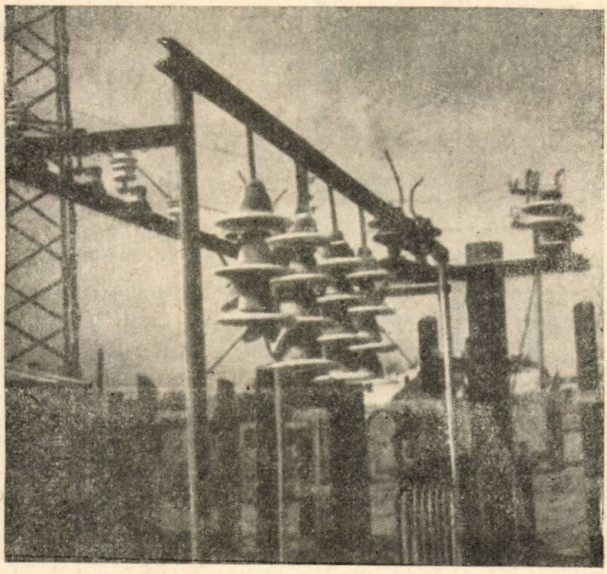


Fig. 2. — Vedere parțială a instalației experimentale: izolatoare de 6 și 35 kV.

schema electrică de ansamblu a instalațiilor experimentale din stația de contaminare a izolației. Elementele constitutive sînt menționate pe figură.

În stație se cercetează izolatoare-suport de 6 și 15 kV precum și lanțuri de suspensie și de întindere de 35 kV, cu suprafața tratată și netratată cu grăsimi siliconice (fig. 2).

Alimentarea barelor cu tensiune se realizează cu un transformator trifazat special de 100 kVA, din care se obțin cele trei tensiuni necesare. Transformatorul este conectat la rețeaua orașului, avînd raportul de transformare $0{,}2/\frac{6,\ 15,\ 35}{\sqrt{3}}$ kV.

Acestea se aplică izolatoarelor, iar curenții de conducție sînt conduși prin cablul coaxial, contactele S_1 ale selectorului și rezistența *3* de 100 Ω la pămînt. Căderea de tensiune pe rezistența *3* este aplicată amplificatorului *2*, la ieșirea căruia este conectat un miliampermetru înregistrator *1*. Selectorul *S* are rolul de a conecta rezistența *3* și aparatura de înregistrare la cablurile coaxiale ce sînt legate la diferite izolatoare. Tre-

cerea selectorului de pe o poziție pe alta este comandată de ceasornice de contact *4*. Contactele S_2 cu lămpile *7* asigură semnalizarea luminoasă a poziției selectorului.

Protecția instalației de măsură împotriva pătrunderii tensiunii înalte în caz de conturnare a unui izolator se realizează cu ajutorul unui întreruptor automat, siguranțe de joasă și înaltă tensiune și descărcătoare montate în diferite puncte ale circuitelor electrice (fig. 1).

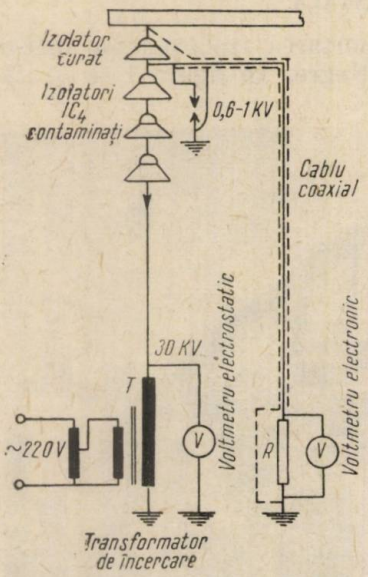


Fig. 3. — Schema de măsură $I_c = f(U)$.

2. EXPERIMENTE. REZULTATE

Pe izolatoarele montate în 1962 și 1963 s-au efectuat următoarele măsurători :

a) determinarea curentului de conducție în funcție de tensiune la diverse contaminări și diverse condiții atmosferice ;

b) înregistrarea curenților de conducție în funcție de timp.

Pentru măsurătorile de la punctul *b*, s-a folosit schema indicată în figura 3.

2.1. Izolatoare de 6 kV

S-au măsurat curenții de conducție la un număr de 12 izolatoare de 6 kV. În figura 4 se arată variația acestor curenți cu durata de contaminare naturală, cu tensiunea și cu condițiile meteorologice pentru izolatorul nr. 1. În figura 5 se arată variația în timp a curentului de conducție pentru același izolator la o umiditate relativă $H = 68\%$ și o temperatură $t = 21{,}5°C$. Menționăm că suportul acestui izolator este fixat cu un grad de umplere cu ipsos a golului dintre porțelan și metal mai mare decît cel normal.

În figura 6 este indicată valoarea curenților de conducție pentru un izolator de 6 kV cu suportul fixat cu grad normal de umplere cu ipsos, iar în figura 7 se indică valorile curenților la un număr de 11 izolatoare contaminate 8 luni, iunie-februarie, în comparație cu un izolator curat. Între acestea numai izolatoarele nr. 6 și 12 au umplerea normală cu ipsos, celelalte fiind în situație similară cu izolatorul nr. 1.

Din analiza curbelor reprezentate pe figurile 4 — 8 se pot deduce următoarele :

1. Curentul ce trece printr-un izolator de linii aeriene de 6 kV curat și uscat este la tensiunea nominală pe fază de cca. 15 — 25 μA (fig. 4, curba *2*, fig. 6 și 7). Întrucît în acest caz curentul este aproape în întregime capacitiv, rezultă că capacitatea izolatorului este de circa 14 pF, valoare comparativă cu cele menționate în literatura de specialitate [9].

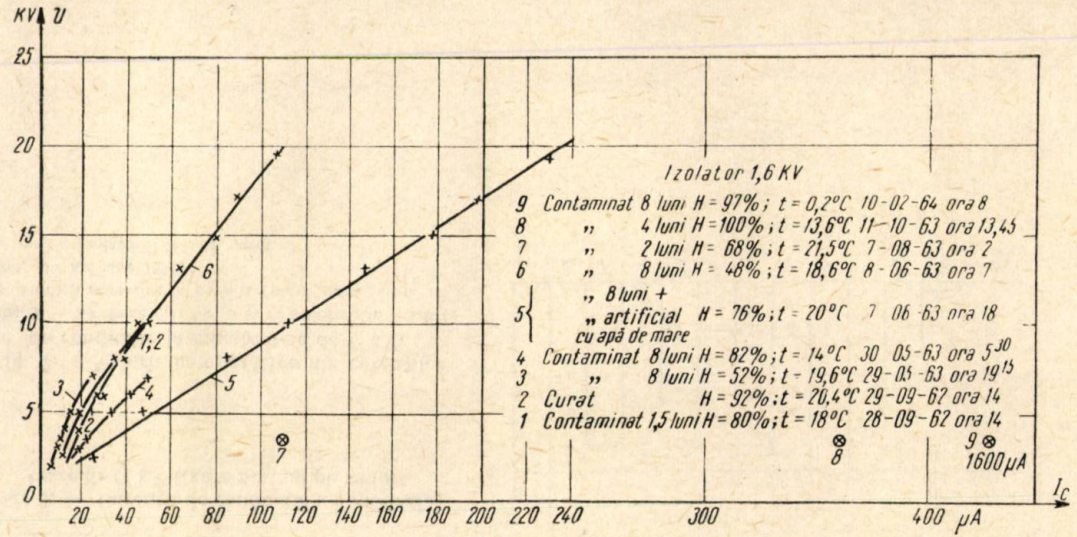


Fig. 4. — Curenţii de conducţie pentru izolatorul de 6 kV nr. 1. $I_c = f(U)$.

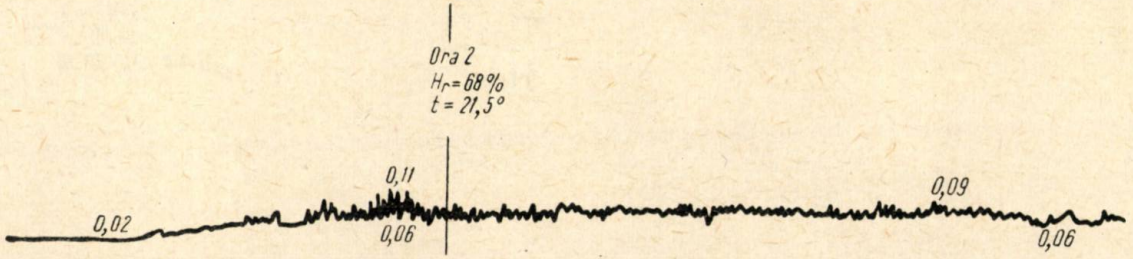


Fig. 5. — Variaţia în timp a curentului de conducţie la izolatorul nr. 1 de 6 kV.

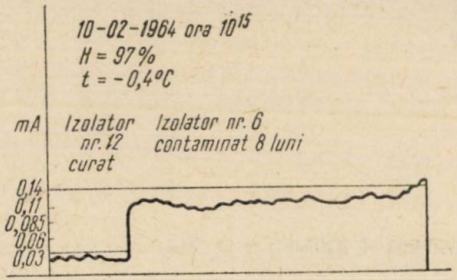


Fig. 6. — Curenţii de conducţie a două izolatoare de 6 kV fixate normal pe suport.

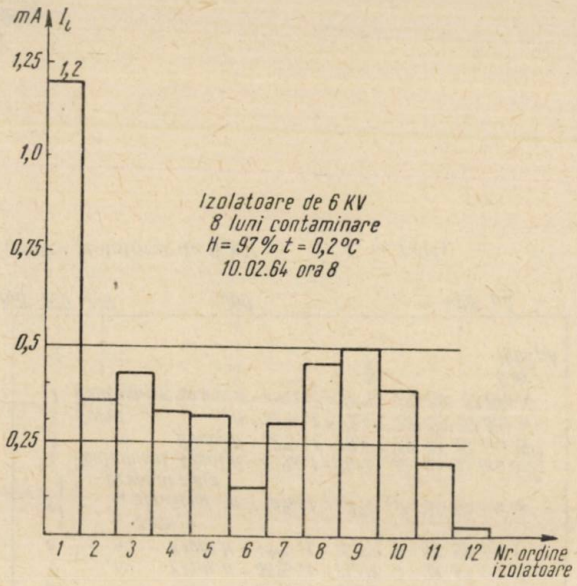


Fig. 7. — Valori comparative ale curenţilor de conducţie la izolatoarele de 6 kV.

Obs. 1 — La izolatorii Nr. 6 şi 12 suporţii sînt fixaţi în condiţii normale; la ceilalţi gradul de umplere cu ipsos este aproape 100%;

2 — Izolatorul Nr. 12, curat.

2. Pentru aceleași condiții meteorologice — umiditate, temperatură — curentul de conducție crește cu durata de contaminare (fig. 4).

3. Umiditatea are un rol preponderent asupra valorii curentului de conducție, ajungînd pentru umiditatea de 97% la valori de ordinul 1,6 mA (cazul 9, fig. 4).

4. Are importanță deosebită și durata funcționării izolatorului în atmosferă de umiditate mare. Astfel, în figura 4, curba *3* care reprezintă variația curentului la umiditatea relativă de 52% și $t = 19{,}6°C$, indică valori mai mici pentru curentul de conducție decît curba *6*, pentru umiditatea relativă 48% și $t = 18{,}6°C$, în momentul măsurătorilor. Explicația acestui fapt se datorește stărilor de umiditate antecedente momentului măsurătorilor, fenomenul de dizolvare a sărurilor depuse în stratul de contaminare avînd nevoie de o anumită durată. Astfel, în primul caz, măsurătorile fiind efectuate la ora 19,15′ umiditatea relativă a variat de la orele 10 pînă în momentul măsurătorii între 62% și 50% în timp ce în al doilea caz, măsurătorile fiind efectuate dimineața, umiditatea relativă a variat într-un interval de timp precedent, egal, între 86 și 48%.

5. Menținerea unui spațiu interior cît mai mare între suportul de fier și porțelan contribuie la reducerea importantă a curentului de conducție (izolatorul nr. 6 : 0,13 mA, în comparație cu izolatoarele nr. 2 — 11 : circa 0,5 mA; fig. 6 și 7).

6. În figura 8 se arată variația curentului de conducție la un izolator contaminat 8 luni în comparație cu un izolator curat, udate cu apă de mare, la tensiunea constantă de 6kV. Se observă următoarele:

a) în primul moment al umezirii, curentul a depășit 40 mA la izolatorul contaminat, scăzînd în 60 secunde la 0,6 mA;

b) curba de uscare este de tip exponențial;

c) curentul de conducție al izolatorului curat este practic constant în timp, circa 0,06 mA.

Acest fenomen explică și valorile mari obținute pentru izolatorul nr.1 (fig. 4, cazurile 8 și 9, și fig. 7), deoarece măsurătorile la acest izolator s-au efectuat chiar în timpul unei ploi fine.

7. Variația continuă a curentului de conducție între valori momentane destul de importante, 0,06 — 0,11 mA, arată variația permanentă a soluției electrolitice a stratului de depuneri ca un proces de uscare și de restabilire a concentrației soluției în funcție de condițiile exterioare. Ca o consecință a acestui fenomen, curbele au alura unor drepte în cazul cînd măsurătorile se fac într-un interval de timp scurt, astfel că nu este timp suficient să varieze concentrarea soluției stratului (fig. 4).

2.2. Izolatoare de 15 kV

Se indică comportarea în condiții de contaminare a șapte izolatoare tip Δ. Fixarea suporților în izolator este normală.

În figura 9 se prezintă valorile maxime ale curenților de conducție după patru luni de contaminare — octombrie, februarie —, la o umiditate relativă de 91% și temperatura de 0°C.

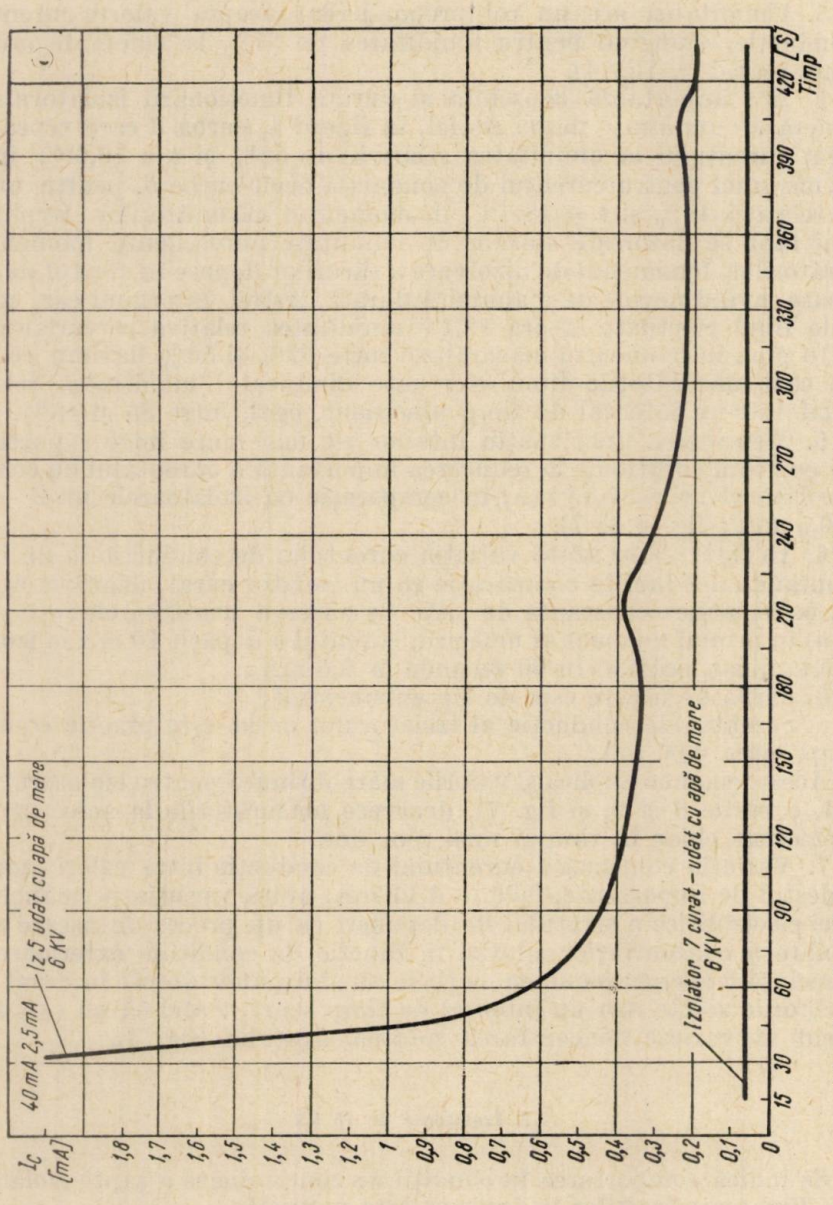


Fig. 8. — Curbele de uscare pentru un izolator de 6 kV contaminat în comparație cu unul curat.

Se observă că curentul pe izolatorul curat este de circa 60 μA, pe izolatoarele cu glazură brună de 200 — 260 μA, iar pe izolatoarele cu glazură albă de 240 — 400 μA. Dacă le comparăm cu izolatoarele de 6kV

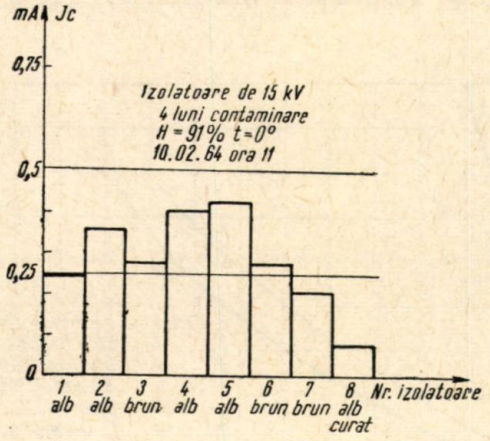


Fig. 9. — Curenți de conducție pe izolatoare de 15 kV.

(izolatorul nr. 6, cu suportul fixat normal), se observă valori mai mari de cîteva ori, deși ultimul e contaminat mai îndelungat.

Acest fapt este consecință a suprafeței expuse mai mare la izolatorul de 15 kV, decît la izolatorul de 6 kV [10].

2.3. Izolatoare de 35 kV

Se prezintă rezultatele privind comportarea a șapte lanțuri de suspensie 3 IC4, trei lanțuri de întindere de 3 × IC4 și un lanț de întindere de 3 × IC6. Separarea față de pămînt la izolatoarele de întindere este realizată de un al patrulea element IC4, în timp ce lanțurile de suspensie sînt suspendate direct de bara sub tensiune, eliminîndu-se deci necesitatea separării lor față de pămînt.

Rezultatele sînt indicate în figurile 10, 11, 12, 13.

În figura 10 sînt reprezentate curbele, curenții de conducție, Ic, funcție de tensiune: $I_c = f(U)$ — pentru lanțul de suspensie nr. 1, în diverse condiții meteorologice și durate de contaminare. Se observă aceeași dependență a curenților de durata de contaminare (curbele *2*, *5*), de umiditatea relativă (curbele *6*, *8* și *1*, *2*) și de stările de umiditate antecedente momentului măsurării (curbele *6*, *7*). Valoarea curentului la un lanț de izolatoare curat în stare uscată este de circa 0,09 mA, iar în stare umedă ($H = 92\%$) de circa 0,16 mA; după o contaminare de 8 — 12 luni la $H = 97\%$, curentul depășește 1,6 mA.

În figura 11 se reprezintă aceleași curbe $I_c = f(U)$ pentru zece lanțuri de izolatoare, măsurate la o umiditate relativă $H = 90 - 92\%$

după o perioadă de opt luni de contaminare. Din această figură rezultă următoarele :

1. Lanțurile de întindere 3 × *IC*6(*5*) și 2 × *IC*4(*5'*) au curenți mai mici decît lanțurile de suspensie 3 × *IC*4(*1*, *2*, *3*) și 2 × *IC*4(*4*).

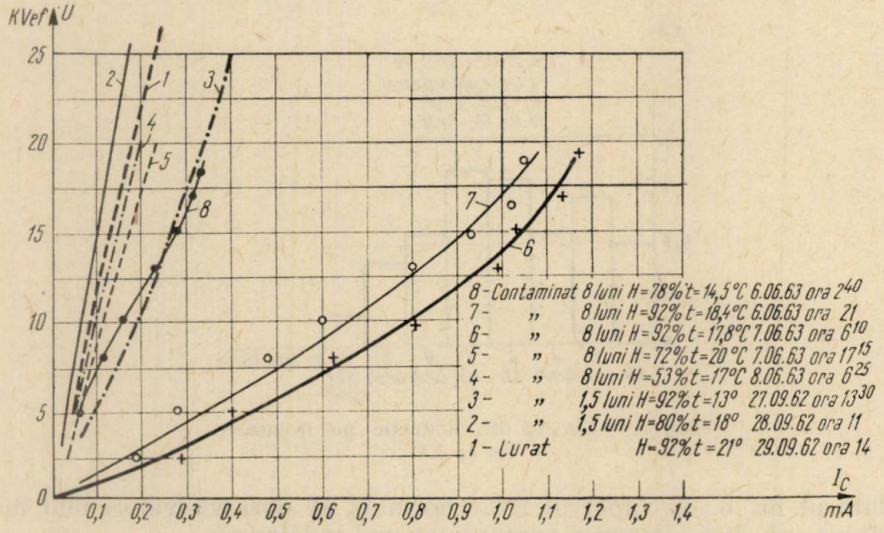


Fig. 10. — Curbele $I_c = f(U)$ la un lanț de suspensie de 35 kV nr. 1, în diverse situații.

2. Curentul de conducție scade cu numărul de elemente ale lanțului (curbele *1*, *4* și *5*, *5'*).

3. Izolatoarele 1*N*, 2*N*, contaminate chimic timp îndelungat în apropierea unei uzine de acid sulfuric pe a căror suprafață s-a format o crustă de culoare cenușie foarte aderentă, se comportă ca și izolatoarele curate, dacă sînt curățate de alte depuneri neaderente.

4. Izolatoarele cu linie de fugă mai mare *IC*6(curba *5*) se comportă mai bine ca izolatoarele *IC*4(curba *5'*).

În figura 12 sînt arătate valorile maxime pentru diversele lanțuri de izolatoare la diverse etape de contaminare și diferite condiții atmosferice. Se observă variația destul de dezordonată a acestor valori, și anume : nu se păstrează în toate situațiile aceeași ordine a izolatoarelor în șirul crescător sau descrescător al valorilor. Acest fapt l-a determinat pe Reverey să afirme ineficacitatea metodei pentru stabilirea unor relații legice între curenți și calitatea izolatoarelor indicînd pregătirea altui procedeu [11]. În realitate, fenomenul trebuie să se supună unei legi statistice, datorită numărului mare de parametri care-l influențează.

Din această figură mai rezultă comportarea mai bună a izolatorului siliconat [12][1]) aflat în condiții identice cu izolatorul S5, 0,13 — 0,215 mA, față de 0,35 — 0,47 mA, precum și influența poziției izolatoarelor față

[1]) Grăsimea siliconică s-a obținut de la Inst. electrotehnic Vilenki-Budapesta.

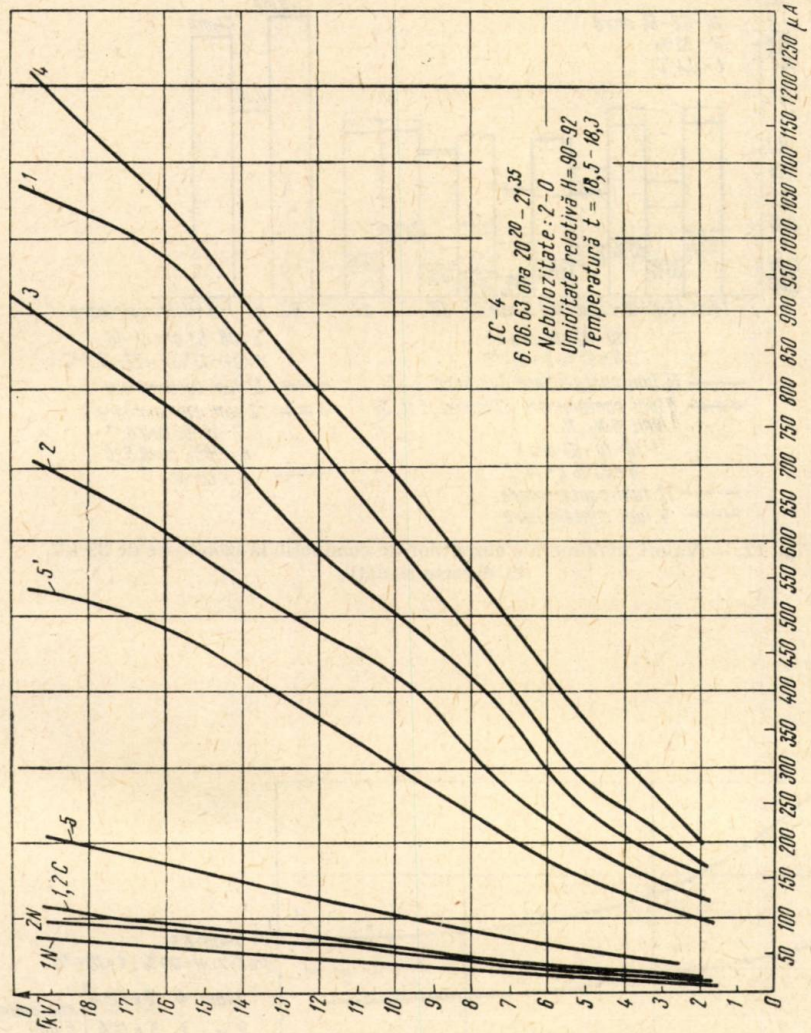


Fig. 11. — Curbele $I_c = f(U)$ pentru diverse lanțuri de izolatoare de 35 kV.

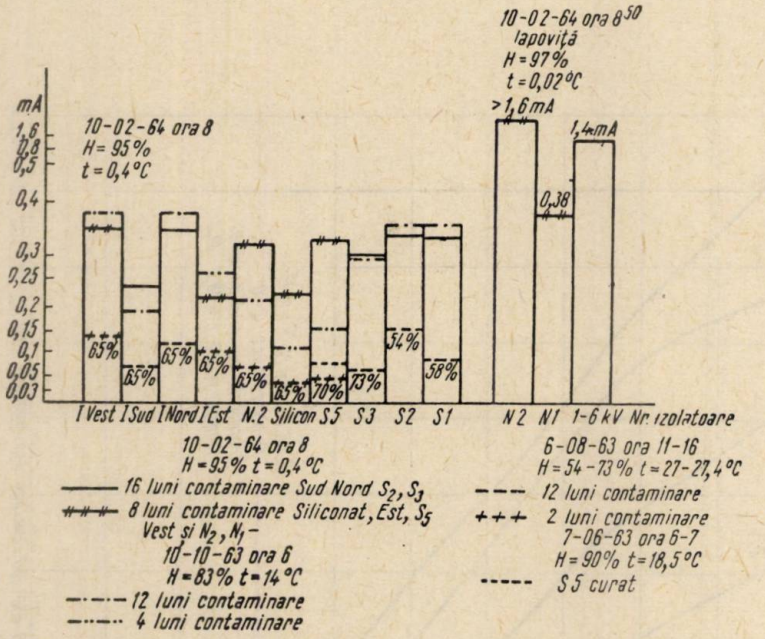


Fig. 12. — Valori maxime ale curenților de conducție la izolatoare de 35 kV în diverse situații.

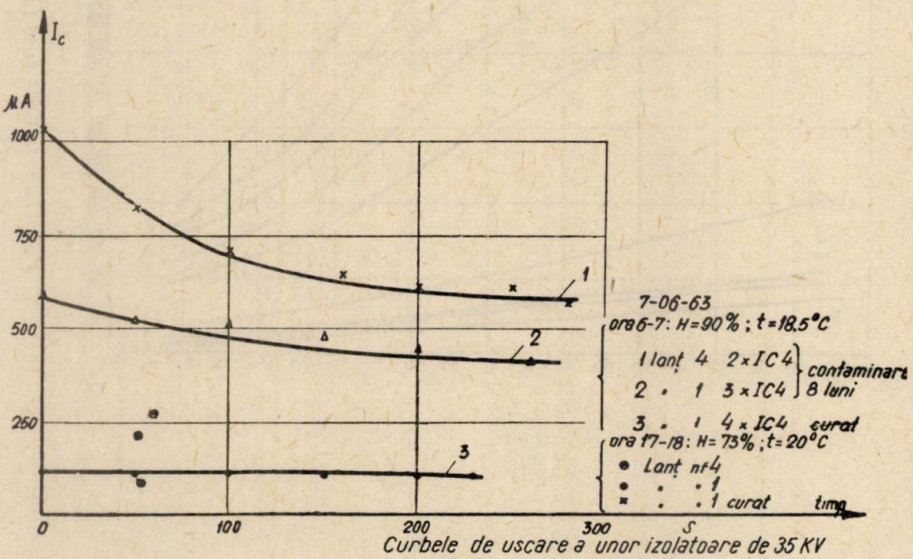


Fig. 13. — Curbele de uscare a unor izolatoare de 35 kV.

Tabela 1

Analiza cantitativă şi calitativă a depunerilor de pe izolatoarele de la staţia experimentală IE Constanţa, după 8 luni de contaminare

Nr. crt.	Izolator		Depuneri					Săruri solubile mg/l						Săruri insolubile mg			
								Anioni			Cationi						
	Tip	Buc.	Suprafaţa	Reziduu fix apă	Reziduu calcinat	Total	Specifice	Cl	CO_3H	SO_4	Na	K	Ca	SiO_2	Oxizi fier	CaO	MgO
			cm^2	mg	mg	mg	mg/cm^2										
1	6 kV brun	1	650	63,5	59,5	122,0	0,19	14,2	61,0	13,7	26	1,9	10,7	36,6	18	1,5	1,1
2	6 kV albi	3	1 950	199,2	200,0	399,2	0,205	14,2	106,7	17,3	14,5	150	31,3	1270	51,5	12,6	7,5
3	6 kV special	1		146,0	177,5	323,5		25,0	61,0	14,6	23,0	4,0	18,4	128,4	30,0	12,1	10,8
4	*IC4* suspensie	4	5 840	278,4	881,3	1 159,7	0,198	15,9	183,3	12,8	23,0	6,8	52,9	630,5	199,5	23,8	23,5
5	*IC4* întindere	2	2 920	252,1	470,7	722,8	0,248	21,2	131,1	18,3	33,0	321	18,4	339,8	98,0	12,5	14,5

de direcția vîntului : izolatorul *I* vest, situat cu partea inferioară a elementelor în fața direcției predominante a vîntului, are curent mai mare decît izolatorul *I* est, situat cu partea superioară a elementelor în sensul direcției vîntului.

În figura 13, sînt reprezentate curbele de uscare ale unor izolatoare de 35 kV. Se observă, ca și la 6 kV, că curentul de conducție are o valoare practic constantă pentru izolatorul curat; uscarea durează circa două minute; valoarea inițială a curentului pe izolatorul fără tensiune este de 1,03 mA față de 0,6 mA valoare de regim la lanțul cu două elemente și de 0,6 mA față de 0,42 mA la lanțul cu 3 elemente.

2.4. Compoziția chimică a depunerilor

Compoziția chimică a stratului de depuneri, care în prezența umidității se comportă ca un electrolit, influențează valoarea curentului de conducție cu atît mai mult cu cît cantitatea de săruri solubile din amestec este mai mare.

În tabela 1 se arată compoziția și cantitatea depunerilor după opt luni de contaminare pe diverse izolatoare. Se observă existența în depuneri a sărurilor componente în apa mării [13]. Cantitatea de depuneri specifice variază între 0,19 și 0,248 mg/cm^2, încadrînd această zonă în categoria de contaminare grea [14].

3. CONCLUZII

Abordarea cercetărilor în problema contaminării izolației va crea și în țara noastră posibilitatea aprecierii judicioase a izolatoarelor indigene. Primele rezultate obținute se încadrează calitativ și cantitativ în datele literaturii tehnice. Dată fiind complexitatea fenomenului, dependent de factori meteorologici, chimici și electrici este necesară stabilirea legii statistice a dependenții curentului de conducție în funcție de diverșii parametri pe baza unui volum mare de date. Cercetarea relației statistice între curentul de conducție și tensiunea de conturnare va putea fi utilizată apoi în problema stabilirii nivelului de izolație.

Primit la redacție la 4 mai 1964

BIBLIOGRAFIE

1. A. AVRAMESCU, *Principiile tehnico-economice ale construcției echipamentului de foarte înaltă tensiune.* Electrotehnica, **8**, *1*, 2—11 (1960).
2. G. DRĂGAN, B. POPA, I. ADĂMUȚ, *Cercetări experimentale privind determinarea tensiunilor de conturnare a lanțurilor de izolatoare* IC4. St. cerc. energ., **XI**, *2*, 355—375 (1961).
3. I. ADĂMUȚ, M. PETCU, *Contaminarea izolației.* Energetica, **12**, *3*, 135 (1964).
4. J. S. FORREST, H. VON CRON ș.a., *Mésure du comportement des isolateurs en atmosphère pollué.* Annexe IV. Rapport sur les travaux du Comité d'études des isolateurs nr. 5, CIGRE 1960, rap. *234*.

5. G. H. GILLAM, *Rapport sur les travaux du Comité d'études des isolateurs nr. 5* CIGRE 1962, rap. *211*.
6. G. DRĂGAN, B. POPA, *Încercarea izolatoarelor electrice de fabricație românească pentru liniile de 10—35 kV*. Electrotehnica, **8**, *9*, 313—321 (1960).
7. A. AVRAMESCU, G. DRĂGAN, I. ADĂMUȚ, P. BADEA, *Unele considerații privind prescripțiile CEI în problema nivelelor de izolație în lumina unor încercări și rezultate în R.P.R.* Electrotehnica, **10**, *9*, 335 (1962).
8. I. ADĂMUȚ, G. DRĂGAN, *Cercetări privind stabilirea nivelului de izolație a barelor din stațiile și posturile de transformare de tip interior*. St. cerc. energ., **XII**, *2*, 269—298 (1962).
9. П. ХАММАРЛУНД, *Восстанавливающееся напряжение на контактах выключателя*. ЖЕI, 1956, Москва—Ленинград, p. 196.
10. E. NASSER, *Verhalten von Isolatoren bei unterschiedlich verteilter Fremdschicht*, ETZ—A, **84**, *11*, 353 (1963).
11. G. REVEREY, *Der Ableitsstrom und das Fremdschichtverfahren von Isolatoren* ETZ-A, **84**, *15*, 493—499 (1963).
12. P. O. GESZTI, P. IGNACZ, P. RONKAY, *Experiences concernant la détérioration de l'isolation due à la pollution atmosphérique*. CIGRE, Kap. *204*, 1960.
13. V. GRASU, V. MANOLE, E. COCIAȘU, *Apele minerale din R.P.R.* Studii tehnice și economice, seria B, Chimie, *38*, Comitet geologie (1953).
14. MITSUYOSHI YAMAMOTO, KENZA OHASHI, *Salt contamination of external insulation of high voltage apparatus and its contermeasures*, AIEE, Power App. and Syst. Aug., 380 (1961).

GRADUL DE NEGREALĂ AL FLĂCĂRILOR AUTOCARBURATE

DE

D. GRECOV şi I. IORDACHE

662.95

În lucrare se studiază influenţa diferiţilor factori asupra mărimii gradului de negreală a flăcărilor cu particule de funingine în cazul autocarburării gazului metan.

Formulele propuse permit să se calculeze valorile gradului total de negreală în funcţie de diametrul mediu al particulelor de funingine, de concentraţia acestora, de grosimea stratului radiant şi de temperatura flăcării.

1. INTRODUCERE

Utilizarea cît mai eficientă a gazelor naturale drept combustibil în focarele cuptoarelor industriale sau cazanelor, în care schimbul de căldură prin radiaţie reprezintă peste 90% din căldura receptată în focar, face necesară analiza minuţioasă a factorilor care influenţează gradul de negreală al flăcărilor, dat fiind faptul că schimbul de căldură prin radiaţie depinde direct de acesta.

Se ştie că, spre deosebire de arderea cinetică (amestec stoechiometric de gaze cu aer de combustie) a gazului metan, arderea difuză, sau procesul de autocarburare prin piroliza gazului metan, conduce la formarea de particule de funingine în flacără, care conferă caracterul luminos al acesteia.

Gradul de negreală al flăcării transparente în cazul arderii cinetice a gazului metan, a cărui valoare este dată de radiaţia selectivă a moleculelor triatomice din flacără este bine studiat în literatură [1], [6], [8].

Deoarece gradul de negreală ε al flăcărilor luminoase depinde de o serie de factori (diametrul mediu al particulelor de funingine, care, la rîn-

dul lui, depinde de condiţiile de ardere sau de autocarburare, de concentraţia particulelor în flacără, de temperatura flăcării şi condiţiile aerodinamice din focar), problema determinării valorii lui ε în acest caz este mult mai complexă iar lucrările din literatura de specialitate [2], [6], [14] indică date contradictorii.

Astfel, N. A. Zaharikov [2], efectuînd o serie de experienţe într-un cuptor de laborator de dimensiuni reduse, a obţinut un flux de căldură mai intens de la flacără în cazul flăcării transparente, în timp ce experienţele efectuate de acelaşi cercetător în cuptoare de topit sticlă (dimensiuni mari, temperaturi înalte) au condus la rezultate contrare, ajungînd la concluzia că diametrul particulelor de funingine are o influenţă hotărîtoare asupra mărimii gradului de negreală.

Din cercetările efectuate pînă în prezent rezultă că diametrul particulelor de funingine formate în flacără în cazul arderii difuze este foarte mic.

Astfel, Sakae Jagi [4], studiind spectrele de absorbţie ale particulelor de funingine, considera diametrul mediu al acestora de ordinul 0,1 μ, iar cercetările efectuate de A. G. Gaydon şi H. G. Wolfghard [5] cu ajutorul microscopului electronic au arătat că dimensiunile particulelor de funingine pot fi de ordinul 0,1 $\div$ 2 μ, în funcţie de tipul flăcării, în timp ce în [3] se indică valori ale diametrului mediu al acestora mult mai mici decît 0,1 μ.

În cazul autocarburării prin piroliza gazului metan, diametrul mediu al particulelor de funingine poate fi mai mare, în funcţie de modul de încălzire a gazului [5].

După datele din [6], gradul de negreală va fi de 0,38 $\div$ 0,4 la descompunerea gazului metan în proporţie de 50%, grosimea stratului radiant $l = 0{,}5$ m şi diametrul mediu al particulelor de funingine de 0,6 $\div$ 2 μ, în timp ce pentru particulele obişnuite de funingine ce se obţin în flacăra difuzivă [3], [6] ($d = 0{,}02 \div 0{,}3$ μ), la acelaşi grad de descompunere a metanului, gradul de negreală va fi 0,25$\div$0,3 μ.

Din [9] rezultă că, pentru particula de funingine cu diametrul mai mic de 25 μ, partea disipată prin reflexie din fluxul radiant incident este mai mică de $6^0/_{00}$, ceea ce demonstrează că energia disipată prin reflexie este foarte mică şi poate fi neglijată.

Cercetările lui K. S. Sifrin [7] asupra difracţiei undelor electromagnetice pe sferă au arătat că coeficientul spectral de absorbţie în mediu dispers K_λ este determinat univoc de parametrii $\pi_1 = \frac{d}{\lambda}$ şi $\pi_2 = \frac{m_i}{m_a}$, care reflectă corespunzător influenţa fenomenelor de difracţie şi ale proprietăţilor electro-optice ale substanţei absorbante, unde m_i şi m_a sînt parametri complexi ai refracţiei particulelor de funingine şi mediului portant.

Avînd în vedere că compoziţia particulelor de funingine formate în flacără, conform rezultatelor prezentate în [5], este aceeaşi (99% grafit şi 1% hidrogen), se poate considera că raportul m_i/m_a este constant şi coeficientul spectral de absorbţie va depinde numai de raportul d/λ.

În literatură se indică diferite relații care exprimă dependența coeficientului spectral de absorbție în funcție de lungimea de undă a radiației incidente [4], [9], [13], pe baza cărora se poate calcula coeficientul integral de negreală, însă aceste relații sînt prea complexe pentru a găsi o rezolvare analitică.

Astfel, W. Pepperhoff și A. Bähr [9] propun în zona vizibilă a radiației expresia

$$K_\lambda = c\lambda^{-n}$$

iar în zona infraroșie a spectrului

$$K'_\lambda = c\,\lambda^{-(n-m\log\lambda)},$$

în care valorile lui c, m și n depind de natura combustibilului folosit, în timp ce, pe baza teoriei lui G. Mie [13] H. C. Hottel [12] obține pentru n valoarea 1,39 pentru flăcări luminoase.

Dacă conform [11] se admite că valoarea lui n este egală cu unitatea, se poate calcula coeficientul integral de radiație K atunci cînd se cunoaște K_λ pentru o valoare λ_0 dată, însă acest mod de calcul, pe lîngă aproximațiile pe care le conține, nu permite a scoate în evidență influența diametrului particulelor de funingine asupra mărimii K și depinde totodată de precizia de măsură a valorii K_λ.

În lucrarea de față, pornind de la ipoteza că mediul dispers reprezintă un corp negru ce absoarbe radiațiile numai pe o bandă de lungimi de undă proporțional cu diametrul mediu al particulelor de funingine, astfel încît energia de radiație a corpului negru să fie egală cu cea emisă de mediul dispers, se obține o expresie a gradului de negreală a flăcărilor luminoase în funcție de factorii principali ce pot influența valoarea acestuia și se dau valorile maxime ale gradului de negreală ce se poate obține în urma descompunerii gazului metan în flacără sau în procesul de autocarburare (piroliză sau reformare), comparîndu-se totodată cu valorile obținute în cazul flăcărilor transparente.

2. DETERMINAREA GRADULUI DE NEGREALĂ AL FLĂCĂRILOR AUTOCARBURATE

Dacă se consideră că particulele de funingine formate în flacără au forma sferică că diametrul mediu d și că au o suprafață absolut neagră, probabilitatea ca radiația incidentă să fie absorbită va fi dată de raportul dintre proiecția suprafeței particulei f pe suprafața S perpendiculară pe fluxul radiant și suprafața totală S. Pentru M particule de funingine, coeficientul de absorbție va fi

$$\varepsilon_M = \frac{S_M}{S} = \frac{f_M}{S}.$$

Dacă la M particule se adaugă încă o particulă, atunci probabilitatea ca proiecția ei f să cadă pe o suprafață neacoperită de proiecția celor

M particule va fi $(1 - \varepsilon_M)$, deci particula poate acoperi o suprafaţă suplimentară $\frac{f}{s}(1 - \varepsilon_M)$.

Pentru suprafaţa totală proiectată în cazul $M + 1$ particule vom găsi [15]:

$$\varepsilon_{M+1} = \varepsilon_M + \frac{f(1 - \varepsilon_M)}{S} = \varepsilon_M\left(1 - \frac{f}{S}\right) + \frac{f}{S}. \tag{2}$$

Dacă se iau N particule suplimentare, se poate scrie:

$$\varepsilon_{M+N} - 1 = (\varepsilon_M - 1)\left(1 - \frac{f}{S}\right)^N. \tag{3}$$

Dacă se consideră N particule omogen repartizate în volumul V ($M=0$), rezultă:

$$\varepsilon_N = 1 - \left(1 - \frac{f}{S}\right)^N. \tag{4}$$

Notînd $N = nS$, se poate demonstra că $S \gg f$; gradul de negreală conform [15] devine:

$$\varepsilon_n = 1 - e^{-nf} \tag{5}$$

Exponentul nf poate fi calculat dacă se ţine seama de relaţia:

$$n = \frac{N}{S} = \frac{\chi V}{\frac{\pi d^3}{6}\delta S} = \frac{\chi l}{\frac{\pi d^3}{6}\cdot\delta}, \tag{6}$$

în care

χ este concentraţia particulelor de funingine în stratul radiant, g/m³;

V — volumul luat în considerare, m³;

δ — densitatea particulei de funingine, g/m³;

$l = \frac{V}{S}$ — grosimea stratului radiant, m.

Avînd în vedere că proiecţia pe suprafaţa S a unei particule este $f = \frac{\pi d^2}{4}$, rezultă, ţinînd seama de (5) şi (6), următoarea expresie a gradului de negreală:

$$\varepsilon_n = 1 - e^{-\frac{3\chi l}{d\delta}}, \tag{7}$$

în care s-a ţinut seama că, datorită fenomenelor de reflexie şi difracţie, conform [7] exponentul din (5) trebuie dublat atunci cînd dimensiunile particulelor de funingine depăşesc cu mult lungimea de undă a radiaţiei incidente.

Pe bază expresiei (7) s-au calculat valorile ε_n în funcție de diametrul mediu al particulelor de funingine și de produsul χl ($\chi l = 2 \div 5$ g/m^2), rezultatele calculelor fiind prezentate în figura 1, din care se observă că, o dată cu creșterea diametrului mediu al particulelor, valorile ε_n scad mult,

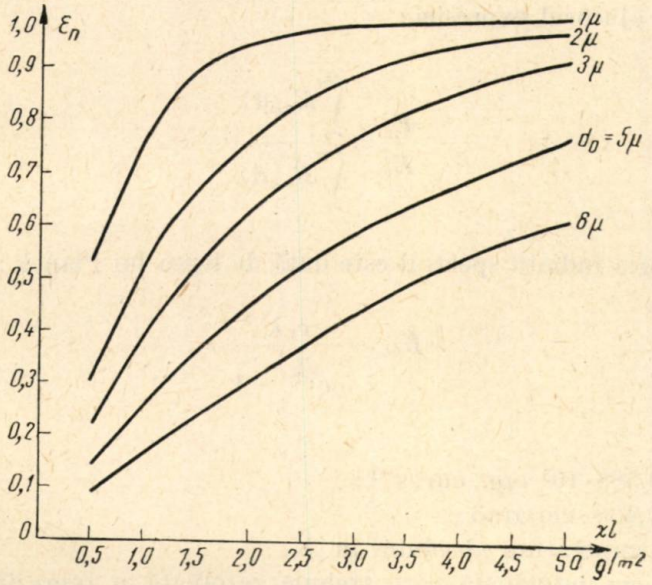


Fig. 1. — Variația gradului de negreală în funcție de produsul χl — $E_n = f(\chi l)$.

ele tinzînd însă spre unitate pe măsura creșterii produsului χl (concentrații mari de particule de funingine în flacără și dimensiuni mari ale incintei).

Expresia (7) se poate utiliza în cazul în care dimensiunile particulelor de funingine sînt suficient de mari pentru a putea neglija influența diametrului particulelor asupra coeficientului monocromatic de absorbție K_λ.

În realitate, dacă se ține seama de faptul că pentru $\lambda > d$ numai o mică parte din energia radiată este absorbită de mediul dispers, iar pentru $\lambda < d$ cea mai mare parte a acestei energii este absorbită, rezultă că expresia gradului total de negreală se poate scrie sub forma :

$$\varepsilon_{tot} = \frac{\int_0^\lambda \varepsilon_\lambda E_{0\lambda}\, d\lambda}{\int_0^\infty E_{0\lambda}\, d\lambda} = \varepsilon_n \frac{E_{01}}{E_0}, \qquad (8)$$

în care ε_n reprezintă gradul de negreală pentru cazul cînd mediul dispers s-ar comporta ca un corp gri, la care coeficientul monocromatic de absorbție K_λ este același pentru orice lungime de undă, iar raportul $\frac{E_{01}}{E_0}$

arată în ce proporție energia radiată incidentă este reținută de mediu în raport cu corpul negru dacă se ia în considerație că pentru $\lambda_1 > d$ mediul nu absoarbe.

Valoarea ε_n se poate calcula conform relației (7), iar valoarea raportului $\frac{E_1}{E_0}$ cu ajutorul expresiei :

$$\frac{E_1}{E_0} = \frac{\int_0^{\lambda_1} E_{0\lambda}\,d\lambda}{\int_0^{\infty} E_{0\lambda}\,d\lambda}, \tag{9}$$

în care energia radiată spectral este dată de legea lui Planck :

$$E_{0\lambda} = \frac{c_1 \lambda^{-5}}{e^{\frac{c_2}{\lambda T}} - 1}, \tag{10}$$

unde

$c_1 = 0{,}588 \cdot 10^5$ erg. cm^2/s^{-1};

$c_2 = 1{,}438$ cm/grad ;

T — temperatura absolută, în °K.

Problema principală care trebuie rezolvată o reprezintă expresia integrală $\int_0^{\lambda_1} E_{0\lambda}\,d\lambda$, deoarece numitorul expresiei (9), conform legii lui Boltzmann, devine $\int_0^{\infty} E_{0\lambda}\,d\lambda = \sigma_0 T^4$ în care $\sigma_0 = 4{,}9.10^8$ kcal/m^2 °K.

Se observă că, dacă se folosește expresia (10) pentru energia spectrală de radiație și se notează $\frac{1}{\lambda} = x$, se poate scrie relația :

$$E_{0\lambda}\,d\lambda = -2 c_1 x^3 \frac{dx}{e^{\frac{c_2}{T} x} - 1} =$$

$$= -2 C_1 x^3 \left(e^{\frac{c_2}{T} x} + e^{-\frac{c_2}{T} 2x} + \ldots e^{-\frac{c_2}{T} nx} + \ldots\right) dx, \tag{11}$$

integrala de la numărătorul expresiei (9) devenind în acest caz o sumă de integrale

$$\int_0^{\lambda_1} E_{0\lambda}\,d\lambda = -2 c_1 \sum_{i=1}^{n} \int_{\infty}^{\alpha} x^3 e^{-\frac{c_2}{T} ix}\,dx. \tag{12}$$

Integrarea prin părți a integralelor de sub semnul sumă m conduce la o expresie de forma unei serii :

$$\int_0^{\lambda_1} E_{0\lambda}\,d\lambda =$$

$$e^{-\frac{c_2}{T}x_1}\left(\frac{2C_1T}{C_2}x_1^3+\frac{6C_1T^2}{C_2^2}x_1^2+\frac{12C_1T^3}{C_2^3}x_1+\frac{12C_1T^4}{C_2^4}\cdot\right)+$$

$$\left(e^{-\frac{c_2}{T}x_1}\right)^2\left(\frac{1}{2}\,\frac{2C_1T}{C_2}x_1^3+\frac{1}{2^2}\cdot\frac{6C_1T^2}{C_2^2}x_1^2+\frac{1}{2^3}\cdot\frac{12C_1T^3}{C_2^3}x_1+\frac{1}{2^4}\,\frac{12C_1T^4}{C_2^4}\right)+ \tag{13}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(e^{-\frac{c_2}{T}x_1})^n\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{2C_1T}{C_2}x_1^3+\frac{1}{n^2}\cdot\frac{6C_1T^2}{C_2^2}\cdot x_1^2+\frac{1}{n^3}\cdot\frac{12C_1T^3}{C_2^3}x_1+\frac{1}{n^4}\cdot\frac{12C_1T^4}{C_2^4}\right)+$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Se poate demonstra pe baza calculului că, pentru temperaturi ale flăcării $T < 2\,300°K$ (domeniul care interesează pentru calculul lui ε_{tot}), seria este foarte puternic convergentă, termenul al doilea fiind mai mic decît primul termen al seriei de peste 300 de ori, ceea ce permite să se rețină numai primul termen al seriei.

De altfel se observă că dacă se folosește expresie simplificată a lui Wien pentru energia spectrală de radiație

$$E_{0\lambda} = c_1\,\lambda^{-5}\,e^{-c_2/\lambda T}$$

se ajunge la același rezultat.

Ținînd seama de expresia (13), se poate demonstra că mărimea $k = \dfrac{E_1}{E_0}$ va avea expresia :

$$k = 0{,}566\,e^{\frac{-c_2}{\lambda T}}\left[\frac{2\,C_1}{\lambda^3{}_1}\cdot\frac{T}{C_2}+\frac{6\,C_1}{\lambda_1^2}\cdot\left(\frac{T}{C_2}\right)^2+\frac{12\,C_1}{\lambda_1}\cdot\left(\frac{T}{c_2}\right)^3+12\,C_1\left(\frac{T}{C_2}\right)^4\right]\cdot 10^3 \tag{14}$$

$$T^4$$

în care

$$\lambda_1 = md\ \ [\mu].$$

Valoarea integrală a gradului de negreală conform formulei (8) devine :

$$\varepsilon_{tot} = k\ \varepsilon_n \tag{15}$$

În figura 2 se prezintă valorile $k = f\,(\lambda_1,\ T)$, de unde rezultă că pentru $\lambda_1 > 7\ \mu$ valorile lui k devin $k > 0{,}9$, o creștere rapidă a lui k avînd loc în domeniul $\lambda_1 = 1 \div 4\ \mu$.

Pentru a vedea care trebuie să fie valoarea λ_1 în funcție de diametrul mediu al particulei de funingine (d), s-au utilizat valorile experimentale ale gradului de negreală date de A. M. Gurvici, A. G. Bloh și A. I. Nosoviţki [15], care s-au comparat cu valorile obținute cu ajutorul formulei (15) pentru $d = 2{,}8 \div 18{,}9\mu$ și $\chi\, l = 2 \div 5$ g/m^2.

Valorile $m_1 = \dfrac{\lambda_1}{d}$, care arată cît trebuie să fie luat λ_1 în funcție de diametrul mediu al particulelor de funingine (d) pentru ca să existe relația

$$\varepsilon_n \int_0^{\lambda_1} E_{0\lambda}\, d\lambda = \int_0^{\infty} \varepsilon_\lambda E_{0\lambda}\, d\lambda, \tag{16}$$

vor depinde, evident, de lungimea undă λ_0, pentru care se obține maximul energiei spectrale radiate $E_{0\lambda}^{max}$.

Deci:

$$m_1 = f\left(\frac{d}{\lambda_0}\right). \tag{17}$$

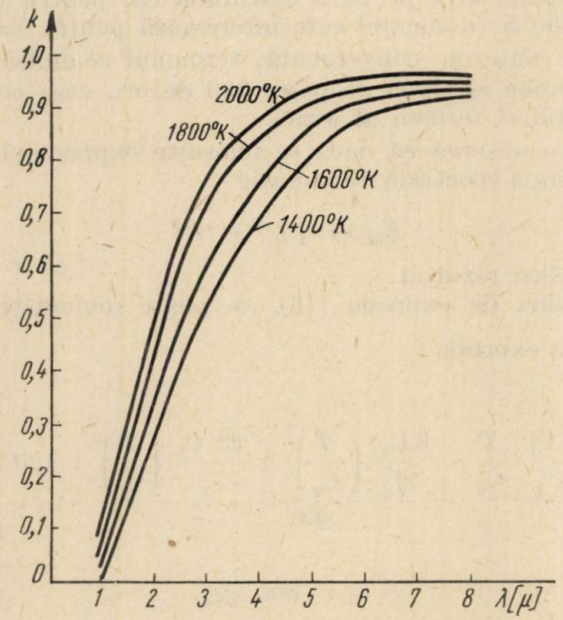


Fig. 2. — Variația coeficientului k în funcție de lungimea de undă.

Aplicînd relația lui Wien $\chi_0\, T = 2\,900\ \mu°\text{K}$, rezultă că

$$m_1 = f\left(\frac{d}{2\,900}\, T\right). \tag{17'}$$

Într-adevăr, din figura 3 se observă că m_1 nu depășește valoarea $m_1 = 2$ pentru $\frac{d}{\lambda_0} = 1$, tinzînd spre valori subunitare ($m_1 = 0{,}7 \div 0{,}6$) pentru valori mari ale lui $\frac{d}{\lambda_0}$.

Pentru $\frac{d}{\lambda_0} < 1$, valoarea lui m crește mult, ajungînd la $m = 2{,}5$ pentru $\frac{d}{\lambda_0} = 0{,}5$.

Pe baza relației (15) s-au calculat mărimile ε_{tot} în funcție de diametrul mediu al particulelor de funingine (d) pentru diferite temperaturi, grosimi ale stratului radiant și concentrații de particule ($\chi l = 0{,}5 - 3$ g/cm²), rezultatele calculelor fiind prezentate în figura 4 *a*, *b* *c*, *d*, din

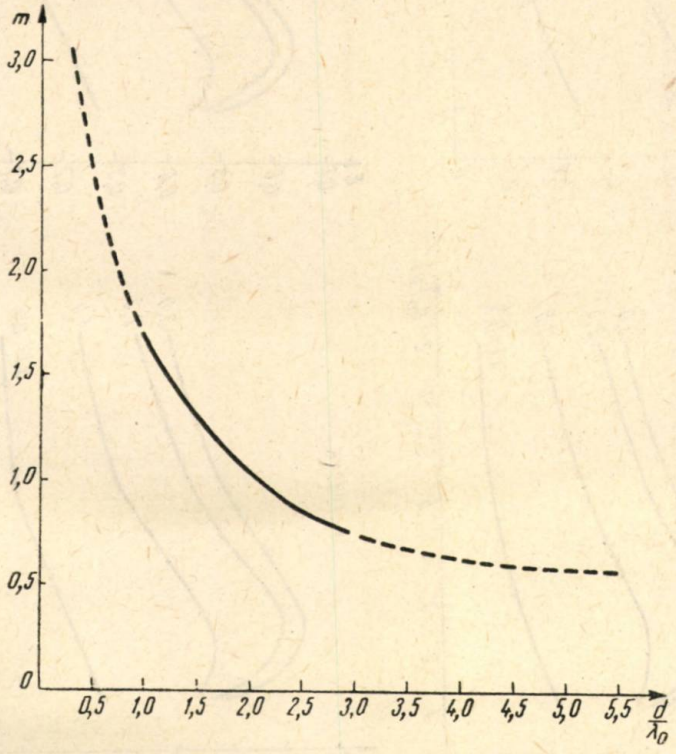


Fig. 3. — Variația mărimii m în funcție de raportul $\frac{d}{\lambda_0}$.

care rezultă că valoarea ε_{tot} va prezenta un maxim pentru $d = 2 \div 3$ μ, în funcție de produsul χl, maximul deplasîndu-se către $d = 2 \div 4$ μ pe măsura creșterii concentrației și grosimii stratului radiant.

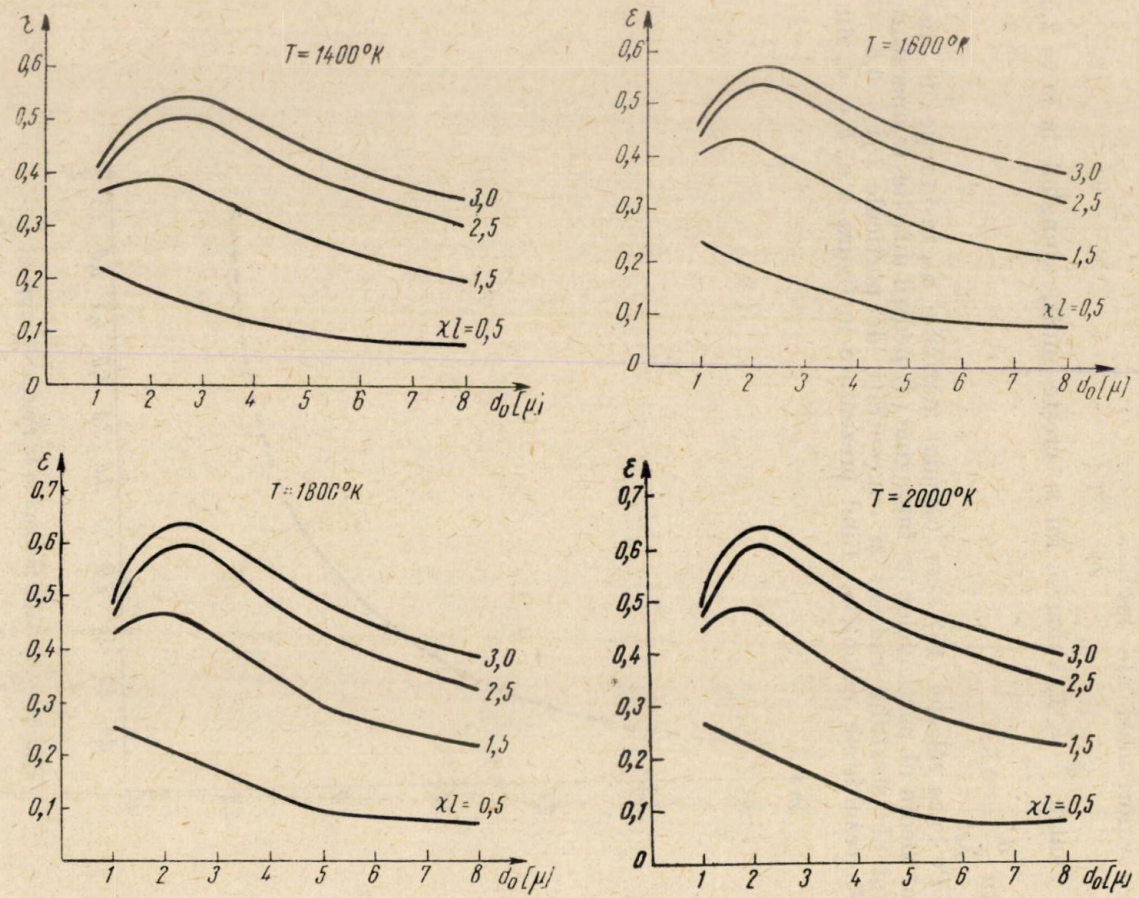


Fig. 4. — *a,b,c,d.* — Variaţia gradului total de negreală în funcţie de diametrul mediu al particulelor de funingine.

3. COMPARAȚIA GRADULUI DE NEGREALĂ AL FLĂCĂRILOR LUMINOASE ȘI TRANSPARENTE

Pentru a vedea care pot fi concentrațiile de funingine în flacără în cazul arderii autocarburate a gazului metan, se consideră procesul de descompunere prin piroliză
$CH_4 \rightleftarrows 2H_2 + C$, cunoscînd expresia constantei de echilibru [14]:

$$K_p = \log. \frac{P_{CH_4}}{P^2_{H_2}} = \frac{3\,348}{T} - 5{,}97\ T + 0{,}00186\ T - 0{,}0_6\ 1095\ T^2 + 11{,}79 \quad (18)$$

Pe baza ecuației de echilibru termodinamic a reacției se determină gradul de descompunere al gazului metan în funcție de temperatura de încălzire.

În figura 5 se dau concentrațiile de particule de carbon descompus din gazul metan în flacără, la un exces de aer $\alpha = 1{,}05$, pentru diferite

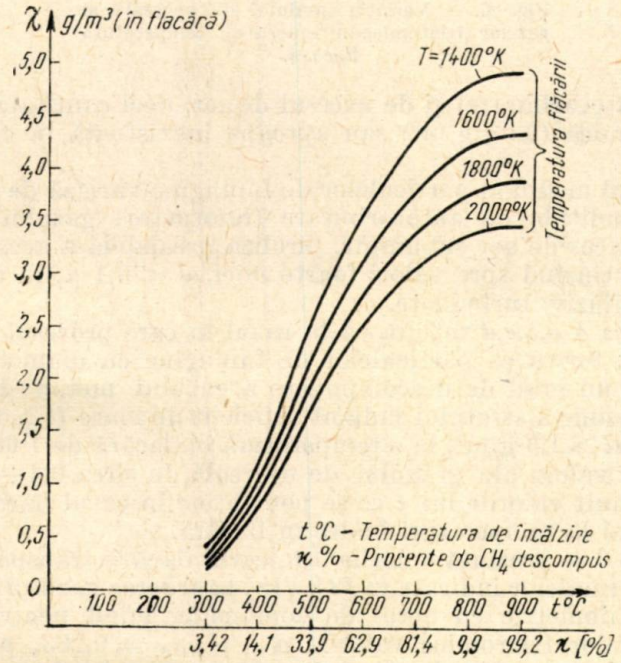


Fig. 5. — Variația concentrației particulelor de funingine în flacără în funcție de gradul de descompunere al gazului metan și de temperatura flăcării.

temperaturi în flacără și diferite procente de CH_4 descompus (în funcție de temperatura de încălzire a gazului metan).

Se observă că la o preîncălzire a gazului metan, în procesul de autocarburare, de circa 900°C, peste 99% din gazul metan se descompune,

obţinîndu-se o concentraţie de carbon în flacără de circa 3,5÷5 g/m³. În realitate, în flacăra difuză nu se descompune întreaga cantitate de gaz metan, gradul de descompunere variind în funcţie de condiţiile de ardere

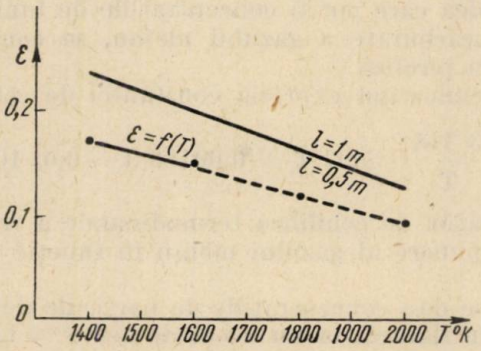


Fig. 6. — Variaţia gradului de negreală al gazelor triatomice în funcţie de temperatura flacării.

(condiţii de autocarburare) şi de excesul de aer, deci cantitatea de carbon poate fi mai mică (2÷3 g/m³) sau aproape inexistentă în cazul arderii cinetice.

Diametrul mediu al particulelor de funingine variază de asemenea în funcţie de condiţiile de autocarburare (reformarea gazului metan prin ardere la un exces de aer subunitar, piroliza prealabilă a acestuia într-un preîncălzitor), tinzînd spre valori foarte mici, $d < 0{,}1$ μ, în cazul arderii cinetice sau difuziv turbulente.

Din figura 4 *a*,*b*,*c*,*d* rezultă că în cazul în care procesul de autocarburare asigură formarea particulelor de funingine cu diametre medii de cca 2÷3 μ, la un grad de descompunere a gazului metan de peste 50% (fig. 5) şi o grosime a stratului radiant suficient de mare ($l \geqslant 0{,}5$ m), deci pentru valori $xl \geqslant 1{,}5$ g/m², la o temperatură în flacără de 1 600 —1 800°C se pot obţine valori ale gradului de negreală de circa 0,4÷0,6, ceea ce depăşeşte cu mult valorile lui ε ce se pot obţine în cazul flăcării transparente, în special la temperaturi înalte în flacără.

În figura 6 se prezintă valorile ε în cazul flăcării transparente calculate pe baza formulelor indicate în [3], [18] la arderea gazului metan la un amestec stoechiometric cu aerul de combustie, luînd pentru presiunea parţială a gazelor triatomice valorile $p_{CO_2} + p_{H_2O} = 0{,}283$, $p_{H_2O} = 0{,}188$, iar pentru grosimea stratului radiant $l = 0{,}5 \div 1{,}0$ m. Se observă că valoarea scade mult cu creşterea temperaturii, fiind în general cu mult mai mică decît în cazul flăcărilor autocarburate, în special la temperaturi înalte în flacără.

Din cele de mai sus rezultă clar că eficienţa autocarburării va fi mai mare în procesele termice la temperaturi înalte (cuptoare Siemens Martin cuptoare de topit sticlă, cazane cu grad mic de ecranare) şi cu grosimi mari ale stratului radiant.

Pentru calculele gradului total de negreală în flacără, ținînd seama de radiația particulelor de funingine și a gazelor triatomice, se poate aplica formula [17]:

$$\varepsilon_g = \varepsilon_{g_1} + \varepsilon_{g_2} - \beta\, \varepsilon_{g_1}\, \varepsilon_{g_2}, \tag{19}$$

în care ε_{g_1} și ε_{g_2} reprezintă respectiv gradul de negreală datorat particulelor de funingine și cel datorat gazelor triatomice.

Coeficientul β depinde de valoarea diametrului mediu al particulelor de funingine, deoarece gradul de suprapunere al benzilor de radiație va fi funcție de aceste valori.

4. CONCLUZII

Pe baza metodicei elaborate se poate calcula valoarea gradului de negreală ε al flăcărilor autocarburate în funcție de diametrul mediu al particulelor de funingine, de concentrația acestora, de grosimea stratului radiant și de temperatura în flacără, formulele recomandate permițînd scoaterea în evidență a influenței diferiților factori asupra valorii lui ε.

Calculele efectuate au arătat că valoarea gradului de negreală prezintă un maxim pentru diametre medii ale particulelor de funingine $d = 1 \div 4\ \mu$, crescînd o dată cu creșterea temperaturii flăcării, spre deosebire de valoarea gradului de negreală al flăcărilor transparente, care scad cu creșterea temperaturii.

Pe baza analizei rezultatelor obținute se poate concluziona că eficiența autocarburării depinde de condițiile în care au loc procesele de autocarburare (condițiile de formare a particulelor de funingine și gradul de descompunere a gazului metan în flacără), de temperatura flăcării și de grosimea stratului radiant, eficiența crescînd cu mărirea lui T și l.

Primit la redacție la 10 mai 1964.

BIBLIOGRAFIE

1. В.А. Спеишер, *Сжигание газа на электростанциях и в промышленности*. ГЭИ, Москва—Ленинград, 1960.
2. Н.А. Захариков, *Влияние неравномерности температуры газового потока на теплообмен в печах*. Сталь, *10* (1956).
3. В.В. Митор, *Теплообмен в топках паровых котлов*. Машгиз, Москва—Ленинград, 1963.
4. Sakaen Jagi, Journal Society Chemical Industry Japan, *2* (1937).
5. А.Г. Гейдон и Х.Г. Вольфгард, *Пламя, его структура, излучение и температура*. Москва, 1959.
6. В.П. Михеев, *Сжигание природного газа в промышленных установках*. Гостоптехиздат, Ленинград, 1962.
7. К.С. Шифрин, *Рассеяние света в мутной среде*. Гостехиздат, Москва, 1951.
8. А.М. Гурвич, В.В. Митор, В.Д. Терентьев, *Излучение светящегося пламени*. Теплоэнергетика, *7* (1956).
9. W. Pepperhoff, A. Bähr, *Zur Optik leuchtender Flammen*. Arhiv für das Eisenhüttenwesen, *9/10* (1952).
10. А.Е. Кадышевич, *Измерение температуры пламени*. Металлургиздат, Москва, 1961.

11. A. GOUFFÉ, *Consideration sur le rayonnement des flammes éclairantes.* Revue générale de thermique, **II**, *19* (1963).
12. H. C. HOTTEL, F. P. BROUGHTON, Ind. Eng. Chem. (Anal. Ed.), *54*, 166 (1932).
13. G. MIE, Annalen der Physik, **25**, 377 (1908).
14. У.М. РАФАЛОВИЧ, *Природный газ как топливо для металлургических печей.* Мос ква, 1961.
15. А.М. ГУРВИЧ, А.Г. БЛОХ, А.И. НОСОВИЦКИЙ, *Излучение в газоходах паровых котлов.* Вопросы аэродинамики и теплопередачи в котельно-топочных процессах. Сборник статей, под редакцией Г.Ф. Кнорре.
16. E. R. G. ECKERT, *Introduction to the transfer of heat and mass.* Mc Graw-Hill, Bock Company Inc., 1950.
17. P. GRECOV, I. IORDACHE, E. GUTU, ATH. TRUTEA, *Cercetări asupra radiaţiei flăcărilor obţinute în cazul arderii în două etape a gazului metan.* St. cerc. energ., **14**, *1* (1964).
18. А.Г. БЛОХ, *Излучение светящегося сажистого пламени.* Теплоэнергетика, *4* (1964).

INTERDEPENDENȚA PARAMETRILOR GEOMETRICI ȘI FUNCȚIONALI LA MODELAREA IZOTERMICĂ MONOFAZICĂ A FOCARULUI CICLON ORIZONTAL

DE

N. PĂNOIU, I. CARABOGDAN, G. SINGER și C. CRĂCIUNEANU

533: 662.933

Se prezintă interdependența parametrilor constructivi și funcționali în cazul modelării unui focar ciclon orizontal. Se propun relații criteriale de calcul al parametrilor funcționali funcție de parametrii geometrici. Se analizează influența parametrilor constructivi asupra componentelor vitezei din focar.

Focarul ciclon orizontal reprezintă o soluție modernă de focar cu mari posibilități de intensificare a procesului de ardere a combustibililor în general și a combustibililor solizi în special. În vederea asigurării unui grad ridicat de reținere a cenușii sub formă de zgură în stare lichidă și a unei încărcări termice ridicate, focarul ciclon orizontal este conceput ca un focar cu un regim de curgere impus. Studierea analitică a proceselor de curgere care au loc în focarele ciclon orizontale este legată de dificultăți matematice care nu au putut fi rezolvate pînă în momentul de față. În această situație, cercetarea fenomenelor de curgere din aceste focare se efectuează pe modele izotermice.

Așa cum s-a arătat într-o serie de lucrări [1], [2], [3], [4], [5], chiar și în cazul acestor modele integrarea ecuațiilor diferențiale care exprimă mișcarea fluidului nu este posibilă, din cauza complicațiilor pe care le introduce prezența capacului posterior, care modifică substanțial configurația fluxului în regiunea de ieșire. Modelarea fenomenelor care au loc în interiorul focarului ciclon conduce la stabilirea unor relații criteriale de calcul care să substituie integrarea ecuațiilor diferențiale ale mișcării fluxului. În acest sens, așa cum se arată într-o lucrare anterioară [1], regimul de curgere din focarul ciclon poate fi caracterizat prin intermediul componentelor raportate

ale vitezei W_t/W_i, W_x/W_i şi W_r/W_i şi prin criteriile de similitudine şi simplexurile (1):

$$Eu_i,\ Eu_e,\ \frac{W_{t\,\max}}{W_i},\ \frac{F_i}{F_e},\ \frac{T_e}{T_i},\ \frac{L}{D}. \tag{1}$$

Între criteriile de similitudine şi simplexurile menţionate există, aşa cum s-a arătat în lucrările [1], [5], [6], legături de tipul:

$$Eu_i = f_1\left(\frac{F_i}{F_e}, \frac{L}{D}, \frac{T_e}{T_i}\right), \tag{2}$$

$$Eu_e = f_2\left(\frac{F_i}{F_e}, \frac{L}{D}, \frac{T_e}{T_i}\right), \tag{3}$$

$$\frac{W_{t\,\max}}{W_i} = f_3\left(\frac{F_i}{F_e}, \frac{L}{D}, \frac{T_e}{T_i}\right), \tag{4}$$

care pun în evidenţă influenţa parametrilor geometrici asupra regimului funcţional al focarului. Parametrii geometrici ai focarului ciclon influenţează de asemenea şi caracteristicile aerodinamice ale focarului [2], [3], [4], [5], [7], printre care se menţionează:

— componentele tangenţială, axială şi radială ale vitezei;

— coeficientul secţiunii active de ieşire

$$\varphi = 1 - \left(\frac{r_\omega}{r_e}\right)^2; \tag{5}$$

— caracteristica geometrică a focarului

$$A = \frac{\pi r_e R_i}{F_i} = \frac{1-\varphi}{\sqrt{\frac{\varphi^3}{2}}}. \tag{6}$$

Cercetările efectuate în cadrul Institutului de energetică au avut ca scop studiul interdependenţei parametrilor geometrici şi funcţionali la modelarea izotermică monofazică a proceselor din focarul ciclon orizontal, întrucît procesele fundamentale care au loc în focarul ciclon sînt condiţionate de desfăşurarea procesului de curgere a fluidului, care implică consumuri relativ ridicate de putere în instalaţiile de insuflare a agentului comburant, rezultatele în domeniul aerodinamicii focarului ciclon permiţînd o alegere corectă a configuraţiei focarului în condiţiile unui consum minim de putere în instalaţiile menţionate [6], [7].

În vederea cunoaşterii elementelor pentru calculul instalaţiei de focar ciclon orizontal, în lucrarea de faţă se prezintă formele criteriale obţinute pentru funcţiile (2), (3), (4) şi influenţele parametrilor geometrici asupra caracteristicilor aerodinamice ale focarului ciclon orizontal menţionate prin relaţiile (5), (6).

Pentru studiul interdependenţei parametrilor geometrici şi funcţionali şi determinarea formei criteriale a funcţiilor (2), (3), (4) au fost cer-

cetate 45 de variante constructive și funcționale ale unui model izotermic monofazic de focar ciclon orizontal.

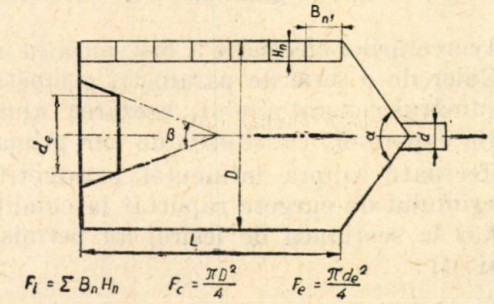


Fig. 1. — Schema focarului ciclon orizontal experimental cu simbolurile geometrice folosite.

Simbolurile folosite pentru mărimile geometrice ale instalației experimentale sînt prezentate în figura 1.

În cadrul rezultatelor obținute grafic, în figura 2 se prezintă variația criteriului Euler raportat la secțiunea de intrare Eu_i funcție de variația simplexului $\frac{F_i}{F_e}$ la diverse valori ale simplexului $\frac{L}{D}$.

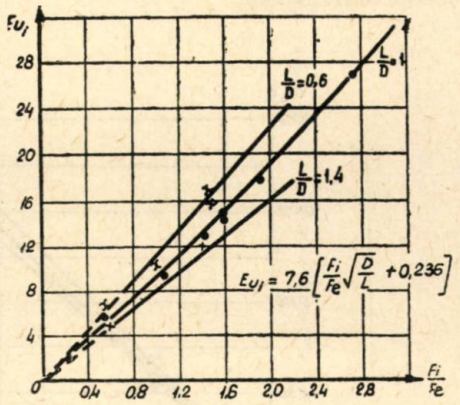


Fig. 2. — Variația criteriului Euler raportat la secțiunea de intrare Eu_i funcție de variația simplexului $\frac{F_i}{F_e}$ la diverse valori ale simplexului $\frac{L}{D}$.

Sub formă implicită, funcțiunea (2) poate fi scrisă :

$$Eu_i = 7,6\left(\frac{F_i}{F_e}\sqrt{\frac{D}{L}} + 0,236\right), \quad (7)$$

în care se pune în evidență dependența direct proporțională a criteriului Euler raportat la secțiunea de intrare de simplexul geometric $\frac{F_i}{F_e}$ și invers proporțională cu radicalul simplexului $\frac{L}{D}$. Este de făcut observația că relația (7) este mai generală decît relația grafică dată de Iakubov [5], care extrapolează dependențele funcționale în domeniul $\frac{F_i}{F_e}\sqrt{\frac{D}{L}} > 0,9$, pentru care autorul nu a dispus de rezultate. De altfel, așa cum recunoaște

şi autorul, dependenţele stabilite, bazîndu-se pe rezultatele mai multor cercetători, conduc la erori sensibile de calcul. Relaţia (7) stabilită în prezenta lucrare este mai exactă şi acoperă o gamă mare de variaţii $\left(\frac{F_i}{F_e}\sqrt{\frac{D}{L}} = 2{,}2\right)$. Totodată, în cadrul cercetărilor efectuate a fost pusă în evidenţă independenţa criteriului Euler de o serie de parametri geometrici şi funcţionali, ca, de exemplu, numărul generatoarelor, aşezarea ajutajelor aerului secundar, configuraţia capacelor, cantitatea de aer primar etc.

Cercetările efectuate asupra influenţei parametrilor geometrici ai focarului asupra regimului de curgere raportat la condiţiile de ieşire (criteriul Euler raportat la secţiunea de ieşire) au permis stabilirea formei criteriale a funcţiei (3) :

$$\frac{1}{Eu_e} = 0{,}107\left(\frac{F_i}{F_e}\sqrt{\frac{L}{D}} - 0{,}028\right). \tag{8}$$

În figura 3 se prezintă grafic forma funcţiei implicite (8).

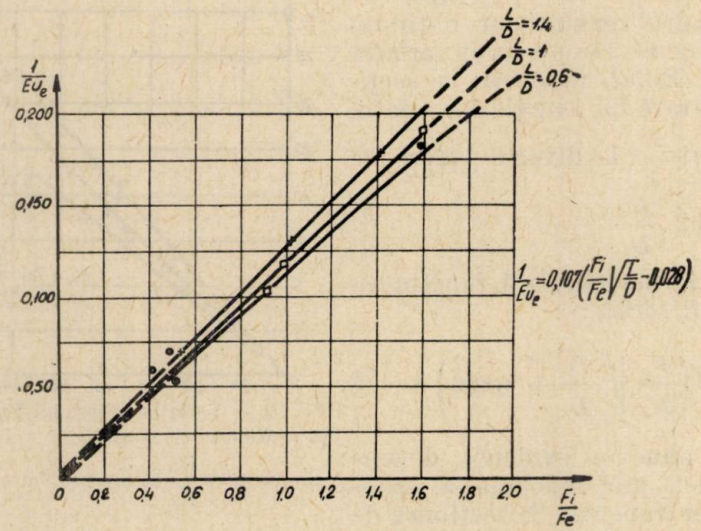


Fig. 3. — Variaţia criteriului Euler raportat la secţiunea de ieşire Eu_e funcţie de variaţia simplexului $\frac{F_i}{F_e}$ la diverse valori ale simplexului $\frac{L}{D}$.

Este de observat influenţa majoră a simplexului $\frac{F_i}{F_e}$ asupra criteriului Eu_e. Criteriul Eu_e, conform rezultatelor obţinute din analiza teoretică

şi experimentală, este independent de alţi parametri geometrici sau funcţionali, ca şi în cazul variaţiei Eu_i.

Rezultatele cercetărilor teoretice şi experimentale au permis determinarea funcţiei (4) sub forma criterială (9):

$$\frac{W_{t\,max}}{W_i} = 3{,}3\left(\frac{F_i}{F_e}\right)^{0{,}46}. \tag{9}$$

În figura 4 se prezintă grafic forma funcţiunii (4).

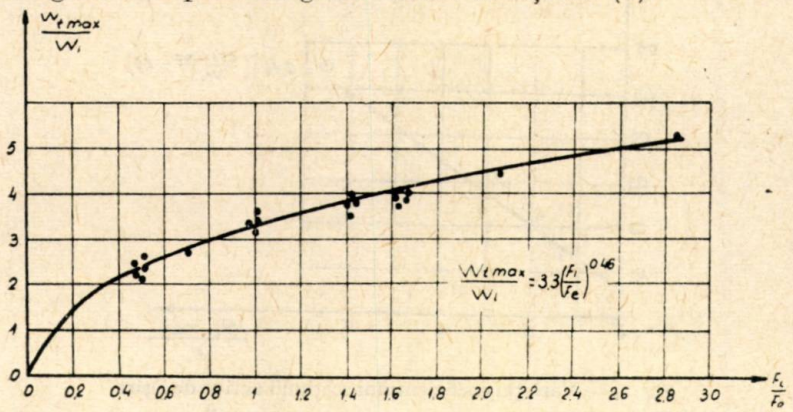


Fig. 4. — Variaţia vitezei tangenţiale maxime raportate $\frac{W_{t\,max}}{W_i}$ funcţie de variaţia simplexului $\frac{F_i}{F_e}$ pentru $0{,}6 < \frac{L}{D} < 1{,}4$.

Relaţia (9) permite calculul vitezei tangenţiale maxime cînd se cunosc caracteristicile geometrice ale focarului şi viteza de intrare a aerului secundar W_i.

Relaţia pune la dispoziţie valori care se încadrează în limitele erorilor de calcul pentru toate domeniile de variaţie a parametrilor întîlniţi în construcţia focarelor ciclon, valori care au o deosebită importanţă pentru funcţionarea focarului în regim bifazic.

Expresia (9) este mai generală şi mai exactă, în special pentru domeniul $\frac{F_i}{F_e} > 1{,}2$, decît datele menţionate în literatura de specialitate [5].

În legătură cu posibilităţile de aspiraţie de fluid din exterior, a fost cercetată variaţia coeficientului secţiunii active φ, definit prin relaţia (5). În lucrările [7], [8] se arată grafic independenţa acestui coeficient de caracteristica geometrică a camerei A.

Rezultatele cercetărilor pun în evidenţă dependenţa coeficientului secţiunii active de ieşire de regimul de curgere $\left(\frac{W_{t\,max}}{W_i}\right)$, propunîndu-se relaţia de calcul (10).

$$\varphi = 0{,}14\left(\frac{W_{t\,max}}{W_i} - 1{,}5\right). \tag{10}$$

Variația coeficientului secțiunii active de ieșire funcție de viteza tangențială maximă $\left(\frac{W_{t\,max}}{W_i}\right)$ este reprezentată în figura 5.

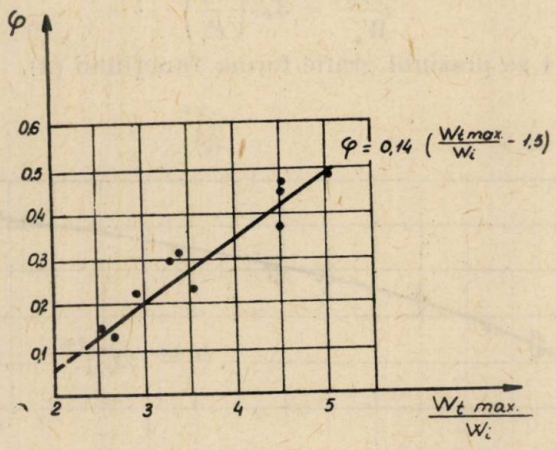


Fig. 5. — Variația coeficientului secțiunii active de ieșire φ funcție de viteza tangențială maximă $\frac{W_{t\,max}}{W_i}$.

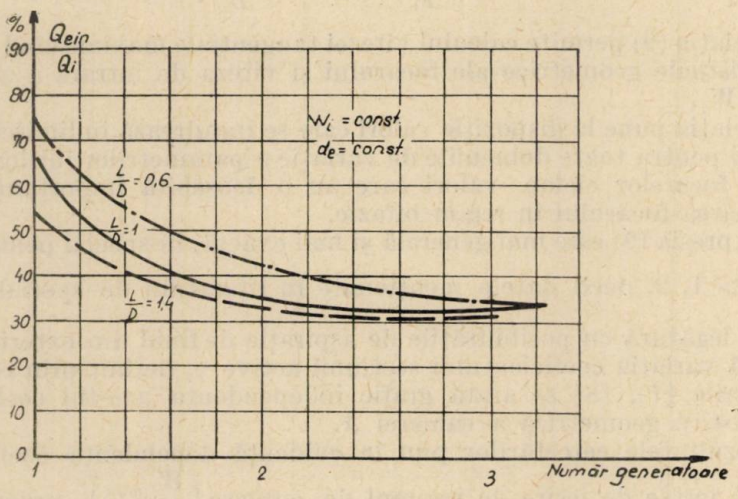


Fig. 6. — Variația debitului aspirat raportat $\frac{Q_{ein}}{Q_i}$ funcție de variația numărului generatoarelor aerului secundar la diverse valori ale simplexului $\frac{L}{D}$.

În legătură cu problema menţionată a fost studiată influenţa simplexului $\frac{L}{D}$ şi a numărului de generatoare de aşezarea ajutajelor de aer secundar asupra debitului aspirat raportat $\frac{Q_{e\,in}}{Q_i}$.

Rezultatele obţinute sînt prezentate în figura 6.

Creşterea numărului generatoarelor de aşezare a ajutajelor de aer conduce la scăderea sensibilă a influenţei simplexului $\frac{L}{D}$ şi la scăderea debitului aspirat raportat $\frac{Q_{e\,in}}{Q_i}$. Scăderea debitului raportat $\frac{Q_{e\,in}}{Q_i}$ la mărirea simplexului $\frac{L}{D}$ este o consecinţă a pierderilor de energie din flux prin frecare pe pereţii camerei. Dacă se ţine seama de faptul că debitul aspirat raportat $\frac{Q_{e\,in}}{Q_i}$ condiţionează stabilitatea procesului de ardere $\frac{Q_{e\,in}}{Q_i}$, reprezentînd, la funcţionarea neizotermică a focarului ciclon, cota de căldură adusă din camera secundară în focar, alegerea simplexului $\frac{L}{D}$ care condiţionează capacitatea de separare şi gradul de terminare a arderii în focarul ciclon trebuie făcută pe baza unei analize complexe care să ţină seama şi de stabilitatea procesului de ardere.

O atenţie deosebită se acordă în literatura de specialitate studiului parametrilor care influenţează coeficientul de rezistenţă, compus de fapt din trei cote (cota aferentă pierderilor de presiune în ajutajul de intrare, cota aferentă pierderii de presiune necesară formării turbionului şi cota aferentă frecărilor).

Reprezentarea generală a variaţiei coeficientului de rezistenţă raportat la secţiunea de intrare se face în coordonate $\zeta_i - \frac{F_i}{F_e}$ la variaţia condiţiilor de ieşire $\frac{d_e}{D}$. Autorii consideră că o reprezentare de coordonate $\zeta - A$ este mai comodă şi pune în evidenţă influenţa directă a caracteristicii geometrice a focarului asupra coeficientului de rezistenţă.

În figura 7 este reprezentată variaţia coeficientului de rezistenţă al focarului ciclon raportat la secţiunea de intrare ζ_i funcţie de variaţia caracteristicii geometrice a focarului A determinată prin relaţia (6) pentru focarul ciclon din plexiglas.

Rezultatele prezentate în figura 7 pun în evidenţă avantajele folosirii unor focare cu caracteristici geometrice de valori numerice mari şi posibilitatea analizei directe a unor parametri geometrici asupra coeficientului de rezistenţă al focarului ciclon. Rezultatele obţinute acoperă un domeniu mai larg decît cel prezentat în literatură [3], permiţînd efectuarea rapidă

a antecalculelor referitoare la caracteristicile instalaţiilor de insuflare a focarului ciclon.

Caracteristicile geometrice şi funcţionale ale focarului ciclon orizontal au o influenţă mai mult sau mai puţin pronunţată şi asupra componentelor vitezei fluidului din interiorul focarului.

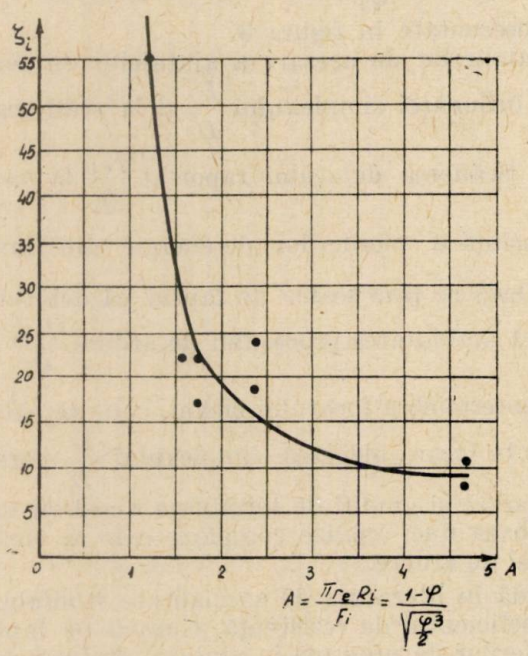


Fig. 7. — Variaţia coeficientului de rezistenţă al focarului raportat la secţiunea de intrare ζ_i funcţie de variaţia caracteristicii geometrice a focarului A.

Astfel, variaţia simplexului geometric $\frac{L}{D}$ conduce la variaţia componentelor tangenţiale raportate a vitezei $\frac{W_t}{W_i}$ în conformitate cu figura 8.

Similar, în figura 9 se prezintă variaţia componentei axiale raportate a vitezei $\frac{W_x}{W_i}$ la variaţia simplexului geometric $\frac{L}{D}$.

Din curbele de variaţie a componentelor raportate ale vitezei, prezentate în figurile 8 şi 9, se observă, în limita erorilor de măsură, o influenţă insensibilă a simplexului geometric $\frac{L}{D}$ asupra componentelor raportate ale vitezei. La variaţia numărului generatoarelor de amplasare a ajutajelor de aer secundar s-a păstrat aceeaşi concluzie. La variaţia simplexului $\frac{L}{D}$ în limite largi nu este de observat nici variaţia mărimii componentelor, nici variaţia configuraţiei spectrului lor.

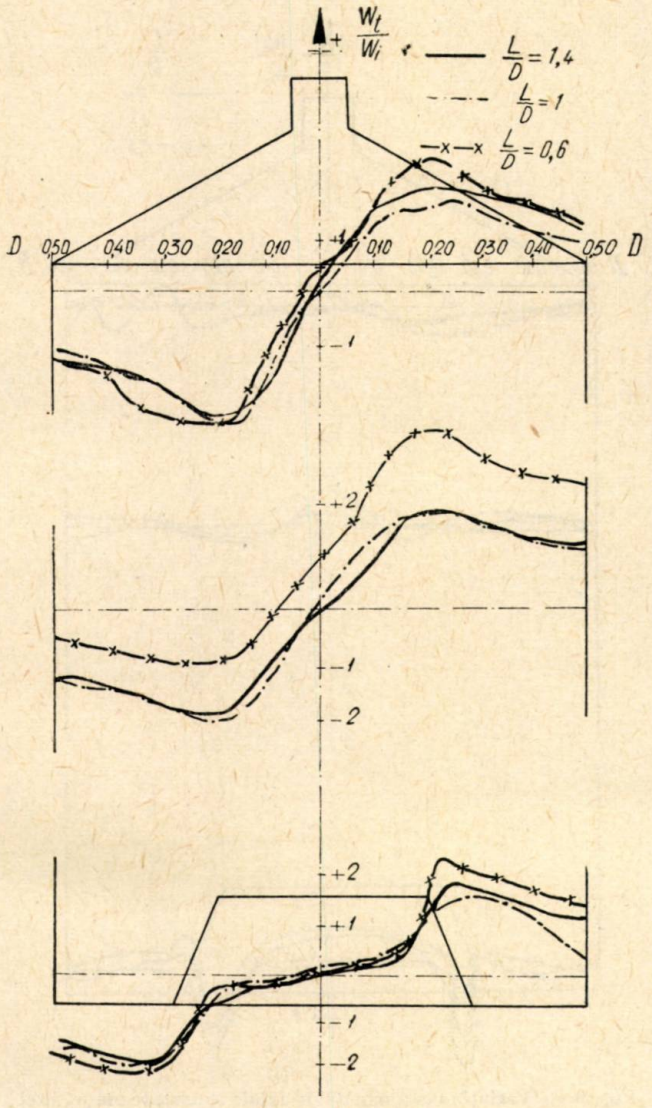


Fig. 8. — Variația componentelor tangențiale raportate ale vitezei $\frac{W_t}{W_i}$ la variația simplexului geometric $\frac{L}{D}$ (focar ciclon orizontal cu ajutajele de aer secundar amplasate pe o singură generatoare; $\frac{d_e}{D} = 0,4$; $\frac{F_i}{F_e} = 0,525$; aer primar 0 %).

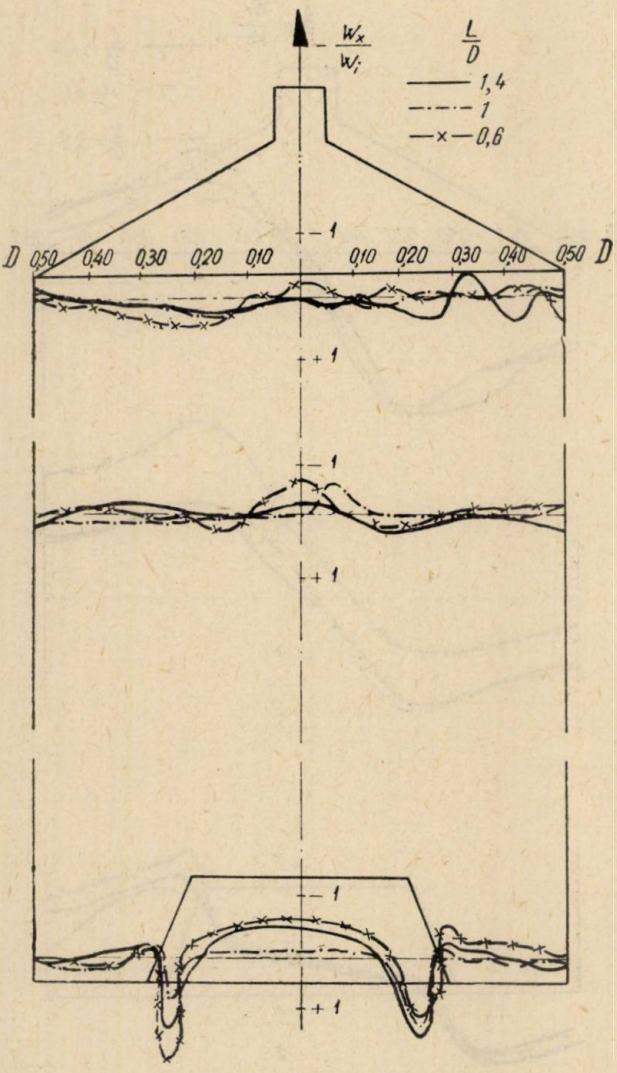


Fig. 9. — Variaţia componentelor axiale raportate ale vitezei $\frac{W_x}{W_i}$ la variaţia simplexului $\frac{L}{D}$ (focar ciclon orizontal cu ajutajele de aer secundar amplasate pe o singură generatoare; $\frac{d_e}{D} = 0{,}4$; $\frac{F_i}{F_e} = 0{,}525$; aer primar 0%).

Variaţia simplexului geometric $\frac{F_i}{F_e}$ conduce la variaţia componentelor tangenţiale raportate ale vitezei $\frac{W_t}{W_i}$ în conformitate cu figura 10.

Similar, în figura 11 se prezintă variaţia componentelor axiale raportate ale vitezei $\frac{W_x}{W_i}$ la variaţia simplexului geometric $\frac{F_i}{F_e}$.

Rezultatele cercetărilor efectuate arată că variaţia simplexului $\frac{F_i}{F_e}$ se exercită direct proporţional asupra variaţiei componentelor raportate ale vitezei. În zona capacului de ieşire, la creşterea simplexului $\frac{F_i}{F_e}$ se înregistrează o creştere a iregularităţii diagramelor componentelor vitezei, ca urmare a creşterii turbulenţei. Totodată, la creşterea simplexului $\frac{F_i}{F_e}$ pe lîngă creşterea valorilor componentelor axiale ale vitezei, este de observat o mărire a secţiunii inelului de evacuare a fluidului din ciclon şi o creştere a vitezei fluidului aspirat în ciclon.

Influenţa cantităţii aerului primar în condiţiile introducerii sale axiale asupra componentelor tangenţiale şi axiale raportate ale vitezei se prezintă în figurile 12 şi 13.

A fost de asemenea analizată influenţa variaţiei gradului de turbionare a aerului primar asupra componentelor tangenţiale şi axiale ale vitezei, rezultatele prezentîndu-se în figurile 14 şi 15.

Variaţia gradului de turbionare a aerului primar s-a făcut prin variaţia pasului elicei unui turbionator elicoidal în limitele $0 + 60°$; $0 - 60°$.

Procesul intens de amestec care are loc în focarul ciclon între aerul secundar şi aerul primar face ca atît variaţia cantităţii, cît şi a gradului de turbionare a aerului primar să nu exercite o influenţă sensibilă asupra componentelor raportate ale vitezei.

CONCLUZII

Cercetările efectuate pe modele în domeniul influenţei simplexurilor geometrice asupra fluxului din focarul ciclon orizontal izotermic permit să se tragă următoarele concluzii:

— Simplexul $\frac{L}{D}$, caracteristică de bază a focarului ciclon orizontal care determină volumul focarului şi proprietăţile sale de separare a fazei solide, afectează insensibil spectrul componentelor tangenţiale, axiale şi radiale raportate ale vitezei în volumul focarului, cu menţiunea că în

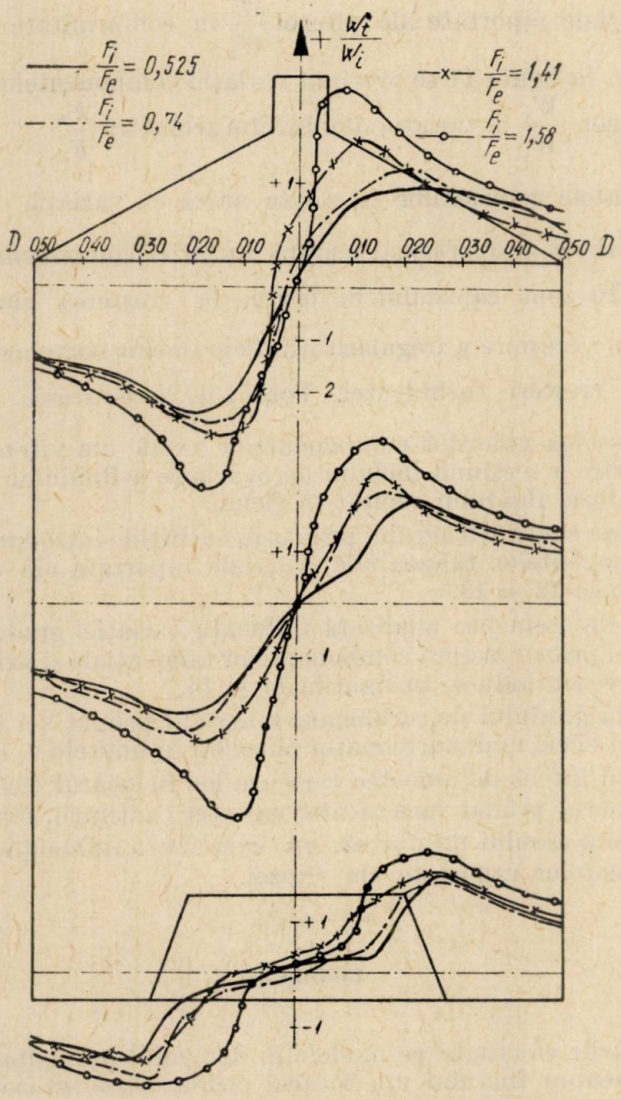


Fig. 10. — Variația componentelor tangențiale raportate ale vitezei $\frac{W_t}{W_i}$ la variația simplexului geometrie $\frac{F_i}{F_e}\left(\frac{d_e}{D} = 0,4\,;\ \frac{L}{D} = 1,4\,;\ \text{aer primar } 0\,\%\right)$.

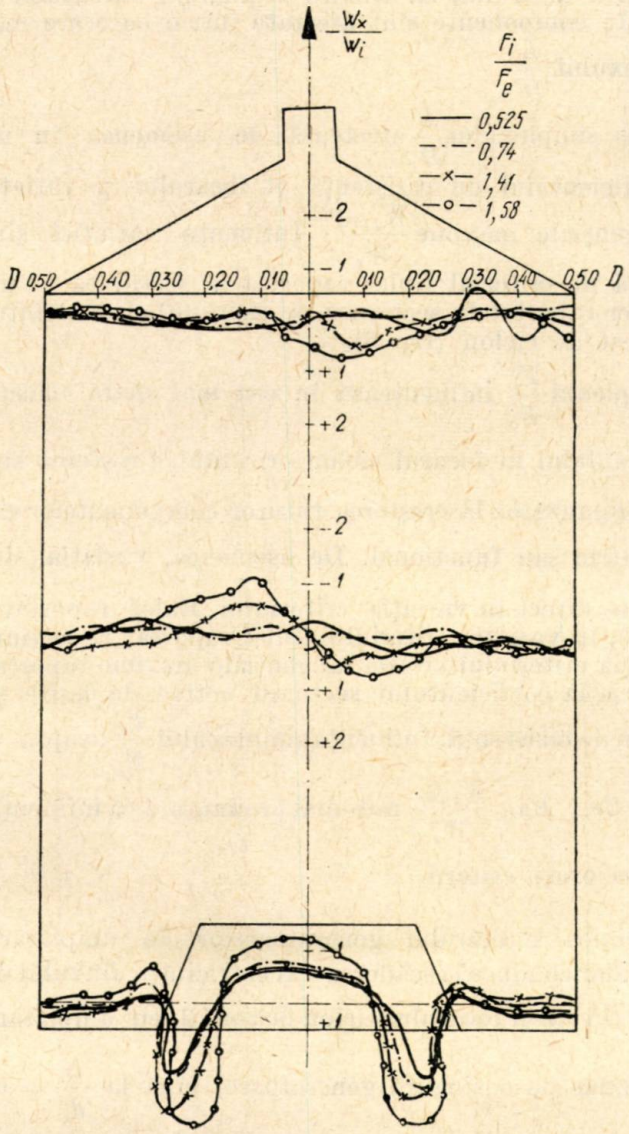


Fig. 11. — Variația componentelor axiale raportate ale vitezei $\frac{W_t}{W_i}$ la variația simplexului geometrie $\frac{F_i}{F_e}\left(\frac{d_e}{D} = 0{,}4\ ;\ \frac{L}{D} = 1{,}4\ ;\ \text{aer primar } 0\,\%\right)$.

zona centrală a focarului, ca urmare a lungimii curentului de circulaţie inversă, aceste componente sînt afectate într-o oarecare măsură de variaţia simplexului $\frac{L}{D}$.

Variaţia simplexului $\frac{L}{D}$ afectează de asemenea în mică măsură variaţia coeficientului de rezistenţă al focarului şi variaţia criteriului vitezei tangenţiale maxime $\frac{W_{t\max}}{W_i}$. Influenţa variaţiei simplexului $\frac{L}{D}$ este resimţită de criteriul Euler raportat la secţiunea de intrare (7), de criteriul Euler raportat la secţiunea de ieşire (8) şi de debitul raportat al aerului aspirat de ciclon (fig. 6).

— Simplexul $\frac{F_i}{F_e}$ influenţează în cea mai mare măsură structura circulaţiei fluidului în focarul ciclon orizontal. Creşterea simplexului $\frac{F_i}{F_e}$ conduce corespunzător la creşterea tuturor componentelor vitezei în orice regim geometric sau funcţional. De asemenea, variaţia simplexului $\frac{F_i}{F_e}$ este reflectată direct în variaţia criteriului Euler raportat la secţiunea de intrare (7), în variaţia criteriului Euler raportat la secţiunea de ieşire (8), în variaţia criteriului vitezei tangenţiale maxime raportate (9) şi, implicit, în variaţia coeficientului secţiunii active de ieşire şi în variaţia coeficientului de rezistenţă. Influenţa simplexului $\frac{F_i}{F_e}$ asupra criteriului de similitudine Eu_i, Eu_e, $\frac{W_{t\max}}{W_i}$ este mai pronunţată ca influenţa simplexului $\frac{L}{D}$ asupra aceloraşi criterii.

— Mărimea numărului generatoarelor de amplasarea ajutajelor aerului secundar conduce la scăderea excentricităţii fluxului din focar de la $\frac{\Delta_c}{d_e} = 0{,}075$ (în cazul focarului ciclon orizontal cu amplasarea ajutajelor de aer secundar pe o singură generatoare) pînă la $\frac{\Delta_c}{d_e} = 0{,}05$ (în cazul focarului ciclon orizontal cu amplasarea ajutajelor de aer secundar pe trei generatoare). Creşterea numărului generatoarelor de aer secundar conduce la scăderea posibilităţilor de aspiraţie ale focarului şi reducerea influenţei simplexului $\frac{L}{D}$ asupra acestora.

Variaţia numărului generatoarelor de amplasare a ajutajelor de aer secundar, deşi nu conduce la modificări radicale ale regimului de curgere

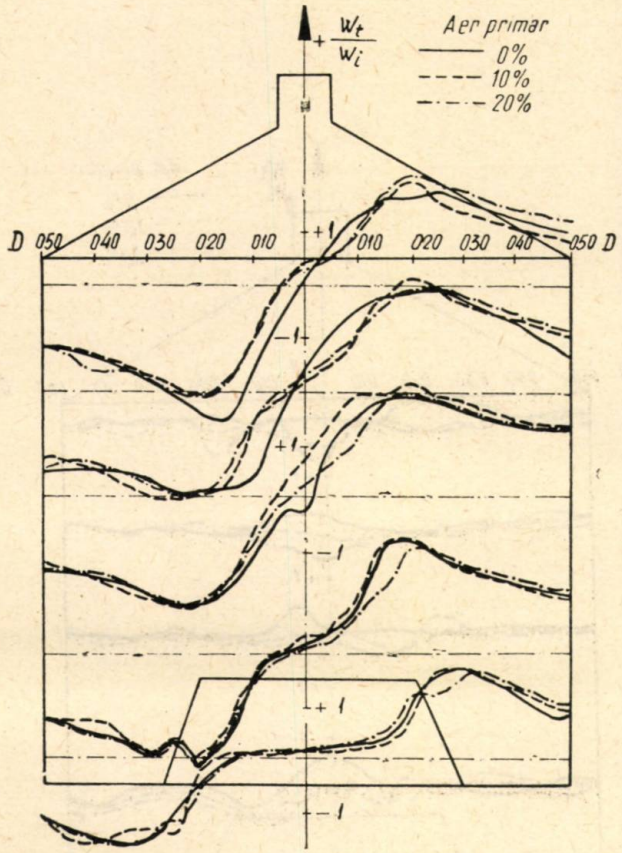


Fig. 12. — Variaţia componentelor tangenţiale raportate ale vitezei $\frac{W_t}{W_i}$ la variaţia cantităţii aerului primar (model de focar ciclon $\frac{L}{D} = 1$; $\frac{d_e}{D} = 0{,}4$; $\frac{F_i}{F_e} = 0{,}525$).

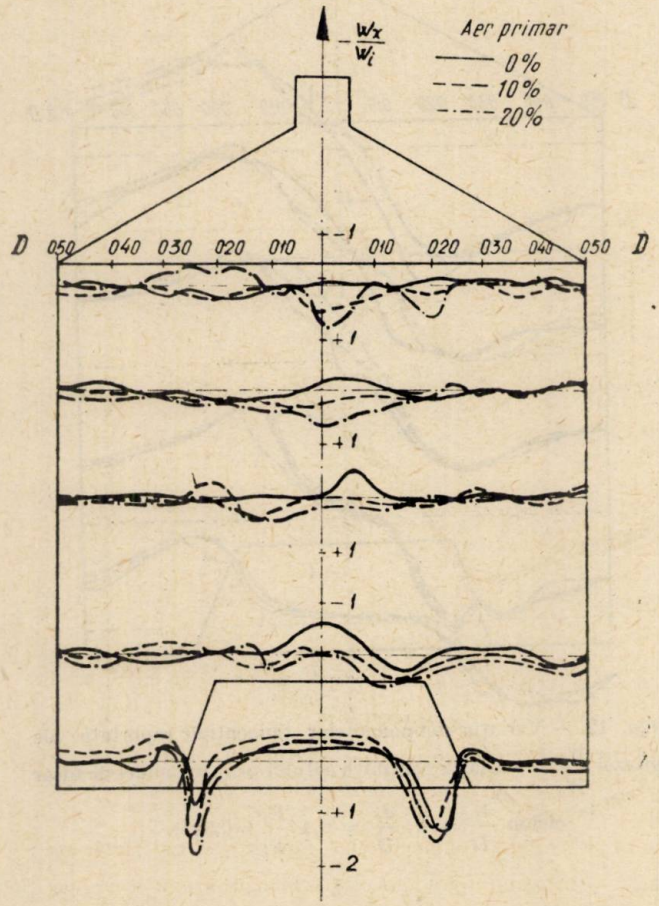


Fig. 13. — Variaţia componentelor axiale raportate ale vitezei $\frac{W_x}{W_i}$ la variaţia cantităţii aerului primar $\left(\frac{L}{D} = 1; \frac{d_e}{D} = 0{,}4; \frac{F_i}{F_e} = 0{,}525\right)$.

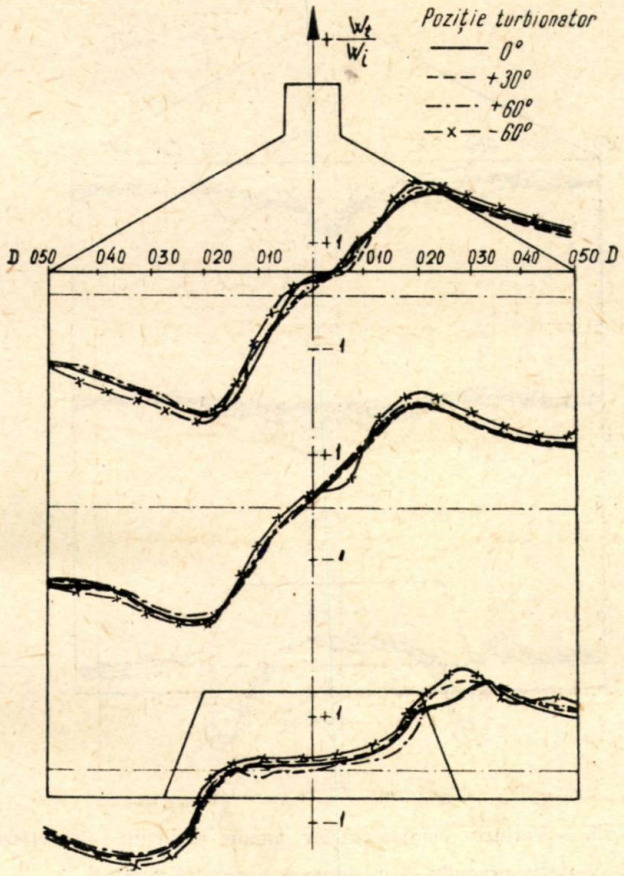


Fig. 14. — Variația componentelor tangențiale raportate ale vitezei $\frac{W_t}{W_i}$ la variația gradului de turbionare a aerului primar $\left(\frac{L}{D} = 1\,;\ \frac{d_e}{D} = 0{,}4\,;\ \frac{F_i}{F_e} = 0{,}525\right)$.

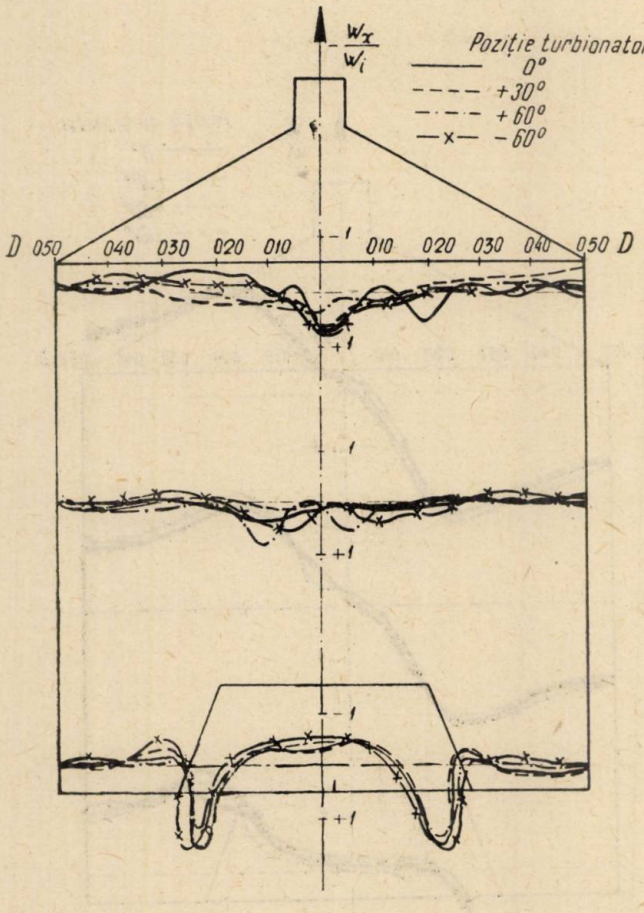


Fig. 15. — Variația componentelor axiale raportate ale vitezei $\frac{W_x}{W_i}$ la variația gradului de turbionare a aerului primar $\left(\frac{L}{D} = 1;\ \frac{d_e}{D} = 0{,}4;\ \frac{F_i}{F_e} = 0{,}525;\ \text{aer primar } 20\,\%\right)$.

din focarul izotermic monofazic (neinfluenţînd criteriile Eu_i, Eu_e, $\frac{W_{t\max}}{W_i}$, coeficientul secţiunii active de ieşire şi coeficientul de rezistenţă al focarului), are o mare importanţă asupra menţinerii stabile a suspensiei solide în focar şi asupra gradului de umplere al focarului.

— Variaţia unghiului de înclinare al capacului anterior între limitele 120 şi 180°, variaţia cantităţii aerului primar între limitele 0 şi 30% şi variaţia gradului de turbionare al aerului primar (realizat cu un turbionator elicoidal cu unghi variabil între −60 şi +60°) nu influenţează practic valoarea şi configuraţia spectrului vitezelor şi nici variaţia criteriilor de similitudine analizate. Variaţia cantităţii aerului primar şi a gradului său de turbionare este resimţită de configuraţia curentului central invers, care suferă modificări în sensul reducerii intensităţii şi lungimii zonei circulaţiei inverse. Totodată, variaţia gradului de turbionare al aerului primar contribuie la variaţia gradientului vitezei axiale pe rază.

— Relaţiile de calcul (7), (8), (9), (10) şi relaţiile grafice din figurile 6 şi 7 pot fi folosite cu succes la calculul modelelor experimentale de focare ciclon, iar completarea lor şi cu elemente de similitudine termică va permite folosirea lor şi la dimensionarea instalaţiilor industriale de focare ciclon orizontale.

Primit la redacţie la 10 mai 1964

BIBLIOGRAFIE

1. N. PĂNOIU, I. CARABOGDAN, G. SINGER, C. CRĂCIUNEANU, *Cercetări în domeniul arderii combustibililor solizi în focare ciclon.* St. cerc. energ., seria B, *2*, 277—285 (1963).
2. А.М. НАДЖАРОВ, *Основные конструктивные и расчетные характеристики горизонтальных циклонных камер.* Сб.: Исследование котельно-топочных процессов. Машгиз, Москва, 1958, 46—54.
3. Л.Л. КАЛИШЕВСКИЙ, *Структура потока и аэродинамические характеристики циклонной камеры при горении.* Сб: Исследование котельно-топочных процессов. Машгиз, Москва, 1958, 55—77.
4. А.Е. НАХАПЕТЯН, И.С. ИСАЕВ, *О некоторых особенностях циклонного потока несущего твердую взвесь.* Сб.: Исследование котельно-топочных процессов. Машгиз, Москва, 1958, 86—99.
5. Б.К. ЯКУБОВ, *Обобщение аэродинамических закономерностей циклонных камер.* Известия А.Н. Каз. ССР. Выпуск 12, Алма-Ата, 1957, 105—119.
6. G. A. ROBERTS, *The cyclone furnace.* B.C.U.R.A. Monthly Bull., **XXVII**, *1*, 1—34 (1964).
7. А.Е. НАХАПЕТЯН, *Исследование изотермического циклонного потока на модели топочной камеры.* Сб.: Вопросы аэродинамики и теплопередачи в котельно-топочных процессах. Госэнергоиздат, Москва-Ленинград, 150—165.
8. С. А. КОВБАСЮК, *К расчету сопротивления циклонов.* Известия высших учебных заведений. Энергетика, **1**, 1962, 85—92.

CICLURI MIXTE GAZ-ABUR CU REACŢII ENDOTERMICE

DE

I. CSERVENY şi D. GRECOV

621.165:621.438

În articol se analizează efectul introducerii unei reacţii endotermice în ciclurile mixte gaze-abur asupra randamentului instalaţiei. Asemenea cicluri sînt posibile numai dacă în turbina de gaze se destinde un agent de lucru combustibil, în exemplul prezentat un amestec de gaz de sinteze şi produse de ardere obţinute din gaz metan sub presiune.

Întrucît sporul relativ de randament care se obţine este de ordinul 6—8%, ciclurile discutate prezintă un interes deosebit pentru centralele termoelectrice cu combustibil gazos natural.

1. CONSIDERAŢII GENERALE ASUPRA CICLURILOR MIXTE

Cuplarea strînsă într-un ciclu mixt a două turbine, de gaz şi de abur, permite combinarea avantajelor oferite de cele două maşini şi realizarea unui ansamblu cu un randament mai ridicat decît al părţilor componente considerate separat.

În ciclurile mixte realizate sau propuse pînă în prezent se pot distinge grupe care au în comun acelaşi principiu de bază. Astfel, utilizarea gazelor evacuate din turbina de gaze (care dispune de un procentaj ridicat de oxigen) drept comburant într-un cazan de abur, ne conduce la grupa ciclurilor cu combustie suplimentară. Arderea sub presiune ridicată permite utilizarea camerei de ardere a turbinei de gaze şi în rolul de focar

al cazanului de abur dacă se prevăd suprafeţele de răcire corespunzătoare; în acest fel se ajunge la grupa ciclurilor reprezentate prin cazanul Velox.

În sfîrşit, cu ajutorul injecţiei de apă în camera de ardere a turbinei de gaze se ajunge la un ciclu în care există o singură turbină, care prelucrează un amestec format din gaze de ardere şi vapori de apă.

2. CICLURI MIXTE CU REACŢII ENDOTERMICE ÎNAINTEA TURBINEI DE GAZ

O particularitate comună a ciclurilor mixte clasice constă în faptul că înaintea turbinei de gaz au loc practic numai reacţii de ardere (şi eventual amestecarea cu apă, care se vaporizează, a gazelor de ardere). În mod obişnuit, arderea se face cu un exces ridicat de aer, pentru a menţine temperatura la intrarea în turbină în limite admisibile sau cu un exces de aer apropiat de unitate în cazul camerelor de ardere răcite, agentul de lucru

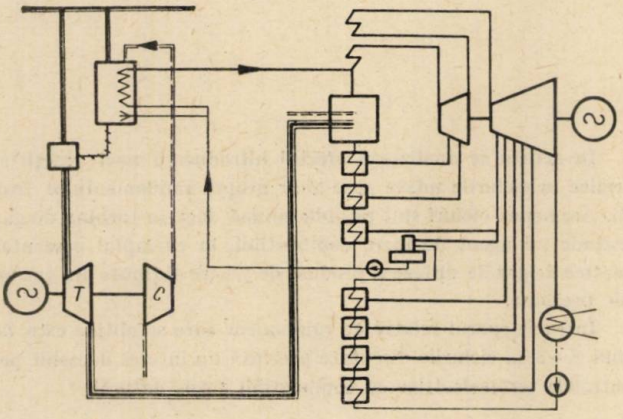


Fig. 1. — Ciclu mixt în care combustibilul este ars într-o cameră de ardere răcită şi este convertit parţial, folosind injecţie de apă şi amestecare cu produse de ardere. Agentul de lucru este ars după destindere în focarul cazanului de abur.

fiind un amestec de gaz de ardere şi aer.

Ciclurile mixte analizate în această lucrare se disting prin *existenţa unei reacţii endotermice* înaintea turbinei de gaz.

Introducerea în ciclu a unei reacţii endotermice are sens numai dacă entalpia de reacţie mărită (prin ea) a agentului de lucru poate fi recuperată integral prin arderea lui în focarul ciclului de bază. Deci în mod necesar *agentul de lucru* care trece prin turbina de gaze trebuie să fie *combustibil.*

Un exemplu de ciclu din această clasă este prezentat în figura 1. Schema permite realizarea reacţiei endotermice prin conversia combustibilului cu ajutorul injecţiei de apă într-o cameră de ardere (reactor) răcită

și arderea agentului de lucru (după destinderea în turbină) în focarul cazanului de abur.

Merită să fie subliniat faptul că *prin particularizări* (suprimarea unor elemente, precizare a proporției combustibil-aer-apă) se pot obține din figura 1 scheme tipice pentru oricare din cele trei grupe de *cicluri mixte „clasice"*. Acest grad ridicat de generalitate se explică prin apariția unui grad de libertate suplimentar, prin posibilitatea de a varia compoziția agentului de lucru.

3. CICLURI MIXTE PENTRU COMBUSTIBILI GAZOȘI NATURALI CU CONVERSIUNE PARȚIALĂ

Un caz particular important al clasei de cicluri cu reacții endotermice înaintea turbinei de gaz îl constituie schemele pentru cazul combustibililor gazoși naturali sub presiune.

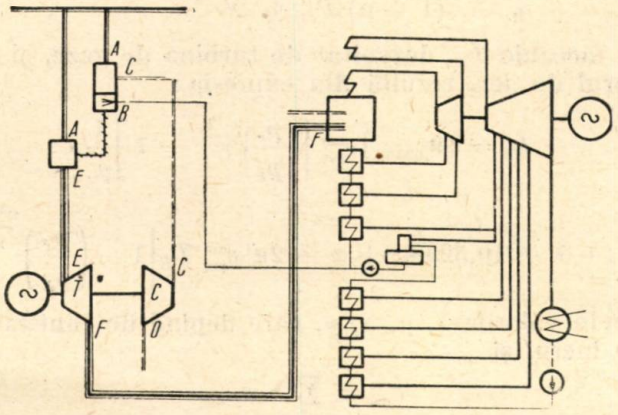


Fig. 2. — Ciclu mixt cu conversiune parțială a combustibilului gazos natural sub presiune.

În acest caz reacția endotermică poate fi :

$$C_n H_{2n+2} + n H_2O \rightleftarrows n CO + (2n + 1) H_2, \qquad (1)$$

cunoscută ca procedeu de fabricare a „gazului de sinteză" în industria petrochimică.

În general vom considera că din gazele naturale se prepară un agent de lucru prin injectarea de apă și amestecarea cu gaze de ardere ca în schema din figura 2.

Prin varierea proporției de gaze naturale-apă-aer necesară arderii, putem varia în limite foarte largi cantitatea agentului de lucru, compoziția lui și temperatura de intrare în turbină. Pentru a alege în mod rațional aceste mărimi importante pentru performanțele ciclului mixt, vom recurge în cele ce urmează la relații cantitative.

4. CALCULUL SCHEMEI PROPUSE

Din punctul de vedere al performanțelor ciclului mixt interesează în primul rînd randamentul global

$$\eta + \Delta\eta = \frac{L_T - L_c + L}{(1 + \mu) P_{ci}}, \tag{2}$$

unde randamentul ciclului de bază (de abur) este:

$$\eta = \frac{L}{Q_F} \tag{2'}$$

Pentru considerațiile din această comunicare este comod să se utilizeze sporul relativ de randament al ciclului mixt (prin comparție cu cel al ciclului de bază):

$$\frac{\Delta\eta}{\eta} = \frac{Q_F}{(1 + \mu) P_{ci}} \left(\frac{\Delta N}{N} + 1 \right) - 1. \tag{2''}$$

Lucrul mecanic L_T, dezvoltat de turbina de gaze, și L_c, consumat de compresorul de aer, rezultă din expresia:

$$L_c = [9_{,5238\mu}]\, c_{pm}^{\text{aer}} \left[\left(\frac{p_c}{p_0} \right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}} - 1 \right] \frac{1}{\mu_c}, \tag{3}$$

$$L = [1 + \lambda + 10{,}5238\mu + x + 2y]\, c_{pm}^{am}\, T_E \left[1 - \left(\frac{p_F}{p_E} \right)^{\frac{\varkappa^{am} - 1}{\varkappa^{am}}} \right] \eta_T, \tag{4}$$

în care intervin valorile λ, μ, x, y, care depind de cantitatea relativă a agentului de lucru, și

$$c_{pm}^{am} = \sum \nu_i\, c_{pmi},$$
$$\varkappa^{am} = \frac{\sum \nu_i\, c_{pmi}}{\sum \nu_i\, c_{vmi}}, \tag{5}$$

care presupune de asemenea cunoașterea compoziției agentului de lucru.

Din această cauză este necesar să se studieze dependența echilibrului unui amestec de metan, vapori de apă și gaze de ardere, de presiune și temperatură. Considerînd că la reacție iau parte 6 substanțe (CH_4, C, CO, CO_2, H_2O, H_2), formate din trei feluri de atomi (C, H, O), fenomenul de disociere poate fi descris prin $6 - 3 = 3$ reacții independente.

$$CH_4 \rightleftharpoons C + 2H_2 \tag{x}$$

$$CH_4 + H_2O \rightleftharpoons CO + 3H_2 \tag{y}$$

$$CO + H_2O \rightleftharpoons CO_2 + H_2 \tag{z}$$

unde x, y, z sînt numerele de moli care parcurg reacțiile corespunzătoare.

Proporția inițială (în moli) a componentelor care intră în sistemul de preparare a agentului de lucru este:

$$CH_4 \qquad [1]$$

$$H_2O \qquad [\lambda]$$

$$CO_2 + 2H_2O + 7{,}5238\ N_{2atm}[\mu]$$

iar compoziția finală la care se ajunge după stabilirea echilibrului:

CH_4	$[1 - x - y]$
H_2O	$[\lambda + 2\mu - y - z]$
H_2	$[2x + 3y + z]$
CO	$[y - z]$
CO_2	$[\mu + z]$
N_2atm	$[7_{,5238}\mu]$
C	$[x]$
Total	$[1 + \lambda + 10_{,5238}\mu + 2x + 2y]$.

Valoarea necunoscutelor x, y, z depinde de compoziția inițială a amestecului (λ, μ), de presiunea p și temperatura T la care au loc reacțiile conform sistemului de ecuații:

$$\begin{cases} \dfrac{K_1(T)}{p} = \dfrac{(2x+3y+z)^2}{(1-x-y)(1+\lambda+10{,}5238\mu+x+2y)}, \\ \dfrac{K_2(T)}{K_1^2(T)} = \dfrac{(y-z)(1-x-y)}{(\lambda+2\mu-y-z)(2x+3y+z)}, \\ K_3(T) = \dfrac{(\mu+z)(2x+3y+z)}{(y-z)(\lambda+2\mu-y-z)}. \end{cases} \tag{6}$$

Constantele de echilibru ale celor trei reacții se calculează folosind relația

$$R \ln K = -\frac{{}^\circ\mathfrak{H}_\delta}{T} + {}^\circ\mathfrak{S}_\delta + a\,\mathfrak{F}\left(\frac{T}{\vartheta}\right),$$

unde

$$\mathfrak{F}\left(\frac{T}{\vartheta}\right) = \ln\left(\frac{T}{\vartheta}\right) + \frac{\vartheta}{T} - 1,$$

$${}^\circ\mathfrak{H}_\delta = \Sigma\, \nu_i\, {}^\circ\mathfrak{H}_{\delta i},$$

$${}^\circ\mathfrak{S}_\delta = \Sigma\, \nu_i\, {}^\circ s_{\delta i},$$

$$a = \Sigma\, \nu_i\, c_{pm\,(T \div \delta)\,i}.$$

Compoziția agentului de lucru rezultă cunoscînd proporția de apă [λ] injectată (ea este impusă de condiția de a evita formarea carbonului solid) și calculînd debitul relativ de metan [μ] care trebuie ars pentru a

acoperi căldura de reacţie a conversiei parţiale şi a ridica temperatura amestecului format la temperatura T_E din bilanţul caloric

$$\mu P_{ci} - (x\,^{\circ}\mathfrak{H}_x + y\,^{\circ}\mathfrak{H}_y + z\,^{\circ}\mathfrak{H}_z) + [1+\mu]\,(i_A^{CH_4} - i_E^{CH_4}) + \\ + [\lambda]\,(i_B^{H_2O} - i_E^{H_2O}) + [9{,}_{5238\mu}]\,(i_C^{aer} - i_E^{aer}) = 0. \qquad (7)$$

Se remarcă faptul că în această relaţie intervin entalpiile de reacţie la temperatura de referinţă T_0 şi entalpiile numai ale substanţelor care intră în reacţie.

Acest mod de a scrie relaţia este avantajos, deoarece entalpiile de reacţie depind în cazul reacţiilor considerate foarte mult de temperatură

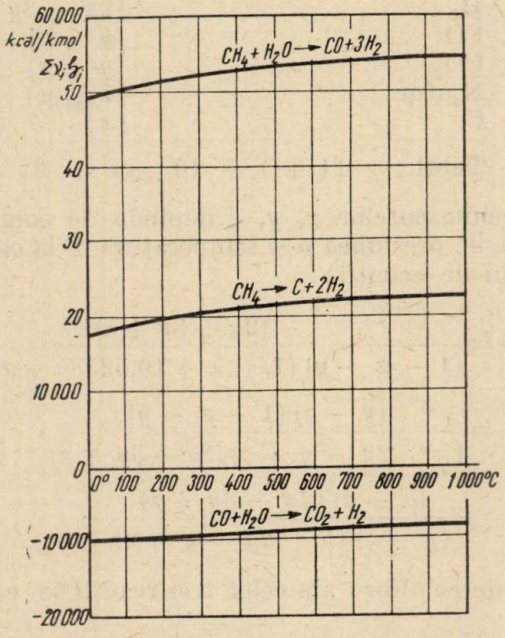


Fig. 3. — Dependenţa entalpiilor de reacţie de temperatură.

(de exemplu $\mathfrak{H}_x^{0^{\circ}C} = 17\,889^{kcal/kmol}$ $\mathfrak{H}_x^{1000^{\circ}C} = 22\,636^{kcal/kmol}$ ceea ce se poate observa şi în figura 3.

Pentru a determina entalpia i_c^{aer} a aerului la intrarea în camera de ardere este necesar să cunoaştem temperatura lui în acest punct

$$T_c = T_0\left\{1 + \left[\left(\frac{p_c}{p_0}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} - 1\right]\frac{1}{\eta_c}\right\}. \qquad (8)$$

În mod analog obţinem temperatura la ieşirea din turbină :

$$T_F = T_E\left\{1 - \left[1 - \left(\frac{p_F}{p_E}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right]\eta_T\right\}, \qquad (9)$$

care este necesară pentru calculul cantității de căldură Q_F pe care o poate dezvolta prin ardere agentul de lucru care părăsește turbina. Calculul acestei cantități de căldură poate fi efectuat fie însumînd entalpiile de reacție a gazelor combustibile din agentul de lucru și căldura lor fizică, fie, ceva mai simplu, cu relația

$$Q_F = P_{ci} + (x^{\circ}\mathfrak{H}_x + y^{\circ}\mathfrak{H}_y + z^{\circ}\mathfrak{H}_z) - [9{,}5238\,\mu]\,(i_F^{aer} - i_0^{aer}) + [1 + \\ + \mu]\,(i_F^{CO_2} - i_0^{CO_2}) + [2 + \lambda + 2\mu]\,(i_F^{H_2O} - i_0^{H_2O}) + [7{,}5238\,(1 + \mu)]\,(i_F^{N_2} - i_0^{N_2}). \tag{10}$$

Cu aceste elemente se poate trece la calculul

$$\frac{Q_F}{(1+\mu)\,P_{ci}} \text{ și } \frac{\Delta P}{P} = \frac{L_T - L_c}{\eta\, Q_F},$$

deci a sporului relativ de randament $\dfrac{\Delta\eta}{\eta}$

Pentru schema analizată, unde între partea de gaze și de abur există numai legătura strict necesară din punct de vedere funcțional, sporul relativ de randament este o funcție de

$$\frac{\Delta\eta}{\eta} = f\,(T_E,\ p_A,\ \lambda,\ \eta_T,\ \eta_c). \tag{11}$$

Dintre variabilele independente, randamentele mașinilor η_T și η_c este normal să fie alese cît mai mari, iar debitul de apă injectat λ trebuie să depășească o valoare minimă care garantează lipsa apariției particulelor solide de carbon, dar să nu atingă valori prea mari, fiindcă corespunde unei pierderi de apă epurată chimic. Presiunea combustibilului influențează în mod favorabil creșterea randamentului și trebuie să se tindă la valori ridicate ale lui p_A (la T_E ridicate), chiar dacă în acest scop ar fi necesară instalarea unui compresor.

Parametrul care prezintă însă cel mai mult interes este T_E, fiindcă cu el crește monoton entalpia de reacție a reacției endoterme de disociere care are loc înaintea turbinei (fig. 4). Explicitarea funcției $\dfrac{\Delta\eta}{\eta} = f(T_E, \ldots)$ în raport cu T_E nu este posibilă, datorită formei neliniare a ecuațiilor de echilibru (6). Pentru a obține date orientative asupra influenței temperaturii T_E au fost efectuate calcule numerice în ipoteza

$$p_A = 10 \text{ ata}, \quad \lambda = 1^{\text{kmol } H_2O/\text{kmol } CH_4}$$

$$p_B = p_c = 10 \text{ ata}, \quad p_F = p_0 = 1 \text{ ata}, \quad T_A = T_B = T_0 = 273\,^{\circ}\text{K}.$$

Dependenţa $\frac{\Delta\eta}{\eta}$ de T_E pentru acest caz particular a fost reprezentată grafic în figura 4, care scoate în evidenţă clar tendinţa de creştere

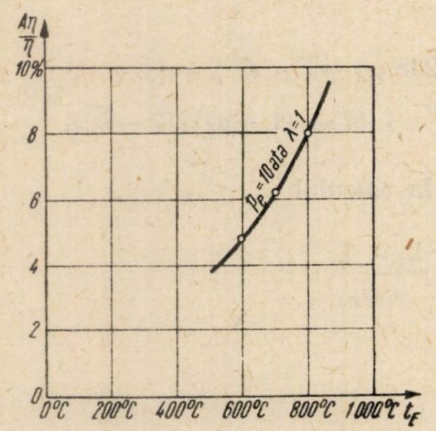


Fig. 4. — Dependenţa creşterii relative de randament $\frac{\Delta\eta}{\eta}$ de temperatura T_E.

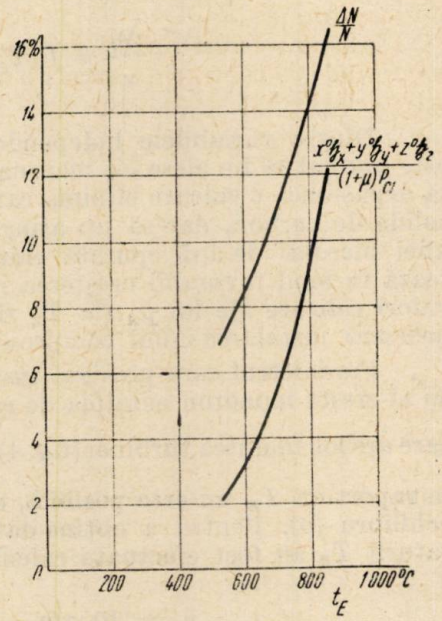


Fig. 5. — Dependenţa sporului relativ de putere $\frac{\Delta P}{P}$ şi a raportului între entalpia de reacţie teoretică a conversiunii gazului metan cu vapori de apă şi produse de ardere şi puterea calorifică inferioară a debitului de metan consumat de ciclu $\frac{x°\mathfrak{H}_x + y°\mathfrak{H}_y + z°\mathfrak{H}_z}{(1+\mu)P_{ci}}$ de temperatura T.

a randamentului cu temperatura, deci şi cu mărirea cantităţii de căldură consumată de reacţia endotermă de conversiune parţială.

O observație care credem că merită atenție se referă la valorile raportului dintre lucrul mecanic efectiv obținut de la ciclul de gaze și cel livrat de turbină

$$\frac{L_T - L_C}{L_T} \approx \frac{2}{3} \qquad T_E = 600° - 800°C,$$

raport aproximativ dublu în comparație cu ciclurile clasice de turbine de gaze.

5. CONCLUZII

Ciclurile mixte gaze-abur cu reacții endotermice înaintea turbinei de gaz au randamente mai bune decît ciclul de abur „de bază".

Sporul relativ de randament crește o dată cu mărirea cantității de căldură consumate de reacția endotermică, ceea ce coincide cu ridicarea temperaturii de intrare în turbina de gaze.

În cazul centralelor termoelectrice care consumă combustibil gazos natural, introducerea procesului de conversie parțială permite obținerea unui agent de lucru combustibil care poate fi trecut prin turbina de gaze și la temperaturi ridicate fără a provoca eroziuni sau obturări.

Sporul relativ de randament aer valori ridicate (4,8÷8,0%) ($p_E = 10$ ata, $t_a = 600 - 800°C$) care justifică propunerea de a realiza C.T.E. cu ciclurile prezentate.

Clasa de cicluri mixte cu reacții endotermice înaintea turbinei de gaz cuprinde în calitate de cazuri particulare cîteva cazuri tipice de cicluri mixte „clasice".

Primit la redacție la 10 mai 1964

NOTAȚII

a kcal/kmol	— coeficient de corecție funcție de căldurile specifice ale substanțelor care iau parte la reacție;
c_p kcal/kmol	— căldură specifică la presiune constantă;
${}^0h$ kcal/kmol	— entalpie teoretică de formare;
i kcal/kmol	— entalpie;
p k_p/cm^2	— presiune;
${}^0s$ kcal/kmol grad	— entropie teoretică de formare;
x	— numărul de moli care parcurg reacția de disociere a metanului;
y	— numărul de moli care parcurg reacția de conversiune a metanului;
z	— numărul de moli care parcurg reacția de conversiune a oxidului de carbon;
η	— randament;
ϑ °K	— temperatură de referință;

λ kmolH_2O/kmol CH_4	— proporţie de apă injectată ;
μ kmol prod. ardere/ /kmol CH_4	— proporţie de produse de ardere ;
ν kmol	— numărul de moli (mărime algebrică) ;
K	— constantă de echilibru ;
L kcal/kmol CH_4	— lucru mecanic ;
P kW	— putere ;
P_{ci} kcal/kmol	— putere calorifică inferioară ;
Q kcal/kmol CH_4	— cantitate de căldură ;
T °K	— temperatură absolută ;
°$\mathfrak{H}$ kcal/kmol grad	— entalpie de reacţie teoretică ;
°$\mathfrak{S}$ kcal/kmol grad	— entropie de reacţie teoretică.

INDICI

c	— compresor ;
i	— indice de însumare ;
t	— turbină ;
o	— starea mediului ;
$x\ y\ z$	— reacţie corespunzătoare ;
$A\ B\ C\ D\ E\ F$	— puncte în schema figurii 2.

CIFRA CARACTERISTICĂ A SARCINII TERMICE LA MOTOARELE CU APRINDERE PRIN COMPRESIUNE SUPRAALIMENTATE

DE

CĂLIN ADRIAN VASILESCU și VICTOR PIMSNER

621.43.016

În lucrare se introduce parametrul cifră caracteristică a sarcinii termice Φ, definită pentru motoarele supraalimentate de relația 10 și figurat în funcție de turația specifică în figura 1. Se indică folosirea acestei mărimi pentru analiza parametrilor principali ai motoarelor supraalimentate.

O dată cu mărirea presiunii de admisie la motoarele cu aprindere prin compresiune cresc solicitările termice ale pereților camerei de ardere, care pot fi prohibitive pentru funcționarea mașinii, și de aceea cunoașterea limitei pînă la care se poate împinge încărcarea termică a motorului este importantă. Această limită poate fi determinată prin studierea unor motoare deja realizate și care funcționează corect.

În lucrarea de față se propune o cifră caracteristică, care indică sarcina termică a motorului și, pe bază de exemple, se analizează cum variază valoarea acestui parametru în funcție de turația specifică. În continuare se folosește dependența stabilită între cifra caracteristică a sarcinii termice și turația specifică, pentru a deduce o metodă de precizare a legăturii dintre dimensiunile fundamentale, viteza și presiunea medie a motorului cu aprindere prin compresiune supraalimentat.

1. Mărirea puterii litrice a motorului este limitată din punctul de vedere al solicitărilor termice, de temperatura pereților cilindrului, care nu trebuie să depășească limita temperaturii arderii uleiului și a asigurării jocurilor normale de funcționare ale motorului. Temperatura feței interioare a peretelui camerei de ardere depinde de cantitatea de căldură Q

 ST. CERC. ENERG. ELECTR. TOM. 14 Nr. 3 p. 639 – 652 BUCUREȘTI 1964

transmisă în timpul τ (necesar pentru producerea unui ciclu) pe unitatea de suprafaţă

$$\frac{Q}{F} = \int_0^\tau \alpha_g (T - T_p)\, \mathrm{d}\tau, \tag{1}$$

unde F [m^2] este suprafaţa totală (medie) prin care se schimbă căldura, $\alpha_g \left[\frac{\text{k cal}}{\text{m}^2\,\text{h grd}}\right]$ coeficientul de convecţie de la gaze la perete, T[°K] temperatura gazelor din cilindru şi T_p[°K] temperatura pereţilor cilindrului, considerată constantă.

Punîndu-se condiţia ca temperatura peretelui să nu întreacă o anumită valoare şi la limită să fie egală cu aceasta, deci T_p = const., se poate scrie

$$\frac{Q}{F} = \int_0^\tau \alpha_g\, T \left(1 - \frac{T_p}{T}\right) \mathrm{d}\tau. \tag{2}$$

Pentru coeficientul de convecţie α_g se poate obţine o relaţie pornind de la ecuaţia generală a coeficientului de convecţie în curgere turbulentă

$$\mathfrak{N}_u = \text{const.}\ \mathfrak{R}_e^{\,n}, \tag{3}$$

care poate fi adus la forma [1]

$$\alpha_g = \text{const.}\ \frac{p^{0,7}\, w_m^{0,7}}{T^{0,3}\, D^{0,3}}. \tag{4}$$

Se înlocuieşte (4) în relaţia (2) şi se obţine

$$\frac{Q}{F} = K_1 \int_0^\tau \frac{p^{0,7}\, w_m^{0,7}\, T^{0,7}}{D^{0,3}} \left(1 - \frac{T_p}{T}\right) \mathrm{d}\tau. \tag{5}$$

Din ecuaţia gazelor perfecte $pV = MRT$ se poate înlocui temperatura şi, ţinînd seama că $V = V_s f(\theta)$, unde V_s este cilindreea unui cilindru şi $f(\theta)$ o funcţie de unghiul de rotaţie al arborelui cotit, se ajunge la relaţia :

$$\frac{Q}{F} = K_2 \int_0^\tau \frac{p^{1,4}\, w_m^{0,7}\, V_s^{0,7}}{D^{0,3}\, M^{0,7}} \left(1 - \frac{T_p}{T}\right) \mathrm{d}\tau. \tag{6}$$

După cum se ştie, temperatura medie a gazelor de ardere se modifică relativ puţin de la un motor la altul şi o dată cu varierea gradului de supraalimentare, aceasta deoarece prin varierea coeficientului excesului de aer, a raportului volumetric de compresiune şi a avansului la injecţie se corectează tocmai creşterea prea mare de temperatură şi de presiune ce s-ar putea produce. Ca urmare, raportul expresiei $1 - \frac{T_p}{T}$ poate fi considerat constant pe un ciclu într-o primă aproximaţie.

Se integrează expresia (6) şi se obţine (presupunîndu-se cantitatea de substanţă M constantă)

$$\frac{Q}{F} = K_3 \frac{p_e^{1,4}\, w_m^{0,7}\, V_s^{0,7}}{D^{0,3}\, M^{0,7}}. \tag{7}$$

Fără a se face o eroare prea mare, se poate scrie

$$\frac{V_s}{M} = \frac{RT_s}{p_s},$$

unde T_s şi p_s reprezintă temperatura şi, respectiv, presiunea aerului de supraalimentare; înlocuindu-se această valoare în (7), se obţine:

$$\frac{Q}{F} = K_4 \frac{p_e^{1,4}\, w_m^{0,7}\, T_s^{0,7}}{D^{0,3}\, p_s^{0,7}}. \tag{8}$$

Dacă se ţine seama că presiunea medie este aproximativ proporţională cu densitatea aerului, relaţia (8) poate fi scrisă:

$$\frac{Q}{F} = K_5 \frac{p_s^{0,7}\, w_m^{0,7}}{T_s^{0,7}\, D^{0,3}}. \tag{9}$$

Între temperatură şi presiune pe evoluţia de comprimare în compresor se scrie relaţia $T_s = T_0 \left(\frac{p_s}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}}$, care, introdusă în (9) şi luînd pe $k \cong 1{,}2$ pentru a ţine seama de răcirea aerului după compresor, permite obţinerea cifrei caracteristice a sarcinii termice

$$\Phi = \frac{p_s^{0,6}\, w_m^{0,7}}{D^{0,3}}, \tag{10}$$

expresie în care, în afară de $p_s \left[\frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2}\right]$, presiunea de supraalimentare, s-a introdus $w_m \left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right]$, viteza medie, şi D [dm], diametrul cilindrului. Această mărime este proporţională cu cantitatea de căldură schimbată pe unitatea de suprafaţă în timpul unui ciclu.

2. Se analizează în continuare modul în care variază cifra caracteristică a sarcinii termice. S-au cercetat circa 25 de motoare în 4 timpi, de mărimi şi utilizări foarte diferite, numărul acestora fiind limitat numai de posibilitatea de a cunoaşte din literatură toate datele necesare calculelor. Parametrii lor importanţi sînt redaţi în tabela 1 şi reprezentarea datelor în funcţie de turaţia specifică $n_s = n P_1^{\frac{1}{2}}$ s-a făcut în figura 1. În expresia turaţiei specifice intervine turaţia $n \left[\frac{\text{rot}}{\text{min}}\right]$ şi puterea uni-

Tabela 1

Parametrii importanți ai unor motoare Diesel supraalimentate

Nr. crt.	Fabrica constructoare	Tip motor	Referință	D dm	S dm	n rot/min	W_m m/a	p_3 kgf/cm²	P_e CP	număr cilindri	P_1 C/M^2 cilindru	Φ	n_s	P_f
1	(U.R.S.S.)	SMD	2	1,20	1,40	1 600	7,46	1,3	88	4	22	4,48	$7,36.10^3$	19,65
2	Motorenwerk MWM	T2H5518BI2	3	1,40	1,80	1 500	9,00	1,7	504	12	42	5,80	$9,70.10^3$	27,00
3	Daimler Benz	MB 846 Bc	3	1,50	1,90	1 600	10,10	1,6	348	6	58	5,96	$12,25.10^3$	33,10
4	M A N	RV 24/32	4	2,40	3,00	900	9,00	2,7	1 440	6	240	6,44	$14,00.10^3$	53,15
5	M A N	L12V18/21	3	1,80	2,10	1 500	10,50	1,8	1 200	12	100	6,16	$15,00.10^3$	39,30
6	ALCO	539—T—6,8	4	3,17	3,30	740	8,15	1,3		6,8	165	3,69	$9,55.10^3$	21,10
7	ALCO	244—6,12,16	4	2,28	2,67	1 000	8,90	1,9		6 ;12 ;16	150	5,31	$12,30.10^3$	36,80
8	ALCO	251—8,12,16	4	2,28	2,67	1 000	8,90	2,5		8 ;12 ;16	165	6,26	$12,90.10^3$	40,40
9	Sulzer	LDA—22	4	2,20	2,90	950	9,20	1,6		6 ;8	120	4,96	$10,45.10^3$	31,60
10	Werkspoor	RUB—215	4	2,15	2,60	1 150	10,00	1,5		6—20	115	5,18	$12,30.10^3$	31,70
11	Maybach	MD 435	4	1,85	2,00	1 360	9,10	1,8	747	8	93	5,55	$13,10,10^3$	34,60
12	Maybach	MD 440	4	1,85	2,00	1 500	10,00	1,8	1 000	8	125	5,93	$16,80.10^3$	46,50
13	Maybach	GTO6A	3	1,60	2,00	1 500	10,00	1,5	800	12	66	5,66	$12,30.10^3$	33,30
14	Daimler-Benz	MB820Db	4	1,75	2,05	1 500	10,25	1,8	1 350	12	112	6,10	$15,90.10^3$	46,60
15	Daimler-Benz	MB839Db	4	1,90	2,30	1 500	11,50	2,0	2 350	16	148	6,89	$18,30.10^3$	53,40
16	Daimler-Benz	MB835 Db	3	1,90	2,30	1 500	11,50	1,9	1 400	12	116	6,76	$16,20.10^3$	41,10
17	—	M 6V4D/96	—	4,00	4,60	522	8,00	1,6	2 000	6	333	3,82	$9,55.10^3$	26,52
18	—	D 50	—	3,18	3,30	740	8,15	1,2	900	6	150	3,52	$9,10.10^3$	18,80
19	General Motors	12—998	4	2,22	2,67	850	7,55	2,5	2 100	12	175	5,60	$11,20.10^3$	45,20
20	Nordberg	FHD—1116 HSC	4	2,80	3,05	900	9,15	2,8	2 250	10	225	6,39	$13,50.10^3$	36,60
21	MAN	LV—17,5/4	—	1,75	2,10	1 500	10,50	1,7	1 000	12	83	6,04	$13,70.10^3$	34,50
22	Verkspoor	RHB—1612	—	1,60	2,00	1 400	9,35	1,4	650	12	54	5,95	$10,30.10^3$	26,90
23	SACM	VI25HR	—	1,75	1,80	1 500	9,00	1,6	925	12	77	5,31	$13,20.10^3$	32,15

tară la regimul nominal $P_1 \left[\frac{\text{C.P}}{\text{cilindru}}\right]$. Se constată că punctele reprezentînd diferitele motoare se grupează într-un domeniu în care cifra caracteristică a sarcinii termice este $\Phi = 3{,}5 \div 7$, iar turația specifică

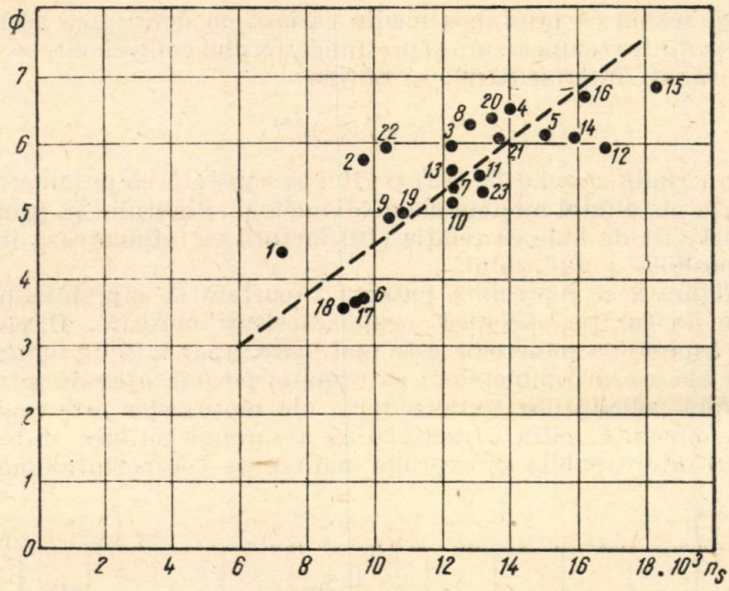


Fig. 1. — Variația cifrei caracteristice a solicitărilor termice Φ cu turația specifică n_s.

$n_s = 6{,}5 \cdot 10^3 - 16{,}5 \cdot 10^3$. Gruparea punctelor este destul de bună, aproximarea așezării lor putîndu-se face după dreapta

$$\Phi = 0{,}375 \cdot 10^{-3}\, n_s + b. \qquad (11)$$

În relația (11), factorul b variază între 0 și 1,7, putîndu-se lua valoarea medie $b = 0{,}8$ (cu care s-a trasat dreapta punctată în fig. 1). Se constată că unele din motoarele analizate au aproximativ aceeași valoare a turației specifice n_s, dar valori diferite ale cifrei caracteristice a sarcinii termice. Un exemplu corespunde cazurilor 3,13 și 10, la care turația specifică este $n_s \cong 12{,}3 \cdot 10^3$, iar cifra caracteristică a sarcinii termice variază între $\Phi = 5{,}96$ și 5,18. Viteza medie, raportul dintre cursă și diametru, și presiunea de supraalimentare sînt aproximativ constante. Diametrul, în schimb, variază și cifra caracteristică la sarcinii termice scade dacă diametrul crește.

În mod obișnuit, încărcarea termică a unui motor se apreciază prin cifra caracteristică : puterea raportată la suprafața pistonului

$$P_f = \frac{P_1}{\frac{\pi D^2}{4}} \left[\frac{\text{C.P}}{\text{dm}^2}\right].$$

Expresia puterii raportată la suprafaţa pistonului poate fi scrisă

$$P_f = \frac{1}{30} w_p p_e ;$$

sau, ţinînd seama că presiunea medie variază cu densitatea aerului şi de dependenţa dintre temperatura şi presiunea aerului comprimat, cu $\varkappa = 1{,}20$ (în cazul răcirii intermediare), se obţine

$$P_f = a'' w_m p_s^{0,85} . \tag{12}$$

Comparîndu-se relaţiile (12) şi (10), se constată că puterea raportată la suprafaţa pistonului nu depinde de diametrul cilindrului şi, prin urmare, nu exprimă atît de bine ca relaţia (10) factorii ce influenţează încărcarea termică posibilă a motorului.

În figura 2 se reprezintă puterea raportată la suprafaţa pistonului în funcţie de turaţia specifică pentru aceleaşi motoare. După cum se observă, răspîndirea punctelor este mai mare, apar faţă de figura 1 unele inversiuni ale aşezării punctelor; ca urmare, posibilitatea de a trage concluzii asupra solicitărilor termice reale ale motoarelor este mai redusă.

În consecinţă, cifra caracteristică a sarcinii termice stabilită prin relaţia (10) este capabilă să exprime mai corect comportarea motoarelor.

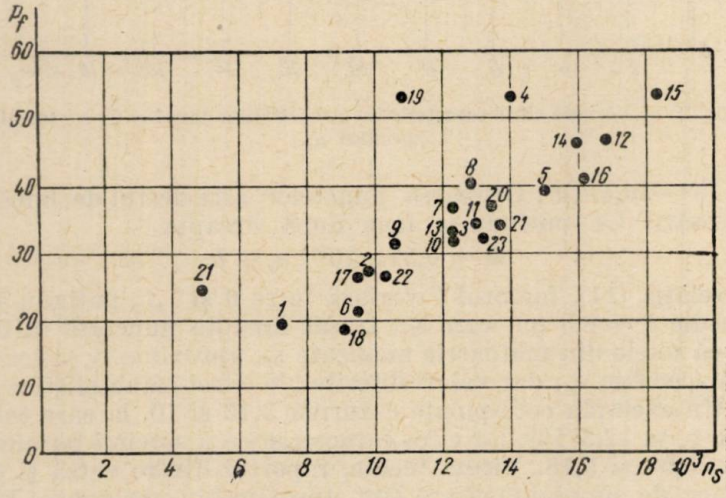


Fig. 2. — Variaţia puterii raportate la suprafaţa pistonului P_f cu turaţia specifică n_s.

3. Se explicitează în continuare factorii care compun cifrele caracteristice ale ecuaţiei (11). Astfel, turaţia specifică poate fi scrisă

$$n_s = n P_1^{\frac{1}{2}} = 154{,}5 \quad w_m^{1,5} \frac{1}{\psi} p_e^{0,5} . \tag{13}$$

Expresia de mai sus, introdusă în relația (11), conduce în final, împreună cu relația (10), la valoarea presiunii medii efective

$$p_e = \left[\frac{\psi}{0{,}058 \cdot w_m^{1,5}} \left(\frac{p_s^{0,6}\, w_m^{0,7}}{D^{0,3}} - b \right) \right]^2 . \qquad (14)$$

Relația (14), rezultatul studiului efectuat mai sus asupra motoarelor realizate, permite analiza parametrilor principali ai unui motor nou, ținîndu-se seama de experiența existentă astăzi. Astfel, dacă se cunoaște puterea unitară P_1 și turația unui motor nou n, este necesar să se stabilească în primul rînd valori pentru : raportul dintre cursă și diametru ψ, diametrul cilindrului D, viteza medie w_m, presiunea de supraalimentare p_s și presiunea medie efectivă p_e. Pentru aceasta se utilizează relațiile cunoscute :

$$P_1 = \frac{\pi D^2}{4} S \frac{p_e n}{900} ;$$

$$w_m = \frac{Sn}{30},$$

$$\psi = \frac{S}{D},$$

din care, prin cîteva transformări, se obțin relațiile

$$D = \frac{30 w_m}{\psi n} \qquad (15)$$

și

$$p_e = \frac{3\,600\, P_1}{\pi D^3 \psi n}. \qquad (16)$$

Pentru mărimile P_1 și n date și diferite valori alese pentru ψ și w_m se pot figura, prin relațiile (15) și (16), curbe de w_m=const. în cîmpul diagramei $\psi - p_e$ (fig. 3, curbele continue). Aceste curbe reprezintă dependența necesară între mărimile studiate. Dîndu-se aceleași valori parametrilor w_m și ψ, din ecuația (14) se poate determina valoarea presiunii medii p_e corespunzătoare motoarelor realizate. În această ecuație, termenul b va fi luat, după cum s-a arătat, între 0 și 1,7, iar presiunea de supraalimentare p_s valoarea optimă ce realizează o anumită presiune medie. Cu ajutorul acestor valori se trasează în aceeași diagramă (fig. 3, curbele punctate) dependența dintre valoarea presiunii medii efective p_e realizată la diferite motoare și raportul dintre cursă și diametru ψ. Intersecția curbelor presiunilor medii realizate și necesare (pentru aceleași valori ale vitezei medii) dau puncte de funcționare posibilă, curba ce unește aceste puncte (curba a, fig. 3) reprezentînd variația posibilă a presiunii medii în funcție de raportul dintre cursă și diametru. Nu înseamnă însă că printre construcțiile de motoare existente și a căror experiență se urmărește prin această metodă de apreciere există exemplare care se pot înscrie pe toată

curba *a* din figura 3. Ca urmare este necesar să se aleagă valorile care se apropie de cîmpul motoarelor realizate.

În continuare se procedează astfel. Se alege, spre exemplu, o valoare a vitezei medii, obţinîndu-se punctul *a* pe figura 3, din care se deduce valoarea factorului ψ şi a presiunii medii p_e. Această presiune medie este indicativă. Ea depinde de valoarea presiunii de supraalimentare şi poate fi crescută prin mărirea acesteia, cu condiţia să nu se depăşească sarcinile termice admisibile. Determinarea presiunii de supraalimentare (într-o primă aproximaţie) se face — spre exemplu punctul *A*, figura 4 — după datele ecuaţiei (14) sau după valorile limitative înscrise în tabela 2 din paragraful 4 al acestei lucrări. Se recalculează, pentru mărimile D, S şi p_e obţinute, valoarea puterii unitare P_1 şi eventual, dacă este nevoie, se măreşte presiunea de supraalimentare pentru a obţine o valoare mărită a presiunii medii p_e (punctul *B*, fig. 4). Este necesar să se verifice dacă valoarea mărită a presiunii medii satisface încărcarea termică uzuală a motoarelor. Aceasta se verifică rezolvînd ecuaţia (14) pentru w_m, ψ şi p_s dat. În figura 5 s-a trasat, conform acestei ecuaţii, curba *x* pentru $b = 0$, curba *y* pentru $b = 0{,}8$ şi curba *z* pentru $b = 1{,}7$. Curbele *u* şi *u'* reprezintă valori limitative care se calculează conform celor ce se prezintă în paragraful 4 al acestei lucrări. Domeniul haşurat reprezintă domeniul posibil în care se înscrie punctul B, ceea ce justifică mărirea presiunii de supraalimentare. O ultimă verificare constă în calcularea, pentru mărimile determinate, a cifrelor caracteristice n_s şi Φ şi aşezarea acestei valori în diagrama 1, pentru a se vedea cum se situează faţă de motoarele deja realizate.

4. În scopul uşurării acestei analize, efectuată după metoda expusă la paragraful 3, s-au calculat diagrame de variaţie a presiunii medii p_e în funcţie de diametrul D pentru diferite valori ale presiunii medii de supraalimentare $\left(p_s = 1{,}2\,;\ 1{,}8\,\frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2}\right)$, parametrul raportului dintre cursă şi diametru ($\psi = 1{,}0 - 1{,}5$). S-au trasat patru diagrame pentru valorile uzuale ale vitezei medii: $w_m = 8\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ (fig. 6), $w_m = 9\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ (fig. 7), $w_m = 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ (fig. 8), $w_m = 11\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ (fig. 9).

Diagramele au fost desenate pentru valoarea factorului constant din ecuaţia (14) $b = 0{,}8$.

În fiecare diagramă sînt două curbe limitative ale valorii presiunii medii. Valoarea superioară este determinată de posibilitatea practică de a atinge o anumită presiune medie efectivă. Notîndu-se $p'_e\ \left[\frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2}\right]$, presiunea medie efectivă a motorului nesupraalimentat se poate scrie

$$p_e = \frac{\rho}{\rho'}\,p'_e, \tag{20}$$

unde $\rho\ \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right]$ este masa specifică a aerului comprimat şi $\rho'\ \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right]$ masa

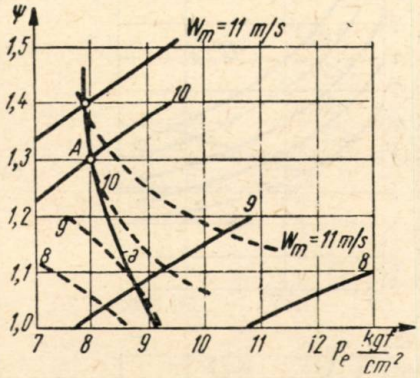


Fig. 3. — Variaţia raportului dintre cursă şi diametru ψ cu presiunea medie efectivă p_e, viteza medie w_m parametru; linii continue — valori necesare; linii punctate — valori realizate; curba a — curba punctelor de funcţionare posibile.

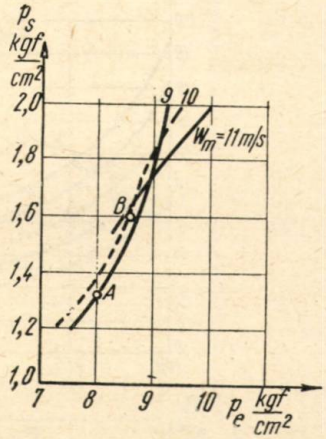


Fig. 4. — Variaţia presiunii de supraalimentare p_s, cu presiunea medie efectivă p_e, viteza medie w_m parametru.

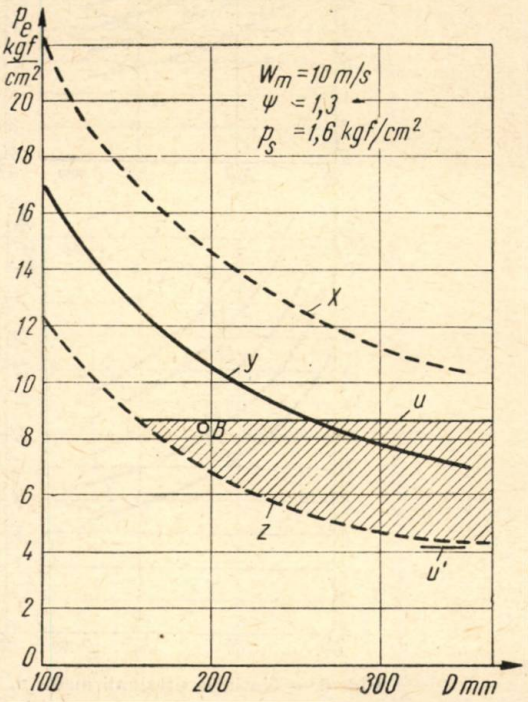


Fig. 5. — Valori realizate pentru presiunea medie efectivă p_e în funcţie de diametrul cilindrului D.

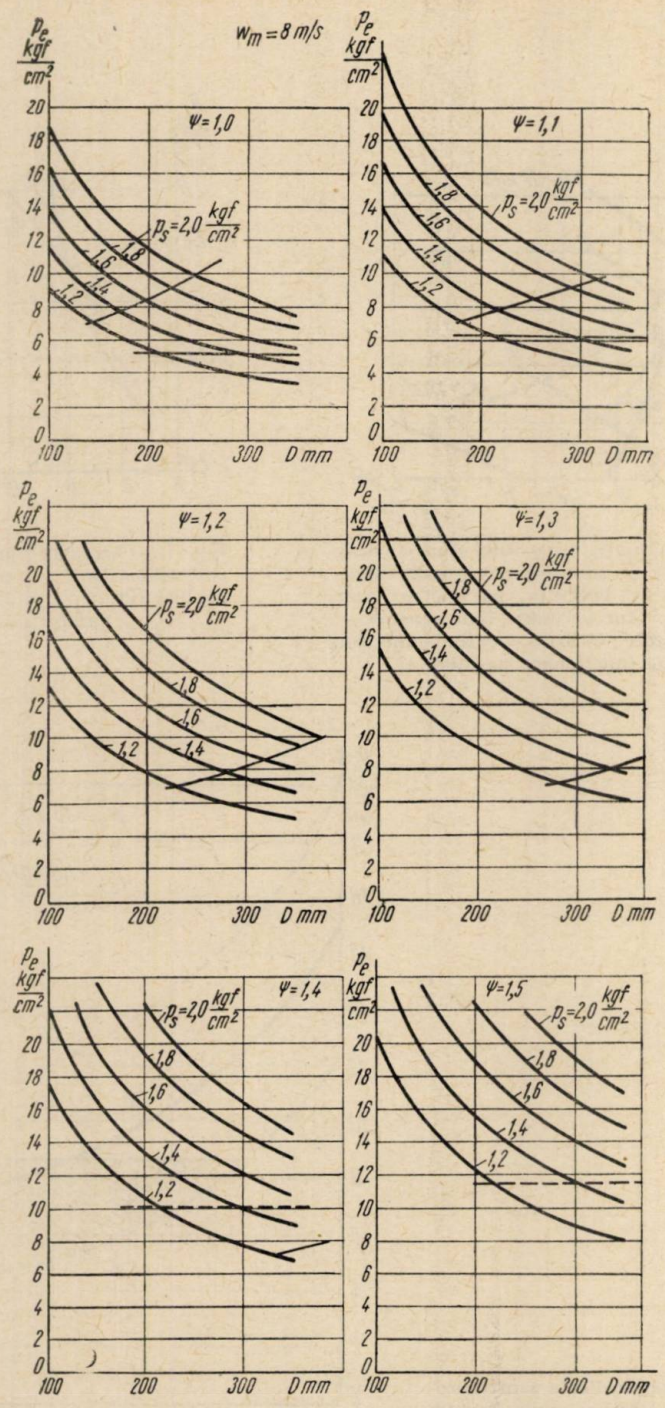


Fig. 6. — Variația presiunii medii p_e cu diametrul cilindrului D pentru viteza medie a pistonului $w_m = 8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Parametri: raportul dintre cursă și diametru ψ și presiunea de supraalimentare p_s.

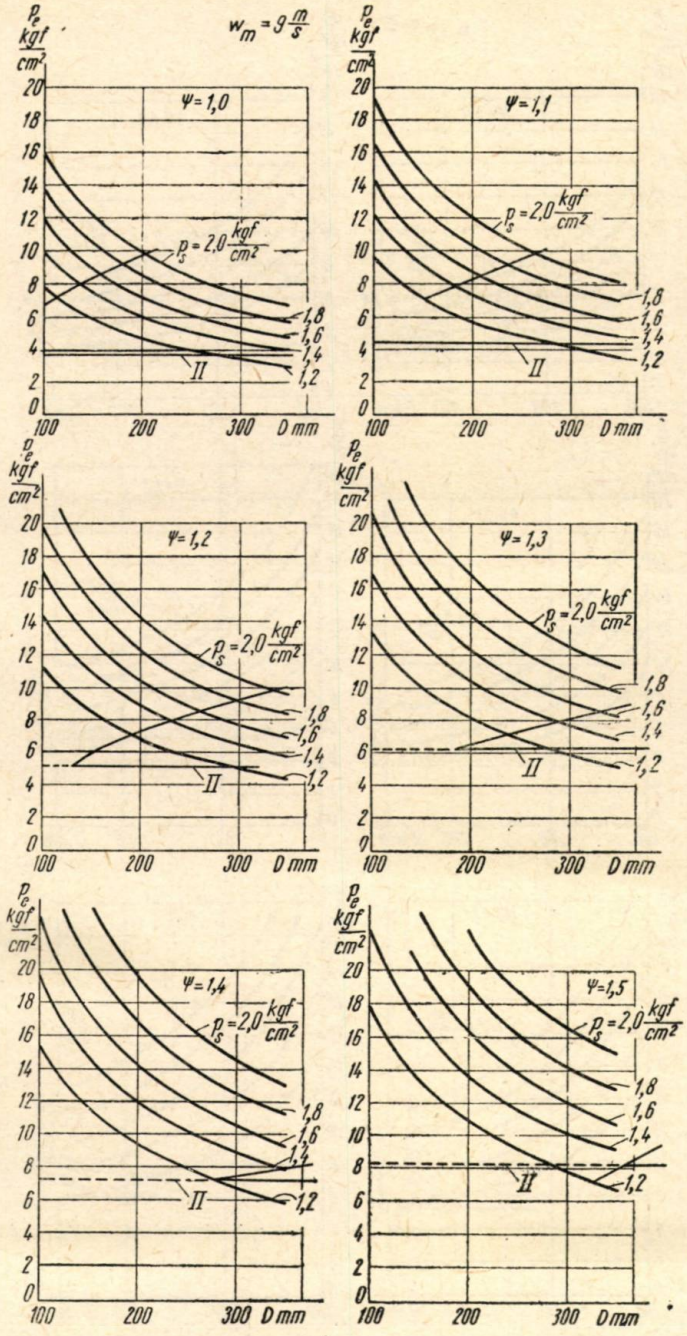


Fig. 7. — Variația presiunii medii p_e cu diametrul cilindrului D, pentru viteza medie a pistonului $w_m = 9\frac{m}{s}$. Parametri : raportul dintre cursă și diametru ψ și presiunea de supraalimentare p_s.

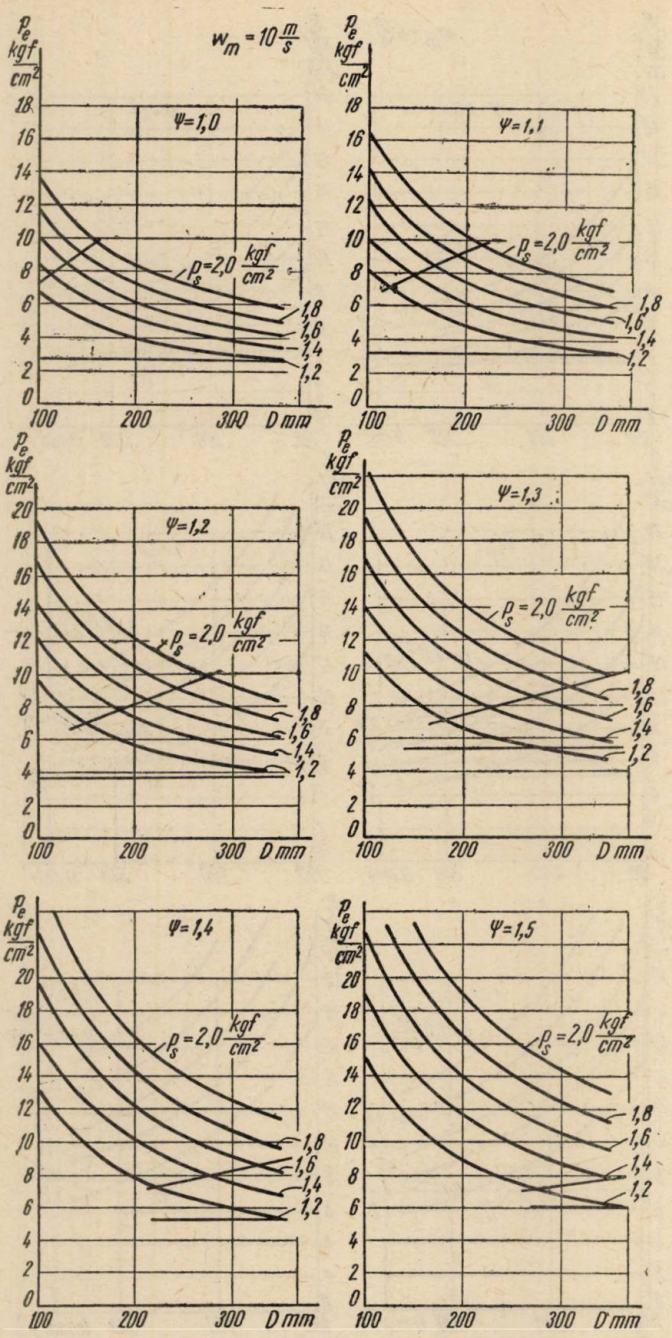


Fig. 8. — Variaţia presiunii medii p_e cu diametrul cilindrului D, pentru viteza medie a pistonului $w_m = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Parametri: raportul dintre cursă şi diametru ψ şi presiunea de supraalimentare p_s.

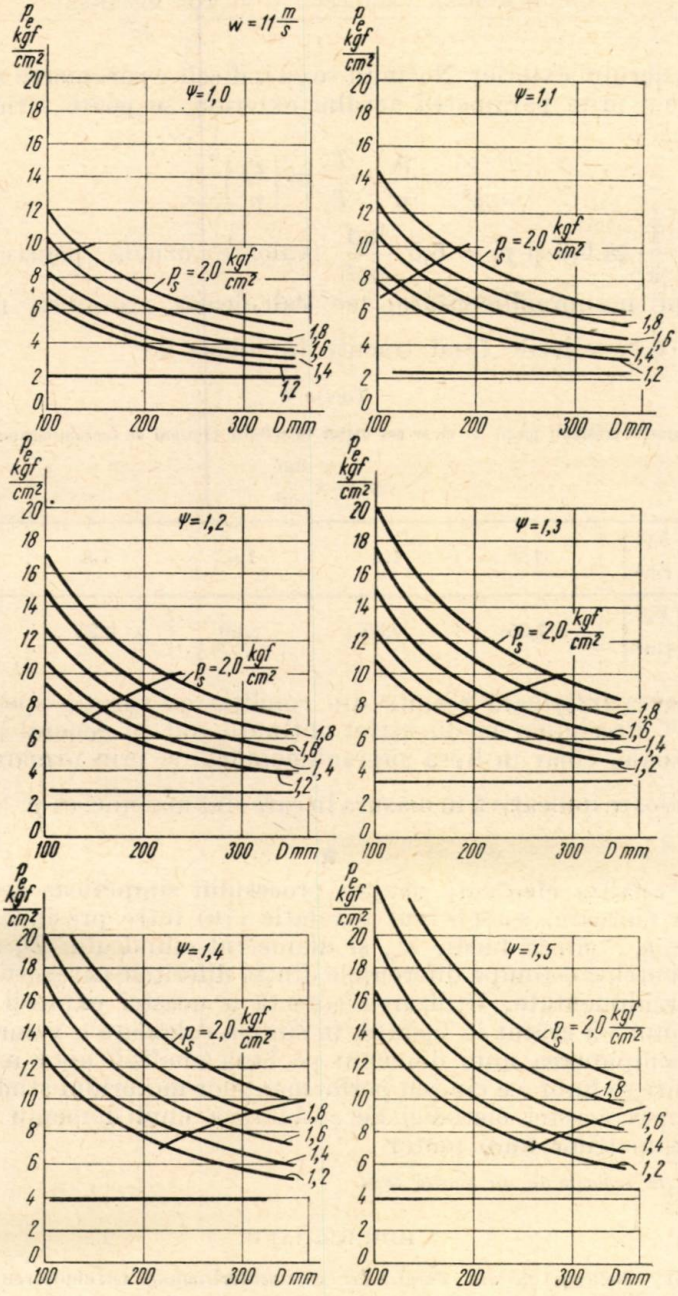


Fig. 9. — Variația presiunii medii p_e cu diametrul cilindrului D, pentru viteza medie a pistonului $w_m = 11 \frac{m}{s}$. Parametri : raportul dintre cursă și diametru ψ și presiunea de supraalimentare p_s.

specifică a aerului exterior. Notîndu-se cu indicele s parametrii aerului comprimat şi cu prim parametrii aerului exterior, se poate scrie

$$\frac{\rho}{\rho'} = \frac{p_s}{p'} \cdot \frac{T'}{T_s} = \left(\frac{p_s}{p'}\right)^{\frac{1}{\varkappa}}. \tag{21}$$

Luîndu-se $\frac{1}{\varkappa} \cong 0{,}6$ şi $p'_e = 6{,}5 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2}$ (valoare uzuală pentru motoarele în 4 timpi nesupraalimentare), se calculează presiunea medie $p_e = \left(\frac{p_s}{p'}\right)^{0{,}6} \cdot 6{,}5$, valorile fiind trecute în tabela 2.

Tabela 2

Valorile presiunii medii p_e ce se pot obţine la diferite presiuni de supraalimentare p_s

$p' = 1 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2}$

$p_s \left[\frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2}\right]$	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
$p_e \left[\frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2}\right]$	7,25	7,85	8,60	9,25	9,86

Valoarea inferioară rezultă din condiţia ca turaţia specifică să fie $n_s > 8 \cdot 10^3$. Presiunile medii astfel obţinute sînt în general mai mici ca valorile uzuale, chiar în lipsa supraalimentării, şi prin urmare reprezintă numai o valoare indicativă în măsura în care sînt mai mici ca $p'_e < 6{,}5 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2}$.

★

Prin analiza efectuată asupra procesului simplificat de schimb de căldură în motoare, s-a obţinut o relaţie (10) între presiunea de supraalimentare p_s, viteza medie w_m şi diametrul cilindrului D, suficient de generală pentru a estompa diferenţele dintre diferitele categorii de motoare diesel supraalimentate. Utilizarea corectă a acestei expresii nu constă, aşa după cum s-a arătat în lucrare, în simpla calculare a valorii ei, ci este necesară compunerea unui domeniu pe baza analizei unor motoare deja realizate care să îmbrace cîmpul performanţelor motorului studiat. Autorii insistă asupra acestei metodici de stabilire a unui domeniu pentru stabilirea parametrilor unui motor.

Primit la redacţie la 10 martie 1964

BIBLIOGRAFIE

1. G. Sytkey, *Beitrage zu der Theorie der Wärmeübertragung.* Ottomotoren Konstruktion, *2* (1962).
2. В.И. Гродзиевский, *Турбонадув дизелей СМД.* Тракторы солхоз-машины, *7* (1960).
3. E. Pflug, *Leistungs und Typenprogramm von Schienenfahrzeug — Diesel motoren der Deutschen Bundesbahn.* MTZ-21, *6* (1960).
4. В.Н. Струнге, В.Е. Милман, А.С. Епштеин, *Конструкции зарубежных тепловозных и судовых двигателей.* Машгиз, Москва, 1961.

CERCETAREA PROCESULUI DE ARDERE DIN MOTORUL CU APRINDERE PRIN SCÎNTEIE CU CONSIDERAREA ADÎNCIMII ZONEI DE ARDERE DIN FLACĂRA TURBULENTĂ

DE

B. GRÜNWALD

621.43

În lucrare se stabilesc ecuațiile care permit, pe baza diagramei presiune-unghi RAC, obținerea informațiilor necesare în vederea analizei procesului de ardere dintr-un motor dat.

Cercetarea procesului de ardere din motorul cu aprindere prin scînteie poate fi făcută eficient numai dacă este posibilă determinarea unor parametri caracteristici ai procesului (durata fazelor inițiale, principale și finale, gradul de ardere în tranșă etc.), precum și a legilor și vitezelor de ardere.

Într-o lucrare anterioară [1] au fost stabilite următoarele legi și viteze de ardere, ținînd seama de adîncimea zonei de ardere din flacăra turbulentă :

$$x_f = 1 - e^{-6{,}9\,\zeta^{m+1}}, \tag{1}$$

$$x_e = 1 - e^{-D\,\zeta^{m+1}}, \tag{2}$$

$$x_i = e^{-D\,\zeta^{m+1}} - e^{-6{,}9\,\zeta^{m+1}}, \tag{3}$$

$$\frac{dx_f}{d\alpha} = \frac{6{,}9\,(m+1)}{\alpha_y - \alpha_s}\,\zeta^m\, e^{-6{,}9\,\zeta^{m+1}} \tag{4}$$

$$\frac{dx_e}{d\alpha} = \frac{D\,(m+1)}{\alpha_y - \alpha_s}\,\zeta^m\, e^{-D\,\zeta^{m+1}} \tag{5}$$

$$\frac{dx_i}{d\alpha} = \frac{m+1}{\alpha_y - \alpha_s}\,\zeta^m\,[6{,}9\, e^{-6{,}9\,\zeta^{m+1}} - De^{-D\,\zeta^{m+1}}], \tag{6}$$

unde x_f, x_e, x_i sînt respectiv legea de propagare, legea de ardere efectivă și legea de ardere întîrziată; $dx_f/d\alpha$, $dx_e/d\alpha$, $dx_i/d\alpha$ sînt respectiv viteza masică de propagare, viteza de ardere efectivă și viteza de frînare; α, α_s, α_y sînt respectiv unghiul curent *RAC*, măsurat față de p.m.i., la finele cursei de compresiune, avansul la declanșarea scînteii electrice și unghiul corespunzător presiunii maxime de cilindru; ζ este unghiul relativ RAC definit de raportul $\zeta = \frac{\alpha - \alpha_s}{\alpha_y - \alpha_s}$, iar m și D sînt constante, denumite exponentul cinetic, respectiv constanta cinetică.

Pentru a obține informațiile necesare cu privire la procesul de ardere dintr-un motor dat, pe baza diagramei presiune-unghi RAC, este necesar să se stabilească legătura dintre legile și vitezele de ardere și presiunea din cilindrul motorului.

O astfel de legătură poate fi stabilită pe baza primului principiu al termodinamicii. Utilizarea directă a primului principiu al termodinamicii este foarte dificilă; sînt necesare simplificări care micșorează precizia de calcul; este necesar un mare volum de muncă, întrucît ecuația bilanțului energetic nu poate fi rezolvată pe cale analitică. Pe această cale merge mai departe Vibe; ea este utilizată în general de toți autorii.

În lucrarea de față se propune corelarea ecuațiilor de ardere cu variația presiunii pe o cale nouă, care apelează și ea, inevitabil, la primul principiu al termodinamicii, dar îl conține într-o formă implicită.

În lucrarea [2], urmărindu-se descrierea cantitativă a fenomenului de propagare, se obține ecuația propagării flacării în motorul cu aprindere prin scînteie, ecuație care stabilește dependența direct proporțională a vitezei masice de propagare ($dx_f/d\alpha$) de viteza de creștere a presiunii ($dp/d\alpha$):

$$C_s F \frac{1}{V} \frac{dx_f}{d\alpha} = \frac{dp}{d\alpha}. \tag{7}$$

În ecuația (7), V reprezintă volumul cilindrului la un moment dat, iar constantele C_s și F, denumite constanta inițială și respectiv factor de propagare, sînt definite de relațiile

$$C_s = \frac{V_s p_s}{T_s}(\mu T_f - T_1), \tag{8}$$

$$F = m_f \chi, \tag{9}$$

unde

V_s, p_s, T_s sînt mărimile de stare ale amestecului în momentul declanșării scînteii electrice;

T_1 — temperatura amestecului nears la sfîrșitul primei faze a procesului de ardere;

T_f — temperatura flăcării rezultate la arderea izobară a 1 kg de combustibil;

μ — coeficientul total de variație molară;

m_f — exponentul politropic al primei fracțiuni din cursa de destindere vizibilă;

χ — gradul real de creştere relativă a volumului tranşei, definit de autor, după cum urmează.

Fie ΔV_t volumul unei tranşe de amestec nears, străbătut de flacără într-un interval de timp $\Delta\tau$; se scrie ecuaţia de stare a amestecului nears conţinut în tranşă

$$p\,\Delta V_t = M_n R T_n .$$

După ardere, gazele din tranşă se dilată şi ocupă volumul ΔV; se scrie ecuaţia de stare a gazelor din tranşă după ardere, în ipoteza că arderea are loc la presiunea constantă:

$$p\,\Delta V = M_f R T_f .$$

Împărţind cele două ecuaţii şi aranjîndu-le convenabil, se determină creşterea relativă a volumului tranşei, presupunînd arderea izobară a întregii cantităţi de combustibil conţinute în tranşă:

$$\frac{\Delta V - \Delta V_t}{\Delta V_t} = \frac{\mu T_f - T_n}{T_n} . \tag{10}$$

În realitate, din cauza adîncimii zonei de ardere, numai o parte din cantitatea de combustibil aflată în tranşă intră în reacţie. Ca urmare, creşterea relativă reală a volumului tranşei este mai redusă, gradul de reducere fiind tocmai χ, adică

$$\frac{\Delta V - \Delta V_t}{\Delta V_t} = \chi \frac{\mu T_f - T_n}{T_n} . \tag{11}$$

Diferenţa $\mu T_f - T_n$ rămîne practic constantă în timpul procesului, după cum se arată în lucrarea citată.

Dacă se substituie în ecuaţia (7) viteza masică de propagare din relaţia (4), ecuaţia de propagare devine

$$C_s F \frac{1}{V} \frac{6{,}9(m+1)}{\alpha_y - \alpha_s} \zeta^m e^{-6{,}9\zeta^{m+1}} = \frac{dp}{d\alpha} . \tag{12}$$

1. DETERMINAREA EXPONENTULUI CINETIC

Cu ajutorul ultimei ecuaţii se poate determina valoarea exponentului cinetic.

După cum se arată în lucrarea [4], pentru valori mici ale unghiului RAC, în jurul punctului mort interior, se poate utiliza următoarea funcţiune de volum:

$$V = V_c(1 + a\,\alpha^2), \tag{13}$$

unde

V_c este volumul camerei de ardere;
$a = 0{,}9\,(\varepsilon - 1)\,10^{-4}$ pentru $\alpha \leqslant 40°$;
$a = 0{,}87\,(\varepsilon - 1)\,10^{-4}$ pentru $\alpha = 40°-60°$.

Derivînd ecuația (12) în raport cu α, se obține :

$$C_s F \frac{6{,}9(m+1)}{(\alpha_y - \alpha_s)^2} \zeta^{m-1} e^{-6{,}9\zeta^{m+1}} [m - 6{,}9(m+1)\zeta^{m+1}] = p''V + p'V'. \quad (14)$$

Pentru unghiul RAC $\alpha = \alpha_t$, la care viteza de creștere a presiunii este maximă, se realizează condițiile : $p_t'' = 0$, $V_t' = 0$. Prima condiție este evidentă, deoarece $p_t' = p'_{max}$; a doua condiție se obține dacă se ține seama că viteza maximă de creștere a presiunii se realizează în jurul punctului mort interior ; chiar pentru $\alpha_t = 10°$ eroarea nu depășește 1%.

În consecință, pentru $\alpha = \alpha_t$ rezultă

$$m - 6{,}9(m+1)\zeta_t^{m+1} = 0. \quad (15')$$

Întrucît ζ_t se poate determina prin derivarea grafică sau electronică a diagramei presiune-unghi RAC, din ultima ecuație rezultă valoarea exponentului cinetic :

$$\lg \frac{6{,}9(m+1)}{m} = -(m+1)\lg \zeta_t. \quad (15)$$

Ultima ecuație se rezolvă grafic sau prin încercări.

2. DETERMINAREA DURATEI FAZEI INIȚIALE A PROCESULUI DE ARDERE

În lucrările [3], [5] se pun în discuție ipotezele elaborate de diferiți autori cu privire la împărțirea pe faze a procesului de ardere și sînt evidențiate unele aspecte noi ale procesului. Se ajunge astfel la concluzia că un criteriu rațional pentru determinarea duratei fazei inițiale îl constituie momentul în care flacăra cuprinde 2% din masa totală a amestecului.

Cu condiția $x_{f_1} = 0{,}02$ sau

$$1 - e^{-6{,}9\zeta_1^{m+1}} = 0{,}02, \quad (16)$$

rezultă durata relativă a fazei inițiale :

$$-\lg \zeta_1 = \frac{2{,}535}{m+1}. \quad (17)$$

Din relația de definiție a unghiului relativ RAC rezultă

$$\alpha_1 = \alpha_s + \zeta_1(\alpha_y - \alpha_s), \quad (18)$$

unde α_s este unghiul RAC la care se produce declanșarea scînteii electrice, α_y este unghiul RAC la care se realizează presiunea maximă, iar α_1 este unghiul RAC pentru care flacăra cuprinde 2% din masa amestecului (sfîrșitul fazei inițiale).

Condițiile de stare la finele fazei inițiale se determină pe baza relațiilor :

$$V_1 = V_c(1 + a\,\alpha_1^2), \tag{19}$$

$$T_1 = T_a\left(\frac{V_a}{V_1}\right)^{m_n - 1}, \tag{20}$$

unde T_a și V_a sînt temperatura și volumul la finele cursei de admisie, iar m_n este exponentul politropic al evoluției de compresiune.

Presiunea p_1 se citește din diagrama indicată pentru $\alpha = \alpha_1$.

3. DETERMINAREA GRADULUI DE ARDERE ÎN TRANȘĂ

Gradul real de creștere relativ a volumului tranșei poate fi determinat dacă se cunoaște valoarea factorului de propagare.

Se substituie volumul V din ecuația (13) în ecuația (12) :

$$\frac{C_s}{V_c} F \frac{1}{1 + a\,\alpha^2} \frac{6{,}9\,(m+1)}{\alpha_y - \alpha_s} \zeta^m e^{-6{,}9\zeta^{m+1}} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\alpha}. \tag{21}$$

Raportul $1/1 + a\,\alpha^2$ se dezvoltă în serie și se reține primii doi termeni

$$\frac{C_s}{V_c} F(1 - a\,\alpha^2) \frac{6{,}9\,(m+1)}{\alpha_y - \alpha_s} \zeta^m e^{-6{,}9\zeta^{m+1}} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\alpha}. \tag{22}$$

Substituind în (22) unghiul RAC cu unghiul relativ

$$\alpha = \alpha_s + \zeta(\alpha_y - \alpha_s),$$

separînd variabilele și integrînd în limitele $\zeta_1 - \zeta$, $p_1 - p$, se obține :

$$\frac{C_s}{V_c} F \int_{\zeta_1}^{\zeta} \{1 - [\alpha_s^2 + 2\alpha_s(\alpha_y - \alpha_s)\zeta + (\alpha_y - \alpha_s)^2 \zeta^2]\}\, 6{,}9\,(m+1)\,\zeta^m e^{-6{,}9\zeta^{m+1}}\,\mathrm{d}\zeta = \int_{p_1}^{p} \mathrm{d}p. \tag{23}$$

S-a luat ca limită inițială de integrare momentul în care se încheie prima fază a arderii ; ar fi trebuit să se aleagă ca limită inițială momentul de apariție a nucleului de flacără, dar acest moment nu poate fi determinat.

Efectuînd primul termen al integralei, se obține :

$$\int_{\zeta_1}^{\zeta} 6{,}9\,(m+1)\,\zeta^m e^{-6{,}9\zeta^{m+1}}\,\mathrm{d}\zeta = x_f - x_{f_1}. \tag{24}$$

Notînd cu I integrala rămasă

$$I = \alpha_s^2 \int_{\zeta_1}^{\zeta} 6{,}9\,(m+1)\,\zeta^m e^{-6{,}9\zeta^{m+1}}\,\mathrm{d}\zeta + 2\alpha_s(\alpha_y - \alpha_s)\,6{,}9\,(m+1) \times \int_{\zeta_1}^{\zeta} \zeta^{m+1} e^{-6{,}9\zeta^{m+1}}\,\mathrm{d}\zeta + (\alpha_y - \alpha_s)^2\,6{,}9\,(m+1) \int_{\zeta_1}^{\zeta} \zeta^{m+2} e^{-6{,}9\zeta^{m+1}}\,\mathrm{d}\zeta, \tag{25}$$

ecuația (23) devine :

$$\frac{C_s}{V_c} F\,[(x_f - x_{f_1}) - aI] = p - p_1. \tag{26}$$

Dacă în ecuația (18) se introduce condiția $\zeta = \zeta_y$, deci $x_{f_y} = 1$, $p = p_y$ și $I = I_y$, atunci se poate determina valoarea factorului de propagare

$$F = \frac{p_y - p_1}{\frac{C_s}{V_c}\,[(1 - x_{f_1}) - aI_y]}. \tag{27}$$

Integrala I_y se rezolvă prin metoda trapezelor. Erorile introduse astfel sînt complet neglijabile, întrucît termenul I_y nu depășește 8 —10 % din primul termen al parantezei.

Fiind determinată valoarea factorului de propagare, ecuația (26) poate servi la construirea curbelor de presiune în faza principală de ardere ceea ce permite confruntarea curbei teoretice cu cea experimentală.

Gradul real de creștere relativ a volumului tranșei se determină din relația

$$\chi = \frac{F}{m_f},$$

unde m_f se determină din diagrama presiune-unghi RAC, calculîndu-se exponentul mediu politropic al primei porțiuni din curba de destindere vizibilă în care are loc postarderea.

Se poate demonstra că gradul real de creștere relativă a volumului tranșei este egal practic cu gradul de ardere în tranșă.

Gradul de ardere în tranșă (χ') este determinat de intrarea în reacție cu întîrziere a unei fracțiuni din cantitatea de combustibil.

Prin definiție,

$$\frac{\Delta V - \Delta V_t}{\Delta V_t} = \chi\,\frac{\mu T_f - T_n}{T_n}. \tag{11}$$

Creșterea relativă reală a volumului tranșei poate fi definită și altfel, și anume

$$\frac{\Delta V - \Delta V_t}{\Delta V_t} = \frac{\mu T_f' - T_n}{T_n}, \tag{28}$$

unde T_f' este temperatura flăcării, determinată din condiția arderii în tranșă a numai χ' kg combustibil.

În relația (11), temperatura T_f se determină din următoarea ecuație a bilanțului energetic

$$\frac{\chi' H_i}{M_0(1+\gamma)} + C_{p\text{aer}}(T_n - T_0) = \mu\, C_{p\text{g.a.}}(T_f' - T_n). \tag{29}$$

Temperatura T_f' din ecuația (28) se determină din următoarea ecuație a bilanțului energetic

$$\frac{\chi' H_i}{M_0(1+\gamma)} + C_{p_{aer}}(T_n - T_0) = \mu C_{p_{g.a.}}(T_f' - T_0), \tag{30}$$

unde H_i este puterea calorifică interioară a combustibilului; M_0 numărul de moli de încărcătură proaspătă; γ coeficientul gazelor arse reziduale; $C_{p_{aer}}$, $C_{p_{g.a.}}$ căldura specifică molară la presiune constantă a aerului și amestecului de gaze arse rezultate din ardere; T_0 temperatura inițială.

Din (11) și (28) rezultă

$$\chi(\mu T_f - T_n) = \mu T_f' - T_n. \tag{31}$$

Din (29) și (30) rezultă

$$\frac{H_i}{M_0(1+\gamma)C_{p_{g.a.}}} + \frac{C_{p_{aer}}}{C_{p_{g.a.}}}(T_n - T_0) + \mu T_0 = \mu T_f, \tag{32}$$

$$\frac{\chi' H_i}{M_0(1+\gamma)C_{p_{g.a.}}} + \frac{C_{p_{aer}}}{C_{p_{g.a.}}}(T_n - T_0) + \mu T_0 = \mu T_f'. \tag{33}$$

Scăzînd din ambii membri ai ultimelor două ecuații termenul T_n, substituind valorile obținute în (31) și efectuînd simplificările posibile, rezultă:

$$\chi' = \chi - \frac{M_0(1+\gamma)C_{p_{g.a.}}}{H_i}\left[\frac{C_{p_{aer}}}{C_{p_{g.a.}}}(T_n - T_0)(1-\chi) - (T_n - \mu T_0)(1-\chi)\right]. \tag{34}$$

Întrucît al doilea termen din membrul drept reprezintă 1—2% din χ, rezultă practic

$$\chi' = \chi.$$

În cercetarea procesului de ardere dintr-un motor, cunoașterea valorii medii a parametrului χ este deosebit de utilă, întrucît dă indicații cu privire la adîncimea medie a zonei de ardere.

4. DETERMINAREA VITEZEI MAXIME DE CREȘTERE A PRESIUNII

Din ecuațiile (12), (15′) și (27) pentru $\zeta = \zeta_t$ rezultă

$$p'_{max} = \frac{p_y - p_1}{\alpha_y - \alpha_s}\frac{6{,}9(m+1)}{(1+a\alpha_t^2)[(1-x_{f_1}) - aI_y]}\left[\frac{m}{18{,}8(m+1)}\right]^{\frac{m}{m+1}}. \tag{35}$$

La prelucrarea diagramei indicate este util să se efectueze calculul vitezei maxime de creștere a presiunii, întrucît cu acest prilej se verifică fie exponentul cinetic m, fie chiar viteza maximă de creștere a presiunii.

5. DETERMINAREA CONSTANTEI CINETICE D

În momentul $\zeta = 1$ se obține

$$D = -\ln (1 - x_{ey}). \tag{36}$$

Fracțiunea din numărul total al moleculelor de combustibil care a intrat în reacție pînă la finele propagării poate fi determinată identificînd starea amestecului la finele propagării cu starea medie dintr-o tranșă.

În adevăr, la finele propagării, un volum de amestec V_y este cuprins în întregime de flacără ; în reacție a intrat însă numai fracțiunea x_{ey} din cantitatea de combustibil aflată în cilindru. În mod identic se desfășoară fenomenul în fiecare tranșă : un volum de amestec — volumul tranșei — este cuprins de flacără ; în reacție intră numai fracțiunea χ' din cantitatea de combustibil aflată în tranșă. În consecință,

$$\chi' = x_{ey} = \chi,$$

ceea ce permite determinarea imediată a fracțiunii x_{ey} și, în consecință, a constantei cinetice D.

Dezavantajul principal al ipotezei constă în aceea că se compară un volum elementar de amestec (volumul tranșei) cu un volum macroscopic (volumul amestecului din camera de ardere la finele propagării).

Cu toate acestea, am admis ipoteza menționată nu numai din motivul simplificării calculelor, ci mai ales datorită suportului ei fizic.

6. DETERMINAREA DURATEI TOTALE A PROCESULUI DE ARDERE

Condiția $x_e = 1$ indică *încheierea procesului de intrare în reacție a combustibilului*. Aceasta nu înseamnă că reacția chimică a încetat, întrucît se desfășoară în continuare reacțiile intermediare de oxidare pentru ultimele fracțiuni de combustibil, precum și reacțiile de disociere și resociere. Întrucît apar dificultăți mari la determinarea momentului în care reacția chimică a încetat complet, prin *durata totală a arderii se va înțelege timpul necesar intrării în reacție a tuturor moleculelor de combustibil din camera de ardere.*

Pentru a elimina nedeterminarea care apare, pentru condiția $x_e = 1$ se va considera că sfîrșitul arderii ($\alpha = \alpha_z$, $\zeta = \zeta_z$) are loc pentru condiția $x_e = 0{,}999$, eroarea introdusă fiind, evident, neglijabilă.

Din ecuația (2) rezultă

$$e^{-D\zeta_z^{m+1}} = 0{,}001,$$

sau

$$\zeta_z = \sqrt[m+1]{\frac{6{,}9}{D}} \tag{37}$$

și

$$\alpha_z = \alpha_s + \zeta_z (\alpha_y - \alpha_s). \tag{38}$$

Au fost astfel determinate toate constantele care intervin în ecuațiile (1)—(6).

Prin ridicarea legilor și vitezelor de ardere, precum și prin cunoașterea unor parametri caracteristici ai procesului, se poate determina mai exact influența unor factori fizico-chimici, hidrodinamici și constructivi asupra desfășurării procesului de ardere.

7. CAZUL PARTICULAR AL ARDERII LA VOLUM CONSTANT

Este interesant de subliniat faptul că arderea teoretică, la volum constant, rezultă din ecuațiile găsite ca un caz particular.

În ecuația (26) se substituie constanta inițială și factorul de propagare cu expresiile lor (8), (25).

În ciclul teoretic apar, evident, următoarele condiții : 1. $p_1 = p_s = p_c$; 2. $V_s = V_c$; 3. $T_s = T_c$; 4. $x_{f_1} = 0$; 5. $T = 0$; 6. $x_f = 1$; 7. $\chi = 1$; 8. $m_f = 1$.

Cu aceste condiții, ultima ecuație devine

$$p_y = p_c + \frac{p_c}{T_c}(\mu T_y - T_c),$$

sau, după efectuarea reducerilor,

$$\frac{p_y}{p_c} = \mu \frac{T_z}{T_c},$$

ceea ce reprezintă chiar ecuația arderii la volum constant.

8. EXEMPLU DE CALCUL

Eficiența metodei este ilustrată prin următorul exemplu.

Este cunoscută tendința actuală de sporire a rapoartelor de compresiune. Creșterea randamentului indicat la rapoarte mari de compresiune este frînată însă de proprietățile fizico-chimice ale combustibililor. Combustibilul cu proprietăți antidetonante ridicate conduce la viteze de reacție reduse, ceea ce întîrzie desfășurarea proceselor chimice din zona de ardere.

Pentru a pune în evidență influența combustibilului asupra zonei de ardere au fost organizate încercări [1]) cu doi combustibili, cu proprietăți antidetonante diferite. În acest scop s-a utilizat izooctanul și combustibilul etalon F2, cu cifră octanică 82.

Diagramele indicate comparative sînt prezentate în figura 1. Condițiile de experimentare sînt precizate în legenda figurii. Schimbarea izo-

[1]) Încercările au fost efectuate pe un motor IT9—1, în laboratorul Institutului politehnic din București.

octanului cu combustibilul etalon F_2 conduce la o creştere a presiunii maxime cu 3,2 kgf/cm², ceea ce reprezintă 17,2%.

Indicii caracteristici ai procesului de ardere sînt prezentaţi în tabela 1, iar legile de ardere în figura 2.

Se constată că durata fazei principale este aproape aceeaşi, iar legile

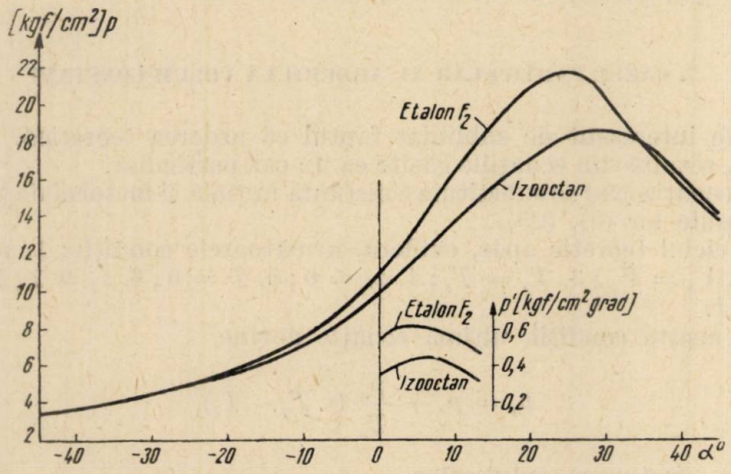


Fig. 1. — Legea de variaţie a presiunii
motor IT9—1; raport de compresiune — 7; excesul de aer — 1, 13; turaţia — 2 000 rot/min; avansul la declanşarea scînteii electrice — 45° RAC; combustibil-izooctan şi etalon F_2.

de propagare diferă neesenţial. În schimb, legile de ardere efectivă şi întîrziată sînt modificate considerabil.

Tabela 1

Comb.	Durata fazei iniţiale ($\alpha_1 - \alpha_s$)		Durata fazei principale ($\alpha_y - \alpha_1$)		Durata fazei finale ($\alpha_z - \alpha_y$)		Durata totală a arderii ($\alpha_z - \alpha_s$)		Exponentul cinetic	Constanta cinetică	Gradul de ardere în tranşă
	°RAC	% faţă de $\alpha_y - \alpha_s$	°RAC	% faţă de $\alpha_y - \alpha_s$	°RAC	% faţă de $\alpha_y - \alpha_s$	°RAC	% faţă de $\alpha_y - \alpha_s$	m	D	$\chi = x_{ev}$
Izooctan	26	34,6	49	65,4	35	47	110	147	4,5	0,837	0,567
Etalon F_2	24	34,3	46	65,7	25	36	95	136	4,5	1,243	0,714

Aceste fapte atrag atenţia asupra necesităţii ameliorării arderii efective în cazul benzinelor cu cifre octanice foarte ridicate.

De aceea la rapoarte mari de compresiune apare necesitatea studierii cu mai multă atenţie a formei camerei de ardere, întrucît reducerea duratei de ardere va depinde de distribuţia masică a încărcăturii.

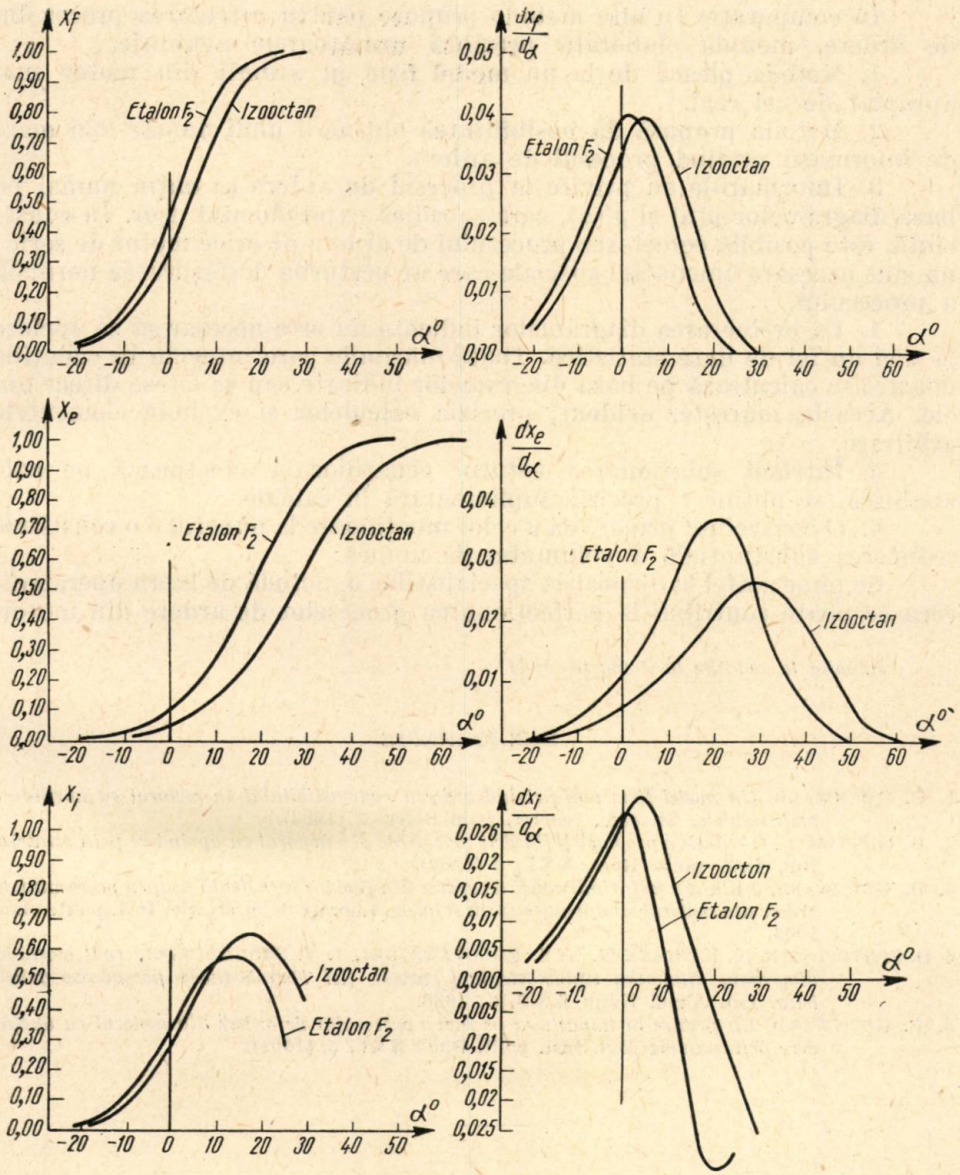


Fig. 2. — Legile de ardere și vitezele de ardere pentru doi combustibili.

9. CONCLUZII

În comparație cu alte metode propuse pentru cercetarea procesului de ardere, metoda elaborată prezintă următoarele avantaje.

1. Metoda pleacă de la un model fizic al arderii din motor mai apropiat de cel real.

2. Metoda propusă dă posibilitatea obținerii unui număr mai mare de informații privind procesul de ardere.

3. Informațiile cu privire la procesul de ardere se obțin numai pe baza diagramelor $p(\alpha)$ și $p'(\alpha)$, care se ridică experimental ușor. În consecință, este posibilă cercetarea procesului de ardere pe orice motor de serie; nu sînt necesare amenajări speciale care ar perturba desfășurarea normală a procesului.

4. La prelucrarea diagramelor indicate nu este necesar să se apeleze la nici un fel de date statistice. Toate mărimile care intervin în ecuațiile noastre se calculează pe baza diagramelor indicate sau se citesc direct din ele. Aceasta mărește, evident, precizia calculelor și exclude elementele arbitrare.

5. Întrucît soluționarea tuturor ecuațiilor se efectuează pe cale analitică, se obține o precizie suplimentară în calcule.

6. O consecință principală a celor menționate la punctul 5 o constituie reducerea substanțială a volumului de muncă.

Se pune astfel la dispoziția specialiștilor o metodă de lucru operativă, ceea ce poate contribui la perfecționarea proceselor de ardere din motor.

Primită la redacție la 1 martie 1964

BIBLIOGRAFIE

1. B. GRÜNWALD, *Un model fizic nou privind arderea combustibilului în motorul cu aprindere prin scînteie.* St. cerc. energ., seria B Nr. 2 (1964).
2. B. GRÜNWALD, *O ecuație a propagării flăcării turbulente din motorul cu aprindere prin scînteie.* Bul. Inst. polit. Buc., **XXV**, *4* (1963).
3. B. GRÜNWALD, *Influența adîncimii zonei de ardere din flacăra turbulentă asupra procesului de ardere din motorul cu aprindere prin scînteie.* Lucrare de disertație, Inst. polit. Buc. 1963.
4. B. S. STECICHIN, K. I. GHENKIN, V. S. ZOLOTAREVSKI, I. V. SCORODINSKI, *Indicatornaia diagrama, dinamika teplovidelenia i rabocii țicl bîstrohodnovo porșnevovo dvigatelia.* Izd. Akad. Nauk S.S.S.R., 1960.
5. B. GRÜNWALD, *Cu privire la împărțirea pe faze a procesului de ardere din motorul cu aprindere prin scînteie.* Bul. Inst. polit. Buc., **XXV**, *5*, (1963).

ASUPRA POSIBILITĂȚILOR DE APLICARE A TURBINELOR DE TRECERE ÎN CENTRALE TERMOELECTRICE

DE

I. CSERVENY

621.165 : 621.438 : 656.5

Analizînd ponderea turbinei de trecere în centralele termoelectrice pe gaze naturale, se observă că ea depinde de condițiile de transport în conductă a gazelor naturale și de soluția termică care se adoptă pentru încălzirea gazelor. Se stabilește o relație care leagă puterea turbinei de trecere de capacitatea de transport a conductei cu care funcționează în comun. Cîteva scheme termice sînt analizate din punctul de vedere al creșterilor relative de randament și putere, mărimi care intervin direct în stabilirea condițiilor de aplicare economică a turbinelor de trecere.

Tendințele de dezvoltare rapidă a centralelor termoelectrice pe combustibil gazos în țara noastră impun atenției noastre posibilitatea de a mări economicitatea lor prin instalarea de turbine de trecere. Ritmul ridicat al creșterii producției de energie electrică din gaze naturale, 21,6% ca medie anuală în perioada 1955—1962, se explică prin investițiile specifice mai mici decît în orice alt tip de C.T.E., prin durata relativ scurtă de punere în funcțiune și prețul de cost relativ mic al energiei electrice produs în C.T.E. pe gaze. Dinamica producției de gaze naturale (fig. 1*a*) și de energie electrică (fig. 1*b*) ne permite să presupunem că și în perioada de perspectivă va continua instalarea de noi unități, în măsura în care rezervele de gaze vor permite aceasta.

ST. CERC. ENERG. ELECTR. TOM 14 Nr. 3 p. 665 – 682 BUCUREȘTI 1964

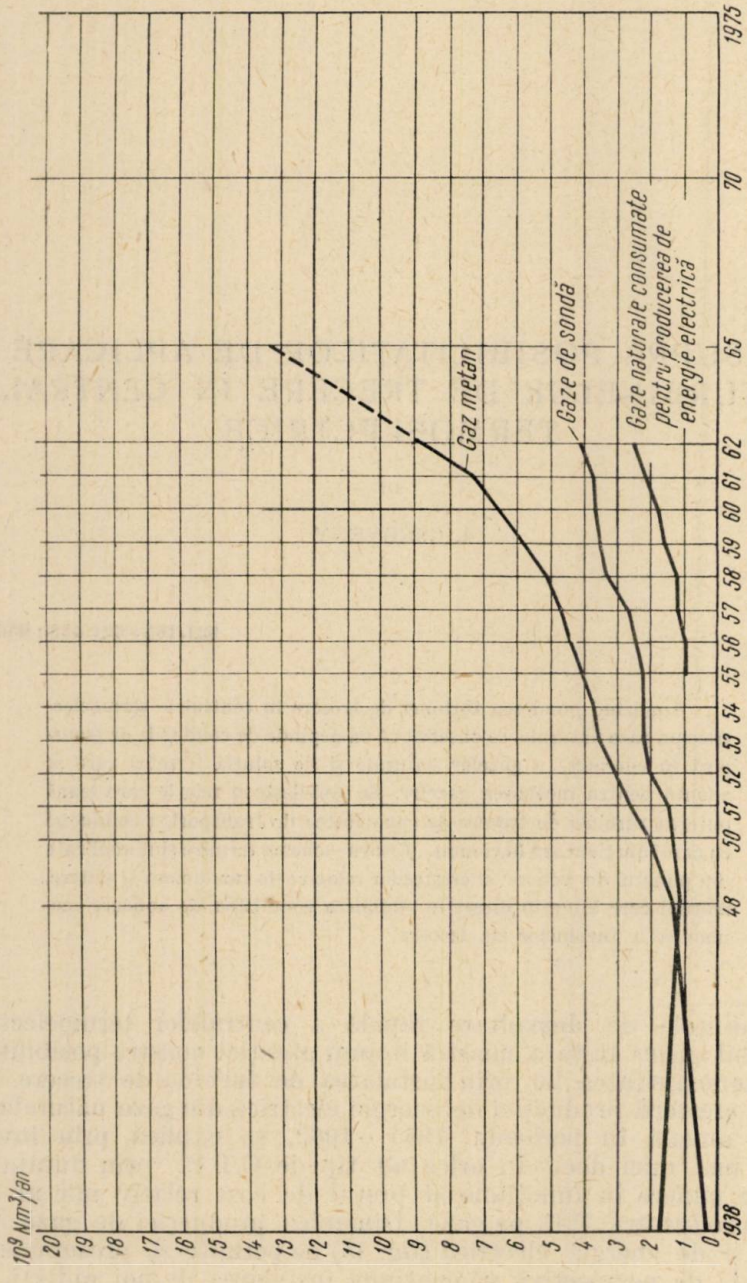

10^9 Nm³/an
20
19
18
17
16
15
14
13
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
1938
48
50
51
52
53
54
55
56
57
58
59
60
61
62
65
70
1975
Gaz metan
Gaze de sondă
Gaze naturale consumate pentru producerea de energie electrică

Fig. 1a

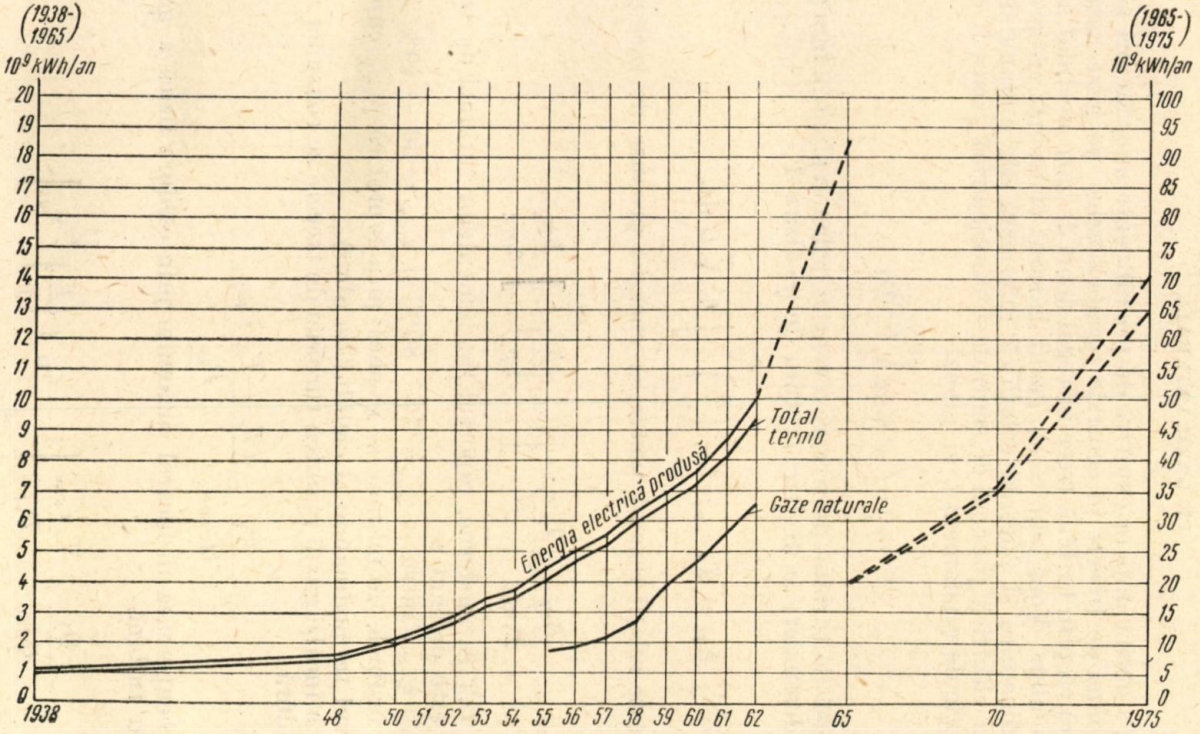


Fig. 1*b*

Dinamica producţiei de energie electrică pe bază de gaze naturale în R.P.R. (Conform Directivelor Congresului al III-lea al P.M.R. şi al *Anuarului statistic al R.P.R.*)

1. PONDEREA TURBINEI DE TRECERE ÎN CENTRALELE TERMOELECTRICE PE GAZE NATURALE

Pentru a obține date orientative despre influența unor factori asupra ponderii turbinei de trecere în centrale termoelectrice pe gaze naturale, vom considera că prin turbină trece întregul debit de gaze destinat arderii în cazanul de abur. Vom admite că gazul natural consumat are proprietățile termodinamice și puterea calorifică inferioară ale metanului pur.

Energia electrică produsă de centrala termoelectrică poate fi exprimată în funcție de randamentul ei global

$$E_{\mathrm{CTE}} = P_{ci} \cdot \eta_{\mathrm{CTE}} \int_0^t G \, \mathrm{d}\tau, \tag{1}$$

iar cea produsă de turbina de trecere o vom exprima explicit în funcție de raportul de destindere și de temperatura de încălzire T_s

$$E_{Tt} = T_s \, c_{pms} \left[1 - \left(\frac{p_i}{p_s} \right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}} \right] \eta_{Tt} \int_0^t G \, \mathrm{d}\tau. \tag{2}$$

Din aceste relații rezultă ponderea energiei produse de turbina de trecere

$$\frac{E_{Tt}}{E_{\mathrm{CTE}}} = \frac{T_s \, c_{pms}}{P_{ci}} \left[1 - \left(\frac{p_i}{p_s} \right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}} \right] \frac{\eta_{Tt}}{\eta_{\mathrm{CTE}}}. \tag{3}$$

Pentru C.T.E. moderne, raportul randamentelor turbinei de trecere și a C.T.E. este ordinul a
$\eta_{Tt} = (2 \div 2{,}5)\, \eta_{\mathrm{CTE}}$, întrucît $\eta_{Tt} = 70 \div 80\%$ și $\eta_{\mathrm{CTE}} = 30 - 40\%$ (diferența dintre ordinele de mărime se explică prin faptul că η_{CTE} cuprinde și randamentul termodinamic al ciclului de abur).

Pentru a încălzi gazul înaintea turbinei de trecere se consumă cantitatea de căldură

$$\frac{Q_1}{Q_{\mathrm{CTE}}} = \frac{(T_s - T_0)\, C_{pms}}{P_{ci}}, \tag{4}$$

din care se recuperează în focarul cazanului prin căldura fizică a gazelor la ieșirea din turbină

$$\frac{Q_2}{Q_{\mathrm{CTE}}} = \frac{T_s \, c_{pms}}{P_{ci}} \left[1 - \eta_{Tt} + \left(\frac{p_i}{p_s} \right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}} \eta_{Tt} \right]. \tag{5}$$

Consumul total de căldură pentru turbina de trecere este

$$\frac{Q_1 - Q_2}{Q_{\mathrm{CTE}}} \qquad \text{dacă} \qquad T_2 > T_0 \tag{6}$$

și

$$\frac{Q_1}{Q_{\text{CTE}}} \qquad \text{dacă} \qquad T_2 < T_0,$$

întrucît am considerat că în cazul cînd gazul destins în turbină e rece i se asigură posibilitatea de a se încălzi la temperatura mediului ambiant.

Datele orientative obținute în relațiile de mai sus au fost reprezentate sub forma unor diagrame în (fig. 2*a*), unde s-a considerat $\eta_{Tt} = 2\eta_{\text{CTE}}$ și $\eta_{Tt} = 80\%$ pentru consumul de căldură relativ și în (figura 2*b*) unde $\eta_{Tt} = 2{,}5\ \eta_{\text{CTE}}$ și $\eta_{Tt} = 75\%$. În aceleași diagrame s-a reprezentat modul cum depinde disocierea metanului de temperatură și de presiune, deoarece acest fenomen (apariția particulelor de carbon periculoase pentru paletajul turbinei) limitează încălzirea gazului metan.

Cunoscînd ponderea turbinei de trecere în producția de energie electrică și în consumul de căldură al centralei, rezultă imediat creșterea relativă a randamentului C.T.E. În această diagramă nu s-a ținut seama de creșterea de randament suplimentară care se poate obține prin perfecționarea schemei termice a ansamblului centrală clasică — turbină de trecere.

Se observă că factorii principali cari influențează ponderea turbinei de trecere în C.T.E. (și avantajele economice pe care le poate aduce) sînt :

— raportul de destindere în turbină, care depinde de regimul conductei de transport ;

— temperatura de încălzire a gazului la intrarea în turbină, respectiv schema termică ;

— randamentul turbinei de trecere, respectiv calitatea mașinii și comportarea ei la sarcini parțiale ;

— posibilitatea de a reduce investițiile prin tipizarea mașinii și prin buna proiectare a instalației de ansamblu.

2. INFLUENȚA CONDIȚIILOR DE TRANSPORT PRIN CONDUCTĂ A GAZELOR NATURALE ASUPRA PRODUCȚIEI DE ENERGIE ELECTRICĂ A TURBINEI DE TRECERE

Raportul de destindere în turbină, unul din factorii care determină mărimea și economicitatea turbinei de trecere, depinde de funcționarea conductei care alimentează C.T.E. cu gaze naturale. Din analiza posibilităților de a crea condiții favorabile obținerii energiei la turbină printr-un regim corespunzător al conductei de transport se ajunge la rezolvarea problemei alegerii puterii unitare a turbinei prin stabilirea unei corelații cu capacitatea de transport a conductei.

Pentru considerațiunile de mai jos, vom admite inițial că turbina funcționează în regim staționar la sfîrșitul unei conducte de diametru constant. Notînd cu indicele 0 starea la începutul conductei cu S la sfîrșitul conductei (considerată în același timp la intrarea în turbină) și i la

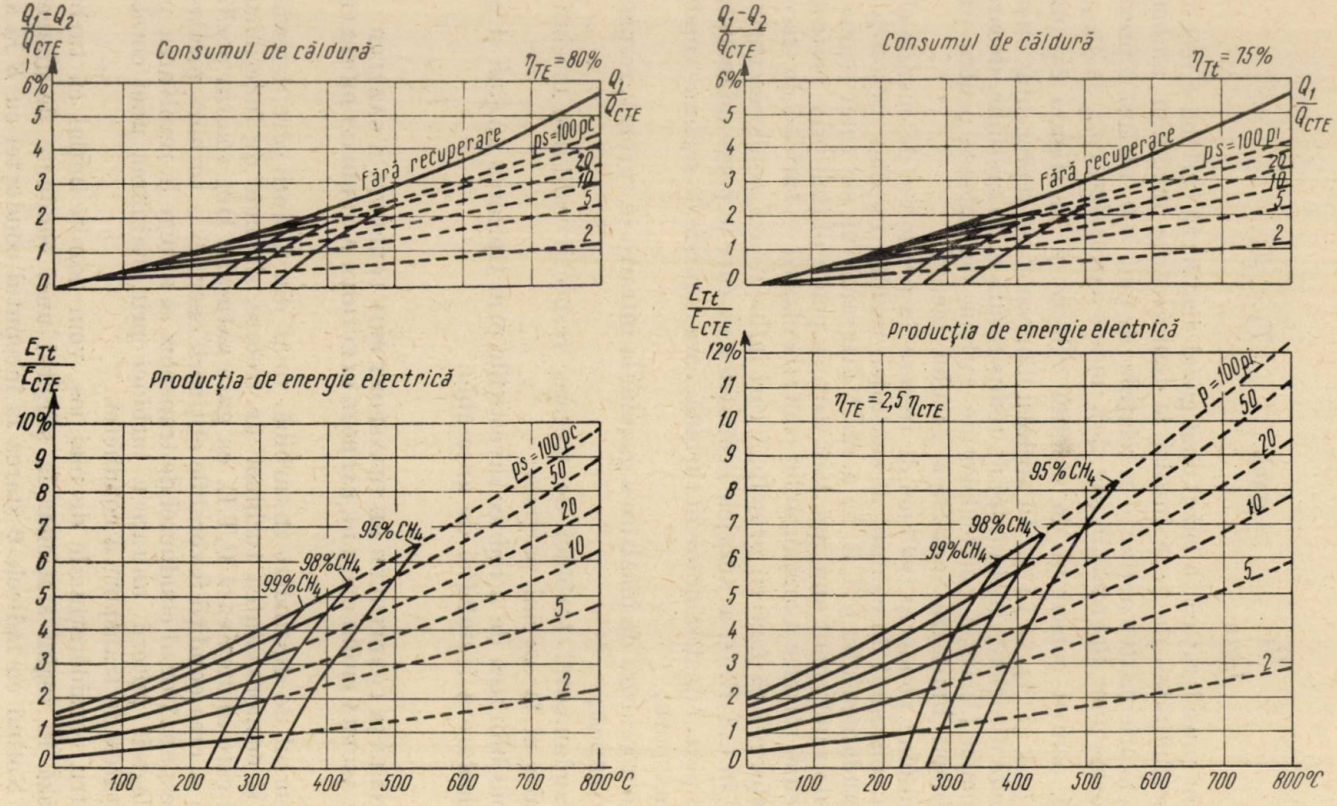

Consumul de căldură
$\eta_{TE}=80\%$
$\frac{Q_1}{Q_{CTE}}$
fără recuperare
$p_s=100$ pc
50
20
10
5
2
$\frac{Q_1-Q_2}{Q_{CTE}}$
$\frac{E_{Tt}}{E_{CTE}}$
Producția de energie electrică
95% CH_4
98% CH_4
99% CH_4
100 200 300 400 500 600 700 800°C
a
Consumul de căldură
$\eta_{Tt}=75\%$
$p_s=100$ pi
$\eta_{TE}=2,5\,\eta_{CTE}$
b

Fig. 2

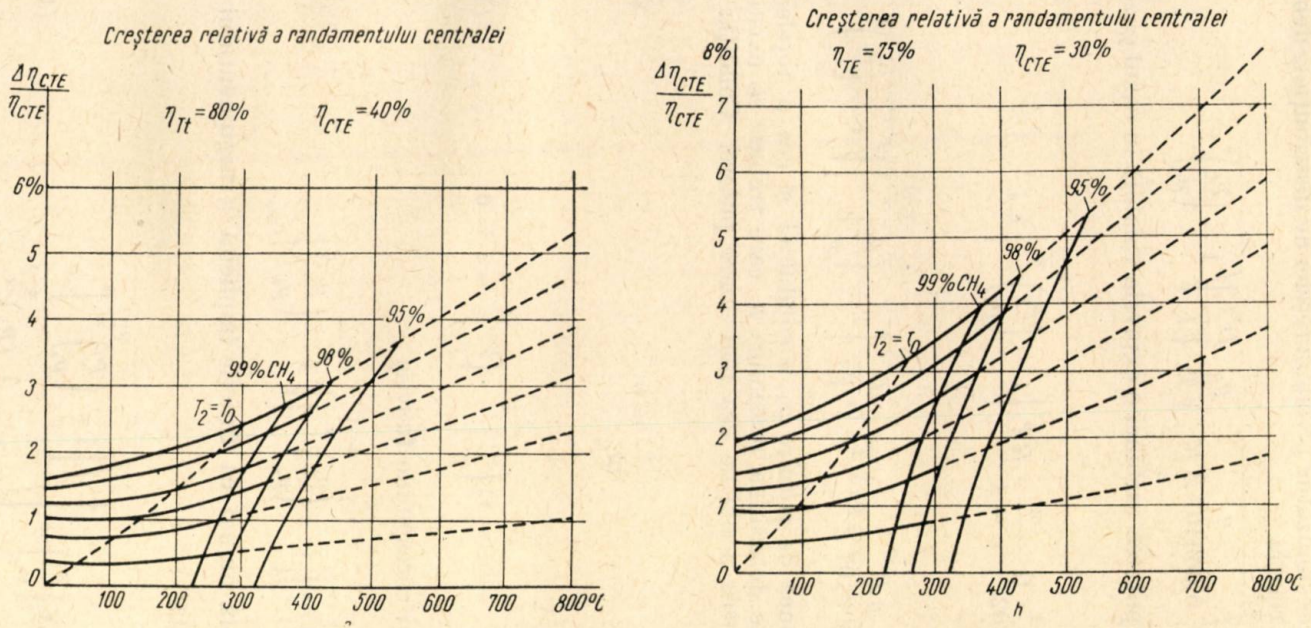


Fig. 2.

Dependenţa ponderei producţiei de energie electrică $\frac{E_{Tt}}{E_{\text{CTE}}}$ al consumului de căldură $\frac{Q_1 - Q_2}{Q_{\text{CTE}}}$ al turbinei de trecere şi a creşterii randamentului centralei $\frac{\Delta\eta_{\text{CTE}}}{\eta_{\text{CTE}}}$ datorită turbinei de trecere de raportul de destindere $\frac{p_s}{p_i}$ şi temperatura de încălzire a gazului :

$a - \eta_{Tt} = 80\,\%$ $\quad \eta_{\text{CTE}} = 40\,\%$

$b - \eta_{Tt} = 75\,\%$ $\quad \eta_{\text{CTE}} = 30\,\%$

ieşirea din turbină (corespunzător presiunii reţelei de distribuţie), debitul conductei rezultă din relaţia

$$G = \frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{g}{0{,}009407\,Z\,R}}\cdot\frac{p_0}{\sqrt{T_0}}\frac{D^{8/3}}{\sqrt{l}}\sqrt{1-\left(\frac{p_s}{p_0}\right)^2}. \tag{7}$$

Utilizînd pentru puterea turbinei o expresie valabilă în cazul gazelor ideale:

$$P = \frac{1}{102}\,G\,\frac{\varkappa}{\varkappa-1}\,RT_s\left[1-\left(\frac{p_i}{p_s}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right]\eta_{it}, \tag{8}$$

rezultă

$$P = \frac{\pi}{408}\cdot\frac{\varkappa}{\varkappa-1}\cdot\sqrt{\frac{g\,R}{0{,}009407\,Z}}\,p_0\sqrt{T_s}\,\eta_{it}\frac{D^{8/3}}{\sqrt{l}}\left[1-\left(\frac{p_i}{p_s}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right]\sqrt{1-\left(\frac{p_s}{p_0}\right)^2}. \tag{9}$$

Cunoscînd presiunea de pornire p_0 a conductei şi cea a reţelei de distribuţie p_i, se poate determina presiunea p_s care trebuie să existe la sfîrşitul conductei pentru a obţine cea mai mare putere. Condiţia de maxim

$$\frac{\partial P}{\partial p_s} = 0 \tag{10}$$

duce la relaţia

$$\left(\frac{p_i}{p_s}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} + (\varkappa-1)\left(\frac{p_i}{p_s}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\cdot\left(\frac{p_0}{p_s}\right)^2 - \varkappa = 0. \tag{10'}$$

Puterii maxime îi corespunde funcţia

$$X\left(\frac{p_0}{p_i}\right) = \left\{\left[1-\left(\frac{p_i}{p_s}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right]\sqrt{1-\left(\frac{p_s}{p_0}\right)^2}\right\}_{P_{\max}}, \tag{11}$$

care poate fi exprimată numai ca funcţie implicită a argumentului $\frac{p_0}{p_i}$ prin relaţiile (10') şi (11'):

$$X\left(\frac{p_0}{p_i}\right) = \sqrt{\frac{\left[1-\left(\frac{p_i}{p_s}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right]^3}{1-\frac{1}{\varkappa}\left(\frac{p_i}{p_s}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}}}. \tag{11'}$$

Puterea ce poate fi instalată în mod rațional într-o turbină de trecere reprezintă numai o parte a puterii maxime în regim staționar calculată mai sus:

$$P = f_{\text{inst}} P_{\max}. \tag{12}$$

Valori orientative asupra mărimii *factorului de instalare* f_{inst} rezultă analizînd cîteva conducte din țara noastră pentru care dispunem de date asupra funcționării lor efective.

Se observă că „factorul de instalare" are valori de ordinul

$$f_{\text{inst}} \approx 0{,}5$$

și este prin definiție subunitar (pentru regimuri staționare).

În mod analog se poate defini un „factor de utilizare a conductei" f_{cond} ca raport al debitului transportat efectiv într-un an de conducta și capacitatea ei maximă de transport:

$$G = f_{\text{cond}} G_{\max}. \tag{12'}$$

Valoarea medie pentru toate conductele din R.P.R. a acestui factor a fost în 1961

$$f_{\text{cond}} = 0{,}541.$$

Cazul general — conducte cu mai multe puncte de alimentare, ramificații și schimbări ale numărului și dimensiunilor tuburilor în paralel, cu stații de recomprimare pe traseu se poate rezolva prin reducerea la o conductă echivalentă din punctul de vedere al producerii energiei. Începutul conductei se consideră, în cazul existenței stațiilor de recomprimare, la ultima stație de compresoare; conducta ramificată astfel obținută, se deosebește de cazul simplu discutat anterior prin complicațiile introduse de schimbările de diametru ale conductei, schimbarea numărului de conducte legate în paralel pe diferitele porțiuni și de variațiile de debit datorite aportului de gaz în punctele de alimentare, respectiv scăderilor după punctele de plecare ale ramificațiilor.

Conducta considerată se divizează în tronsoane prin „noduri", în care survine fie o schimbare de diametru, fie o schimbare a numărului conductelor, fie o schimbare de debit. Dacă între două noduri succesive există mai multe conducte în paralel, iar un consumator (sau punct de alimentare) intermediar este legat numai la una din ele „triunghiul" respectiv se înlocuiește cu o conductă echivalentă și un consumator (sau punct de alimentare) de aceeași mărime în modul următor (fig. 4).

Notînd

$$\vartheta = \frac{l}{D^{16/3}} \tag{13}$$

și μ creșterea relativă de debit în punctul M, obținem pentru tronsonul de conducte echivalent porțiuni cuprinse între nodurile A și B valoarea

$$z^2 \vartheta_{AB}, \tag{14}$$

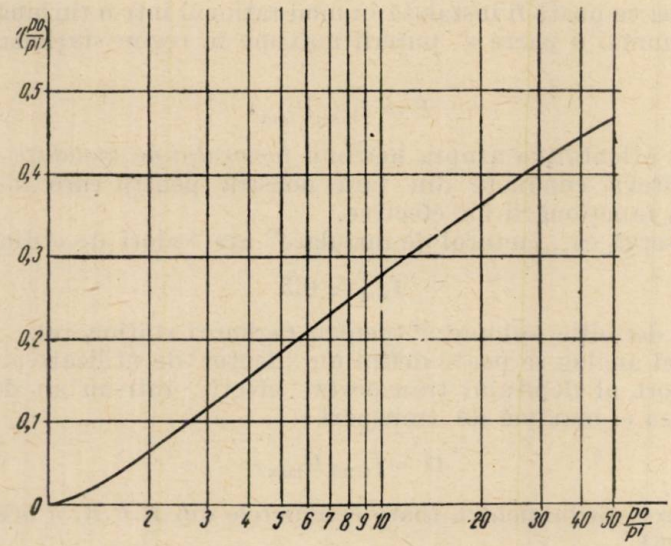


Fig. 3. — Dependența funcției $X\left(\frac{p_0}{p_i}\right)$ de raportul presiunii de pornire a conductei p_0 la presiunea nominală a rețelei de distribuție p_i pentru metan.

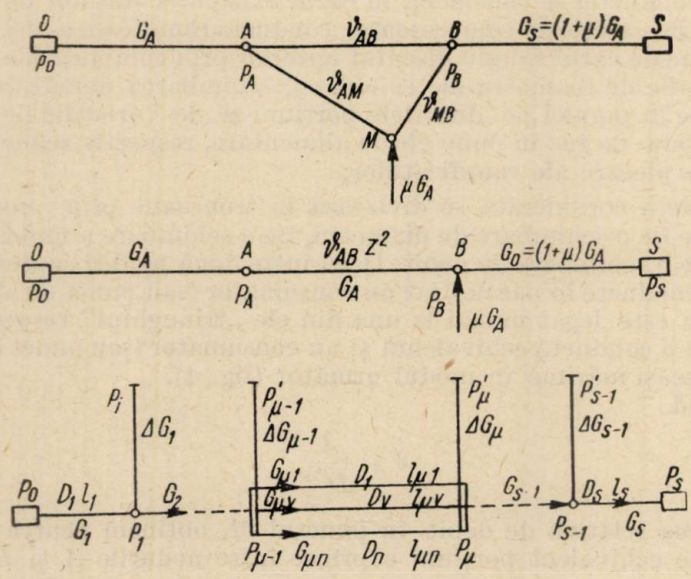


Fig. 4. — Notațiile la o conductă ramificată.

unde

$$z = \frac{\vartheta_{AM} + \vartheta_{MB}(1+\mu) - \sqrt{\vartheta_{AB}[\vartheta_{AM} + \vartheta_{MB}(1+\mu)^2] - \mu^2 \vartheta_{AM}\vartheta_{MB}}}{\vartheta_{AM} + \vartheta_{MB} - \vartheta_{AB}}, \quad (15)$$

conducta cu parametrul $z^2\,\vartheta_{AB}$ fiind parcursă de același debit G_A ca tronsonul precedent.

Conducta fiind redusă acum la tipul fără bucle, se calculează coeficienții

$$\xi_\mu = \frac{\dfrac{1}{\left(\sum\limits_{\nu=1}^{n} \dfrac{D_{\mu\nu}^{8/3}}{\sqrt{l_{\mu\nu}}}\right)^2}}{\sum\limits_{\mu=1}^{s} \dfrac{1}{\left(\sum\limits_{\nu=1}^{n} \dfrac{D_{\mu\nu}^{8/3}}{\sqrt{l_{\mu\nu}}}\right)^2}} \quad (16)$$

și obținem valoarea raportului debitului ultimului tronson la debitul conductei echivalente, $\frac{G_s}{G}$, cunoscînd debitele relative din noduri

$$\frac{G_s}{G} = \sqrt{\frac{1}{\xi_s}\left[1 - \sum_{\mu=1}^{s-1} \xi_\mu \left(\frac{G_1}{G} + \sum_{\nu=1}^{\mu-1} \frac{\Delta G_\nu}{G}\right)^2\right]}. \quad (17)$$

Prin calcule algebrice simple se obține expresia puterii

$$\frac{P}{p_0\sqrt{T_0}} = \frac{\pi}{408}\,\frac{\varkappa}{\varkappa - 1}\sqrt{\frac{gR}{0{,}009407\,Z}} \cdot \sqrt{\frac{1}{\sum\limits_{\mu=1}^{s} \dfrac{1}{\left(\sum\limits_{\nu=1}^{n} \dfrac{D_{\mu\nu}^{8/3}}{\sqrt{l_{\mu\nu}}}\right)^2}}} \cdot$$

$$\cdot \frac{G_s}{G} \cdot \frac{C_{pms}}{C_{pm0}}\,\frac{T_s}{T_0}\,X\left(\frac{p_0}{p_i}\right) \cdot \eta_t \cdot f_{\text{inst}}, \quad (18)$$

în care factorii reprezintă succesiv influența naturii gazului, a geometriei conductei, a regimului consumatorilor și punctelor de alimentare de pe traseu, a încălzirii, a nivelului relativ de presiune necesar distribuției, a calității mașinii și a factorului de instalare a puterii (pentru a obține o durată de utilizare ridicată a puterii instalate).

Debitul conductei cu o configurație complicată se exprimă prin relația :

$$\frac{G\sqrt{T_0}}{p_0} = \frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{g}{0{,}009407\,ZR}} \cdot \sqrt{\frac{1}{\sum\limits_{\mu=1}^{s} \dfrac{1}{\left(\sum\limits_{\nu=1}^{n} \dfrac{D_{\mu\nu}^{8/3}}{\sqrt{l_{\mu\nu}}}\right)^2}}} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{p_i}{p_0}\right)^2} \cdot f_{\text{cond}}, \quad (19)$$

unde geometria conductei este caracterizată prin același factor ca în relația puterii (18).

Împărțind relația (18) la (19) și exprimînd puterea în MW și debitul în $10^6 Nm^3/zi$, obținem expresia :

$$\frac{P}{G} = 4{,}08 \frac{X\left(\frac{p_0}{p_i}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{p_i}{p_0}\right)^2}} \cdot \frac{C_{pm_3}\, T_s}{C_{pm0}\, T_0} \cdot \frac{f_{\text{inst}}}{f_{\text{cond}}} \frac{\text{MW}}{10^6 Nm^3/zi}, \qquad (20)$$

care leagă puterea turbinei de trecere de debitul transportat prin conductă. Relația de mai sus a fost nomografiată (fig. 5) și permite să se determine puterea turbinei de trecere funcție de debitul de gaz G, raportul dintre presiunea de pornire a conductei p_0 și presiunea rețelei de distribuție p_i, temperatura de încălzire înainte de turbină T_s și raportul „factorului de instalare" a turbinei și „factorului de utilizare a conductei". Acest raport, care are valori vecine de unitate, se poate exprima și prin duratele de utilizare anuale a debitului maxim al conductei și al puterii maxime a turbinei

$$\frac{f_{\text{inst}}}{f_{\text{cond}}} = \frac{t_{\text{putere}}}{t_{\text{debit}}}.$$

Se observă că puterea turbinei de trecere este relativ mare tocmai în cazul C.T.E. unde presiunea în rețeaua de alimentare cu gaz a arzătoarelor cazanului de abur este de ordinul $p_i \approx 1{,}5$ ata.

Pentru a se ajunge la puterile calculate cu nomograma din figura 5, este necesar ca regimul de funcționare al conductei să fie cel economic din punctul de vedere al ansamblului conductă-turbină (de obicei în exploatarea curentă a conductelor de transport nu se ține seama de puncte de vedere energetice).

3. INFLUENȚA SCHEMEI TERMICE ASUPRA ECONOMICITĂȚII APLICĂRII TURBINELOR DE TRECERE ÎN CENTRALE TERMOELECTRICE

Centralele termoelectrice cu turbine de abur, prin existența prizelor pentru preîncălzirea regenerativă a apei de alimentare, oferă posibilitatea de a încălzi gazul natural destinat destinderii în turbina de trecere în mod rațional din punct de vedere termodinamic. De asemenea, există posibilitatea de a utiliza căldura fizică a gazelor evacuate din turbină cu ocazia arderii lor în focarul cazanului de abur. Prin legătura strînsă care se creează astfel între turbine de trecere și ciclul de abur sîntem conduși să considerăm ansamblul format ca o clasă particulară de cicluri mixte.

3.1. CLASA DE CICLURI MIXTE ABUR-TURBINĂ DE TRECERE

În figura 6 sînt prezentate, în ordinea unei temperaturi crescînde la intrarea în turbină, cîteva cicluri bazate pe folosirea energiei potențiale a gazelor naturale în C.T.E. cu aburi.

Turbina de trecere fără preîncălzirea gazului natural (fig. 6*a*) este soluția cea mai simplă. Ea are o pondere în producția de energie electrică a centralei de ordinul $E_{Tt} = (1 - 1{,}5\%)\ E_{CTE}$; conduce la mărirea randamentului $\Delta\eta_{CTE} = (1 - 1{,}5\%)\ \eta_{CTE}$ și permite să se realizeze o economie de combustibil de același ordin de mărime.

Turbina de trecere cu preîncălzirea gazului natural folosind prizele turbinei de abur (fig. 6*b*) rezolvă problema încălzirii cu creșteri de entropie foarte mici, deci rațional din punct de vedere termodinamic. Scheme de acest fel permit încălzirea gazului la temperaturi de ordinul 230°C și obținerea la turbina de trecere a unei energii $E_{Tt} = (1{,}6 - 3{,}4\%)\ E_{CTE}$. Creșterea relativă de randament este ceva mai mare decît valorile (1,1 — 2,2%) obținute din figurile 5 și 6, la construirea cărora nu s-a ținut seama de faptul că aburul folosit pentru preîncălzirea gazului a produs energie electrică în turbina de abur.

Calcule amănunțite efectuate pentru aplicarea unor scheme ca în figura 12, la CTE cu parametri : 140 ata, 570°C cu supraîncălzirea intermediară la 31 ata și presiune de 0,04 ata în condensator, au arătat că este avantajos să se încălzească gazul natural la temperaturi cît mai ridicate cu abur preluat de la prizele turbinei, atît din punctul de vedere al creșterii randamentului (deci al economiei de combustibil), cît și din punct de vedere economic, pe baza criteriului cheltuielilor anuale de calcul.

Încălzirea gazului natural cu abur preluat de la cazan (fig. 6 *c*) permite ridicarea temperaturii lui la 330 —350°C. În acest fel crește puterea turbinei de trecere la $E_{Tt} = (2{,}8 - 4{,}3\%)\ E_{CTE}$ și se obține o creștere a randamentului mai mare (funcție de numărul de preîncălzitori) decît valorile (1,6 —2,9%) cuprinse în figurile 5 și 6. În această categorie de cicluri se încadrează turbina de trecere de 3,5 MW din centrala Artix (Franța) de 125 MW.

Încălzirea directă a gazelor naturale cu gaze de ardere permite ridicarea temperaturii lor la o valoare — limitată numai de disocierea metanului — de ordinul a 400°C (fig. 6*d*). Turbina de trecere poate produce în acest caz energia $E_T - 3{,}2 - 4{,}8\%\ E_{CTE}$ și realizează o creștere relativă a randamentului centralei de 1,7 —3,2%. Schema poate fi ameliorată din punct de vedere termodinamic prin intercalarea unor preîncălzitoare cu abur de la prizele turbinei înaintea încălzitorului gaz-gaz.

Temperatura la intrarea în turbina de trecere poate fi ridicată la valori de 700 —800°C, uzuale în construcția turbinelor cu gaze, numai cu condiția inhibării formării particulelor de carbon solid, periculoase pentru paletajul mașinii. Acest lucru poate fi obținut injectînd apă sau abur în gazul metan supus încălzirii. Încălzirea se poate realiza în schimbătoarele de căldură prin amestec, avantajoase din punct de vedere termodinamic și economic. Agentul de lucru obținut — un amestec de CH_4, vapori H_2O, H_2, CO, CO_2 și N_2 — este apoi ars în focarul cazanului de abur (fig. 6 *e*).

Datorită măririi cantității agentului de lucru prin adăugarea la cantitatea inițială de gaz metan a aburului și gazelor de ardere, crește energia dezvoltată de turbina de gaze mult peste valorile din figura 2.

Destinderea, în exemplul din figură, a fost împărțită în două trepte, între care s-a intercalat o încălzire intermediară. Compresorul de aer

(necesar alimentării cu aer comprimat a camerelor de ardere) are de asemenea două trepte separate printr-un răcitor intermediar.

Asemenea cicluri devin interesante prin economia mare de combustibil (de ordinul a 7,0%) pe care o realizează, dar pentru a fi aplicate necesită deocamdată încă cercetări.

În concluzie, economia de combustibil crește o dată cu mărirea temperaturii înaintea turbinei de trecere în ordinea ciclurilor (fig. 6); în aceeași ordine scad cheltuielile de calcul, dar cresc dificultățile tehnice legate de realizarea instalației.

Printre problemele tehnologice specifice acestor cicluri semnalăm disocierea gazelor naturale, formarea criohidraților și probleme de ardere ale combustibilului gazos în noi condiții termice.

3.2. INFLUENȚA CONSIDERENTELOR ECONOMICE ASUPRA ALEGERII SCHEMEI TERMICE

Încălzirea gazului înaintea turbinei conduce în toate cazurile la o economie de combustibil care poate justifica realizarea turbinei de trecere chiar dacă investiția specifică necesară este mai ridicată decît în C.T.E. moderne de mare putere.

Pentru a aborda cantitativ această chestiune vom utiliza criteriul „cheltuielilor de calcul" și considerăm avantajoasă soluția care conduce la cheltuielile de calcul cele mai mici.

Cunoscînd cheltuielile anuale

$$C = (\alpha + \beta + \gamma)\, aP_i + p_q\, q\, P_i\, t_i, \tag{21}$$

cheltuielile de calcul se obțin din

$$Z = C + \frac{1}{n}(aP_i + mq\, P_i\, t_i), \tag{22}$$

unde termenul din paranteză reprezintă investițiile totale.

Comparația dintre centrale cu turbine de trecere și C.T.E. o efectuăm în ipoteza echivalenței energiilor produse anual și considerăm turbinele de trecere avantajoase din punct de vedere economic dacă

$$\frac{Z}{P_i\, t_i} < \left(\frac{Z}{P_i\, t_i}\right)_{\text{CTE}}. \tag{23}$$

Astfel ajungem la relația

$$a\,\frac{1 + (\alpha + \beta + \gamma)\, n}{n\, t_i} + q\left(p_q + \frac{m}{n}\right) < a_{\text{CTE}}\,\frac{1 + (\alpha + \beta_{\text{CTE}} + \gamma_{\text{CTE}})\, n}{n\, t_{i\,\text{CTE}}} + \\ + q_{\text{CTE}}\left(p_q + \frac{m}{n}\right), \tag{24}$$

care compară parametrii economici ai unei centrale echipate cu turbină de trecere cu o centrală reprezentativă.

Cunoscînd din calculul termic al schemei ciclului mixt creşterea randamentului centralei datorită instalării turbinei de trecere $\frac{\Delta\eta_{CTE}}{\eta_{CTE}}$ şi ponderea puterii turbinei de trecere $\frac{P_{Tt}}{P_{CTE}}$, putem explicita uşor investiţia specifică admisibilă pentru turbine de trecere:

$$a_{Tt} < a_{CTE} \cdot \frac{t_{i\,Tt}}{t_{i\,CTE}} \cdot \frac{[1+(\alpha+\beta_{CTE}+\gamma_{CTE})\,n]}{[1+(\alpha+\beta_{Tt}+\gamma_{Tt})\,n]} + \\ + \frac{\frac{\Delta\eta_{CTE}}{\eta_{CTE}}}{1+\frac{\Delta\eta_{CTE}}{\eta_{CTE}}}\, q_{CTE}\left(p_q+\frac{m}{n}\right)\cdot \frac{n\left[t_{i_{Tt}}+t_{i_{CTE}}\frac{P_{CTE}}{P_{Tt}}\right]}{[1+(\alpha+\beta_{Tt}+\gamma_{Tt})\,n]}. \qquad (25)$$

Calculele numerice arată că aproape în toate cazurile din R.P.R. cînd turbina de trecere se aplică în unităţi de cel puţin 500 kW, condiţia (25) este satisfăcută.

3.3. ECONOMICITATEA APLICĂRII TURBINELOR DE TRECERE ÎN CENTRALE ELECTRICE DE TERMOFICARE

Centralele electrice de termoficare care utilizează şi combustibil gazos natural sînt deosebit de interesante din punctul de vedere al posibilităţilor de aplicare a turbinelor de trecere.

Consumul de combustibil al C.T.E. depinde nu numai de producţia anuală de energie electrică (în regim de termoficare) E_{CET} kWh/an, ci şi de producţia anuală de căldură Q_{CET} Gcal/an:

$$B = b_e\, E_{CET} + b_t\, Q_{CET}. \qquad (26)$$

Raportul celor două forme de energie livrate de CET se exprimă prin indicele de termoficare y_p, valoarea medie anuală

$$y_p^a = \frac{E_{CET}}{Q_{CET}} \qquad (27)$$

fiind cuprinsă de obicei între $y_p^a = (300-500)$ kWh/Gcal pentru C.E.T. de putere mare din ţara noastră.

Ponderea producţiei de energie electrică a turbinei de trecere (raportată la producţia de energie electrică în regim de termoficare)

$$\frac{E_{Tt}}{E_{CET}} = \frac{T_s\, c_{pms}}{P_{ci}}\left[1-\left(\frac{p_i}{p_s}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right]\eta_{Tt}\cdot\frac{7000}{860}\left(b_e+b_t\frac{1}{y_p^a}\right) \qquad (28)$$

este mai ridicată decît într-o C.T.E. (3).

Faptul că prin turbina de trecere se destinde un debit de gaz mai mare decît cel necesar producerii de energie electrică în regim de termoficare se reflectă prin valorile factorului

$$\frac{7\,000}{860}\left(b_e + b_t \frac{1}{y_p^a}\right) = 4{,}5 \div 6{,}5 \qquad \text{pentru C.E.T.}$$

(față de aproximativ 2,5 — 3 pentru C.T.E.).

Pentru a ne orienta asupra valorilor pe care le poate atinge într-o C.E.T. ponderea turbinei de trecere, se pot folosi figurile 3—4 prin analogia :

$$\frac{\eta_{Tt}}{\eta_{\text{CTE}}} \longleftrightarrow \frac{7\,000}{860}\,\eta_{Tt}\left(b_e + b_t \frac{1}{y_p^a}\right)$$

(unde expresia din dreapta are valorile 4—5), înmulțind valorile citite în ordonată cu 2.

De exemplu, într-o C.E.T. cu grupuri VPT—50—4, dacă înaintea turbinei de trecere temperatura gazului este adusă la 330°C, obținem o pondere de $E_{Tt} = (6 \div 8\%)\, E_{\text{CET}}$, deci turbine de trecere de 3 — 4 MW.

Trebuie să se observe însă că turbina de trecere nu funcționează în „bloc" cu o turbină de abur, ci cu conducta de transport prin care e alimentată sau (dacă centrala e alimentată de la o singură conductă) cu cazanul de abur.

Variațiile consumului de căldură se reflectă în durata de utilizare a turbinei de trecere atenuat, prin variațiile debitului de gaze naturale.

Indicele de termoficare a unei C.E.T. crește datorită instalării turbinei de trecere (întrucît presupunem că nu se schimbă producția anuală de căldură)

$$(y_p^a)_{\text{total}} = (y_p^a)_{\text{CET}} + (y_p^a)_{Tt} = y_p^a\left(1 + \frac{E_{Tt}}{E_{\text{CET}}}\right) \tag{29}$$

cu aproximativ $(y_p^a)_{Tt} = 20 - 40$ kWh/Gcal. Dacă s-ar aplica un ciclu mixt cu conversiunea parțială a metanului, indicele de termoficare ar crește cu aproximativ 40%.

În concluzie, comparînd C.E.T. cu o C.T.E. de aceeași putere electrică și aceiași parametri ai aburului, în C.E.T. se poate instala în turbine de trecere o putere aproximativ dublă (deci cu investiții specifice mai mici) și se poate obține o economie de combustibil (raportată la producția de energie electrică a C.E.T.) de asemenea dublă.

4. CONCLUZII

Funcționarea turbinei de trecere depinde ca debit și regim de presiuni de conducta de transport, iar ca regim termic de C.T.E. Pentru a stabili mărimea mașinii se poate utiliza relația (20), care leagă puterea turbinei de capacitatea de transport a conductei.

Regimul de presiune a conductei de transport trebuie ales pe baza criteriului economicității ansamblului conductă-turbină de trecere.

Din punctul de vedere al economiei de combustibil este avantajos ca temperatura înaintea turbinei de trecere să fie cît mai ridicată ; economia maximă, de ordinul a 7%, o aduc ciclurile mixte cu conversiunea parțială a metanului.

Încălzirea cu abur de la prizele turbinei și eventual cu abur de înaltă presiune preluat înaintea supraîncălzitorului cazanului este o soluție imediat realizabilă și avantajoasă din punct de vedere economic.

NOTAȚII

a	lei/kW	— investiții specifice în centrală ;
b_e	kgcc/kWh	— consumul specific de combustibil convențional pentru producere de energie electrică ;
b_t	kgcc/Gcal	— consumul specific de combustibil convențional pentru producerea de căldură ;
c_p	kcal/kg	— căldură specifică la presiune constantă ;
f		— factor de utilizare ;
g	m/s^2	— accelerația gravitației ;
l	m	— lungime ;
m	lei/tcc an^{-1}	— investiții specifice în mine ;
n	an	— durata normată de recuperare a investițiilor ;
p	kg/m^2	— presiune ;
p_n	1/an	— coeficient normat de eficacitate economică ;
p_q	lei/tcc	— prețul combustibilului convențional ;
q	tcc/kWh	— consum specific de combustibil convențional ;
t_i	ore/an	— durata de utilizare a puterii instalate ;
y_p^a	kWh/Gcal	— valoarea medie anuală a indicelui de termoficare ;
C	lei/an	— cheltuieli anuale ;
D	m	— diametru ;
E	kWh	— energie electrică produsă ;
G	kg/s	— debit gaze naturale ;
P	kW	— putere ;
P_{ci}	kcal/kg	— putere calorifică inferioară ;
Q	Gcal	— cantitate de căldură ;
R	kgm/kggrad	— constanta gazului ;
T	°K	— temperatură absolută ;
X		— funcție a raportului între presiunea de pornire a conductei și presiunea rețelei de distribuție ;
Z	lei/an	— cheltuieli de calcul ;
α		— coeficient de amortizări ;
β		— coeficient al cheltuielilor fixe (salarii, întreținere, cheltuieli de conducere, impozite, asigurări) ;
γ		— coeficient al cheltuielilor de mers în gol ;
η		— randament ;
ϑ	m$^{-13/3}$	— parametru geometric ;

$\varkappa$ — exponent adiabatic;
ξ — coeficient funcţie de geometria conductei;
τ s — timp.

INDICII PRINCIPALI

CTE — centrală termoelectrică de comparaţie;
CET — centrală electrică de termoficare;
T_t — turbine de trecere, incluzînd toate modificările pe care le impune realizarea ei;
(fără indice) — centrala mixtă care se realizează prin instalarea unei turbine de trecere într-o C.T.E. clasică;
0 — starea mediului;
1 — înaintea turbinei de trecere;
2 — după turbina de trecere;
i — inferior;
s — superior;
t — turbină.

Primit la redacţie la 10 mai 1964

BIBLIOGRAFIE

1. C. A. VASILESCU, V. PIMSNER şi P. SVORONOS, *Exploatarea gazelor naturale.* Bucureşti, Edit. Acad. R.P.R., 1962.
2. I. D. STĂNCESCU, *Bazele tehnice şi economice ale termoficării* (cap. 3, 11, 16), Bucureşti, Edit. tehnică, 1961.
3. K. SCHROEDER, *Grosse Dampfkraftswerke*, vol. I. Springer, 1959, 184—190 şi 402—408.
4. LESCOEUR, *La récuperation de l'énergie de detente à la centrale d'Artix.* La technique moderne, **L II** *5*, 26—32 (1960).
5. I. CSERVENY, *Asupra funcţionării ansamblului conductă de transport-turbină în regimuri staţionare.* St. cerc. energ., **XII**, *3* (1962).
6. I. CSERVENY, *Unele consideraţii la alegerea turbinelor pentru destinderea gazelor transportate prin conducte. Energetica*, **11**, *6*, 247—252 (1963).

CÎMPUL DINTRE DOUĂ ARMĂTURI CILINDRICE CU AXELE PARALELE

DE

AUGUSTIN MORARU

621.3.013

În unele studii teoretice și în multe aplicații tehnice prezintă interes cunoașterea repartiției cîmpului dintre două armături cilindrice. Întrucît în literatura de specialitate nu s-a acordat atenție acestei chestiuni, dînd numai unele soluții în cazuri particulare, se va încerca în prezenta lucrare să se dea o soluție generală și exactă a problemei, cît și formule de bună aproximare mai ușor de folosit în calcule practice.

Cîmpul dintre două armături cilindrice cu axe paralele se poate studia plecînd de la cîmpul creat de două fire paralele O_1 și O_2 încărcate cu densitățile liniare de sarcină $-\tau$ și $+\tau$ [1], [2], [3]. Cîmpul fiind plan, se studiază numai într-o secțiune perpendiculară (fig. 1). Potențialul (logaritmic) creat de cele două fire într-un punct curent M (x, y) este

$$U = \frac{2\tau}{\varepsilon} \ln \frac{r_1}{r_2} + U_0, \tag{1}$$

ε fiind permitivitatea constantă a mediului considerat omogen, r_1 și r_2 distanțele de la punctul M la firele O_1 și O_2, iar U_0 este potențialul de referință al punctelor de la infinit.

Suprafețele echipotențiale sînt cilindri, respectiv cercuri în planul de secțiune, cu axele în planul firelor O_1 și O_2 și paralele cu acestea. Dacă $2d = \overline{O_1O_2}$ este distanța între fire, raza R a unui cilindru echipotențial și distanța $a = \overline{O\,C}$ a axului acestui cilindru față de planul mediator al firelor O_1 și O_2 sînt legate prin relația

$$a^2 = R^2 + d^2. \tag{2}$$

Intensitatea cîmpului într-un punct este orientată normal la suprafața echipotențială care trece prin acel punct și are valoarea

$$E = |\operatorname{grad} U| = \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2}. \tag{3}$$

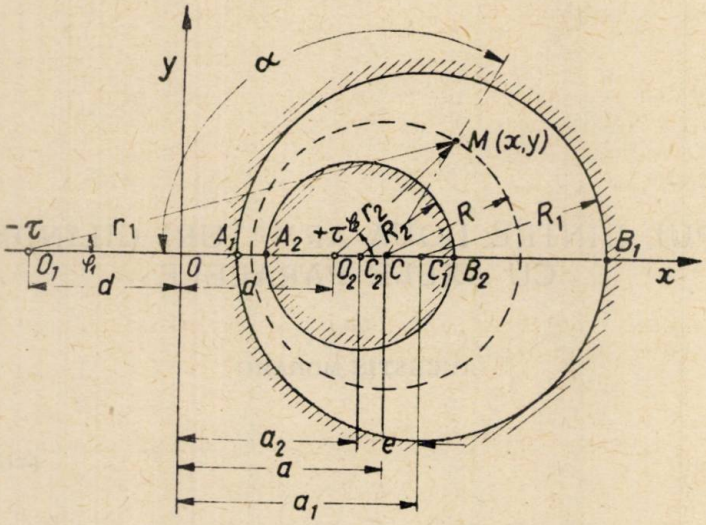


Fig. 1. — Notații pentru deducerea cîmpului dintre două armături cilindrice.

Cu notațiile din figura 1, după unele calcule se deduce expresia

$$E = \frac{2\tau}{\varepsilon} \frac{2d}{\sqrt{(x^2 + y^2 + d^2)^2 - 4x^2d^2}} = \frac{2\tau}{\varepsilon} \frac{2d}{r_1 r_2}. \tag{4}$$

Cîmpul a doi cilindri de raze R_1 și R_2, cu distanța $e = \overline{C_2C_1}$ între axele lor paralele, se studiază cu aceleași formule, punînd condiția ca firele încărcate O_1 și O_2 să fie astfel așezate în raport cu cei doi cilindri, încît aceștia să fie suprafețe echipotențiale în cîmpul creat. Aplicînd relația (2) celor doi cilindri, rezultă relațiile necesare

$$a_1 = \frac{R_1^2 - R_2^2 + e^2}{2e} = a_2 + e, \tag{5}$$

$$d = \sqrt{a_1^2 - R_1^2} = \sqrt{a_2^2 - R_2^2}. \tag{6}$$

În figura 1 s-a considerat cazul particular în care $R_1 > R_2$ și un cilindru este în interiorul celuilalt. Relațiile rămîn însă valabile și în cazul general dacă în relațiile (5) și (6) distanțele $a_1 = \overline{OC_1}$, $a_2 = \overline{OC_2}$ și $e = \overline{C_2C_1}$ se consideră segmente orientate, adică pozitive cînd se măsoară

în sensul pozitiv al axei absciselor și negative cînd se măsoară în sens invers.

Diferența de potențial dintre cei doi cilindri se determină cu formula (1), aplicată succesiv în punctele A_1 și A_2 (sau B_1 și B_2) din figura 1. După unele calcule se obține

$$U_{12} = U_2 - U_1 = \frac{2\tau}{\varepsilon} \ln \frac{R_1}{R_2} \frac{a_2 + d}{a_1 + d}. \tag{7}$$

Studiile clasice se mărginesc să aducă problema pînă la acest punct, completînd-o eventual cu calculul capacității dintre cele două armături, calcul care se reduce de fapt la o împărțire [1]). Expresiile care rezultă după înlocuirea valorilor (5) și (6) sînt însă foarte complicate și nu pot fi folosite în calcule practice (vezi, de exemplu, [3]). Un studiu mai aprofundat a permis însă punerea în evidență a anumitor proprietăți, care au dus la simplificări esențiale ale formulelor, făcîndu-le accesibile calculelor practice.

Este deosebit de interesant faptul că pe un același cilindru echipotențial, a cărui secțiune normală are ecuația

$$(x - a)^2 + y^2 = R^2, \tag{8}$$

unde a și R satisfac relația (2), intensitatea cîmpului se exprimă prin relația simplă

$$E_{\text{echipot}} = \frac{2\tau}{\varepsilon} \cdot \frac{d}{Rx}. \tag{9}$$

Notînd cu α unghiul de înclinare a razei CM față de direcția negativă a axei absciselor , expresia (9) se poate pune sub forma

$$E_{\text{echipot}} = \frac{2\tau}{\varepsilon} \frac{d}{R(a - R\cos\alpha)}. \tag{10}$$

Pentru ușurința reprezentărilor se definește o lungime medie a liniei de cîmp δ_{ec}, egală cu raportul dintre diferența de potențial U_{12} dintre armături și intensitatea locală a cîmpului :

$$\delta_{ec} = \frac{U_{12}}{E_{\text{echipot}}} = \frac{R(a - R\cos\alpha)}{d} \ln \frac{R_1}{R_2} \frac{a_2 + d}{a_1 + d}. \tag{11}$$

Ținînd seama de relațiile (2), (5) și (6), după unele calcule se ajunge la expresia

$$\delta_{ec} = \delta_0 (1 - m\cos\alpha), \tag{12}$$

[1]) Cu notațiile folosite mai departe, expresia capacității pe unitatea de lungime dintre două armături cilindrice este :

$$\frac{C}{l} = \frac{\varepsilon}{4\gamma k}.$$

unde

$$\delta_0 = R\sqrt{1+\frac{4R^2e^2}{(R_1^2+R_2^2-e^2)^2-4R_1^2R_2^2}}\times$$

$$\times \ln\frac{R_1}{R_2}\frac{R_1^2-R_2^2-e^2+\sqrt{(R_1^2+R_2^2-e^2)^2-4R_1^2R_2^2}}{R_1^2-R_2^2+e^2+\sqrt{(R_1^2+R_2^2-e^2)^2-4R_1^2R_2^2}} \quad (13)$$

și

$$m = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{(R_1^2+R_2^2-e^2)^2-4R_1^2R_2^2}{4R^2e^2}}}. \quad (14)$$

Formula finală (12) este valabilă și în cazul cîmpului magnetic dintre două armături cilindrice, de permeabilitate infinită; în acest caz δ_{ec} are semnificația de „întrefier echivalent".

Punînd în (13) și (14) $R = R_1$ sau $R = R_2$, se obține întrefierul echivalent pentru suprafețelele celor două armături, cu ajutorul căruia se poate studia variația cîmpului chiar la suprafața acestor armături.

Cu ajutorul mărimii δ_{ec} se pot efectua diferite studii, exacte sau aproximative, asupra formei de variație a cîmpului în întrefierul mașinilor electrice sau asupra unor probleme legate indirect de această formă de variație; există, de asemenea, multe aplicații în domeniul aparatelor electrice. Asupra unor aplicații se va insista însă în alte lucrări. În lucrarea de față se vor aduce noi simplificări fomulelor și se vor da formule de bună aproximație.

În studiul cîmpului din întrefierul mașinilor electrice este mai indicat a se folosi următoarele notații:

$$\text{diametrul mediu} : D_m = R_1 + R_2, \quad (15)$$

$$\text{întrefierul mediu} : \delta = R_1 - R_2, \quad (16)$$

și diametrul unui cilindru

$$\text{echipotențial} : D = 2R. \quad (17)$$

După unele calcule se stabilesc expresiile

$$\delta_0 = \frac{D}{2}\sqrt{1+\frac{D^2e^2}{(D_m^2-e^2)(\delta^2-e^2)}}\ln\frac{D_m+\delta}{D_m-\delta}\cdot\frac{D_m\delta-e^2+\sqrt{(D_m^2-e^2)(\delta^2-e^2)}}{D_m\delta+e^2+\sqrt{(D_m^2-e^2)(\delta^2-e^2)}} \quad (18)$$

și

$$m = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{(D_m^2-e^2)(\delta^2-e^2)}{D^2e^2}}}. \quad (19)$$

În cazul-limită cînd $\delta \ll D_m$, se pot folosi și formulele aproximative

$$\delta_0 \approx \frac{D}{D_m}\cdot\delta \approx \delta, \quad (20)$$

$$m \approx \frac{D}{D_m}\frac{e}{\delta} \approx \frac{e}{\delta}. \quad (21)$$

La calculul intensității cîmpului pe suprafețele armăturilor se poate obține o precizie foarte bună cu expresii mai simple decît (18), observînd că în punctele de simetrie A_1, A_2, B_1 și B_2, care se vor nota generic cu N, întrefierul echivalent se calculează suficient de exact cu formula

$$\delta_{ec\,N} = \frac{D_N}{D_N \pm \delta_N}\,\delta_N, \tag{22}$$

D_N fiind diametrul armăturii pe care este situat punctul N, δ_N distanța pînă la armătura vecină ($\delta_N = A_1A_2$ sau B_1B_2 în fig. 1), iar semnul se alege pozitiv pentru cazul cînd punctul N se află pe armătura interioară (în A_2 sau în B_2) și negativ pentru armătura exterioară (A_1 sau B_1 în fig. 1). Calculînd în acest fel întrefierul echivalent în două puncte diametral opuse, situate pe aceeași armătură, și avînd în vedere legea (12) de variație a întrefierului echivalent, cu $\alpha = 0$ în A și $\alpha = \pi$ în B, adică

$$\delta_{ec\,A} = \delta_0\,(1 - m), \tag{23 a}$$

$$\delta_{ec\,B} = \delta_0\,(1 + m), \tag{23 b}$$

se pot calcula din sistemul (23 *a*) și (23 *b*) parametrii δ_0 și m. Efectuînd calculele, se obțin expresiile

$$\delta_{01} = 2R_1\,\frac{R_1^2 - R_2^2 + e^2}{(R_1 + R_2)^2 - e^2}\,; \qquad m = \frac{2e\,R_1}{R_1^2 - R_2^2 + e^2}, \tag{24 a, b}$$

$$\delta_{02} = 2R_2\,\frac{R_1^2 - R_2^2 - e^2}{(R_1 + R_2)^2 - e^2}\,; \qquad m = \frac{2e\,R_2}{R_1^2 - R_2^2 - e^2}. \tag{25 a, b}$$

Cu notațiile (15) și (16) se obțin expresii și mai compacte

$$\delta_0 = (D_m \pm \delta)\,\frac{D_m\,\delta \pm e^2}{D_m^2 - e^2}, \tag{26}$$

$$m = (D_m \pm \delta)\,\frac{e}{D_m\,\delta \pm e^2}, \tag{27}$$

semnul pozitiv fiind valabil pentru armătura exterioară 1, iar cel negativ pentru armătura interioară 2.

Precizia obținută cu expresiile (26) și (27) este remarcabilă. Expresia (27) coincide cu (19) pe armături, iar (26) diferă de (18) numai prin termeni de ordinul 2 de micime, factorul de corecție fiind

$$k = \frac{\delta_{0\,\text{exact}}}{\delta_{0\,\text{aprox}}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{D_m^2 - e^2}{\delta^2 - e^2}}\,\ln\frac{D_m + \delta}{D_m - \delta}\cdot\frac{D_m\delta - e^2 + \sqrt{(D_m^2 - e^2)(\delta^2 - e^2)}}{D_m\delta + e^2 + \sqrt{(D_m^2 - e^2)(\delta^2 - e^2)}}. \tag{28}$$

Valoarea numerică a factorului k este foarte apropiată de unitate în toate cazurile practice.

Expresia (28) a factorului de corecție poate fi simplificată mult, observînd că este funcție numai de mărimea

$$\gamma = \sqrt{\frac{\delta^2 - e^2}{D_m^2 - e^2}}, \tag{29}$$

și anume

$$k = \frac{1}{2\gamma} \ln \frac{1+\gamma}{1-\gamma} = \frac{1}{\gamma} \operatorname{arg\,th} \gamma. \tag{30}$$

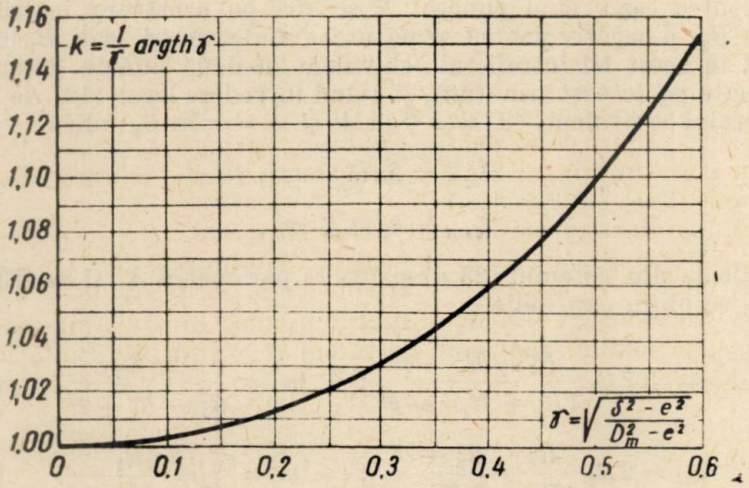


Fig. 2. — Factorul de corecție k în funcție de γ.

În figura 2 s-a reprezentat $k = f(\gamma)$ în domeniul uzual $0 \leqslant \gamma \leqslant 0{,}6$. În acest domeniu funcția de mai sus poate fi aproximată, cu o precizie mai bună de 0,2%, prin expresia

$$k \approx \frac{1 - \frac{4}{15}\gamma^2}{1 - \frac{3}{5}\gamma^2}. \tag{31}$$

Introducînd notația

$$\rho = \frac{D\,e}{D_m^2 - e^2}, \tag{32}$$

expresiile exacte ale δ_0 și m devin

$$\delta_0 = k\,D\sqrt{\rho^2 + \gamma^2}, \tag{33}$$

$$m = \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + \gamma^2}}. \tag{34}$$

Expresii și mai compacte se obțin cu notația

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\rho}{\gamma} = \frac{D\,e}{\sqrt{(D_m^2 - e^2)(\delta^2 - e^2)}}, \tag{35}$$

rezultînd

$$\delta_0 = \frac{kD\,\gamma}{\cos \psi}, \tag{36}$$

$$m = \sin \psi. \tag{37}$$

Pe suprafețele armăturilor ($D = 2\ R_1$ sau $2\ R_2$), δ_0 se exprimă prin formula analogă cu (26)

$$\delta_0 = k\,(D_m \pm \delta)\frac{D_m\,\delta \pm e^2}{D_m^2 - e^2}, \tag{38}$$

semnul pozitiv fiind valabil pentru armătura exterioară 1, iar cel negativ pentru armătura interioară 2. Factorul de modulație m este dat de expresia exactă (27).

Dacă una dintre armături este plană ($R_1 = \infty$), formulele stabilite își păstrează valabilitatea după trecere la limită. Notațiile trebuie însă modificate, întrucît în acest caz mărimile δ, D_m, e și R_1 tind simultan spre infinit. Notînd cu $\Delta = \overline{A_1 A_2}$ distanța minimă dintre armături (întrefierul geometric minim), mărimile de calcul γ, ρ și tg Ψ rezultă în acest caz din formulele

$$\gamma = \sqrt{\frac{\Delta}{2\ R_2 + \Delta}}, \tag{39}$$

$$\rho = \frac{R}{2\ R_2 + \Delta}, \tag{40}$$

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{R}{\sqrt{\Delta\,(2\ R_2 + \Delta)}}. \tag{41}$$

Pe suprafața armăturii interioare ($R = R_2$), întrefierul mediu și factorul de modulație au expresiile:

$$\delta_0 = 2\,k\,\frac{R_2\,(R_2 + \Delta)}{2R_2 + \Delta}, \tag{42}$$

$$m = \frac{R_2}{R_2 + \Delta}, \tag{43}$$

iar întrefierul echivalent variază tot după (12).

Pe armătura plană, din cauza unei noi treceri la limită ($\delta_0 \to \infty$ și $m \to 1$, dar $\alpha \to 0$), întrefierul echivalent se exprimă în funcție de coordonata periferică y (conform fig. 1) prin relația

$$\delta_{ec} = k\left(\Delta + \frac{y^2}{2\ R_2 + \Delta}\right). \tag{44}$$

În relațiile (42) și (44), factorul k este dat tot de (30) sau (31), cu γ conform (39).

Recapitulînd rezultatele obținute în lucrare, se pot face următoarele recomandări:

1. În cazul studiului cîmpului pe suprafețele armăturilor se ia ca bază formula (12) de variație a întrefierului echivalent, folosind formulele (38) și (27) pentru δ_0 și m, iar pentru k se poate folosi formula exactă (30) sau formula de foarte bună aproximație (31), γ fiind dat de (28). Dacă una dintre armături este în interiorul celeilalte (ca în fig. 1) și $\delta \ll D_m$, pentru δ_0 se poate folosi și formula de bună aproximație (26). Pentru $\delta \leqslant \frac{D_m}{100}$, chiar și formulele de aproximație grosieră (20) și (21) dau rezultate foarte bune.

2. Dacă una dintre armături este plană, la studiul cîmpului pe suprafața armăturii cilindrice se vor folosi formulele (12), (42), (43), (39) și (30) sau (31), iar pentru armătura plană formulele (44), (39) și (30) sau (31), după precizia dorită.

3. Pentru studiul cîmpului într-un punct oarecare al spațiului dintre armături se recomandă însă folosirea întrefierului echivalent, dedus direct din formula generală (4)

$$\delta_{ec} = k\gamma \frac{r_1 r_2}{d} = \frac{k\gamma}{d} \sqrt{[(x+d)^2 + y^2]\,[(x-d)^2 + y^2]}, \qquad (45)$$

vectorul intensității cîmpului în punctul de coordonate x, y avînd argumentul

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = \operatorname{arc\,tg} \frac{2xy}{x^2 - y^2 - d^2}, \qquad (46)$$

φ_1 și φ_2 fiind unghiurile razelor vectoare r_1 și r_2 față de axa absciselor (fig. 1).

Primit la redacție 10 aprilie 1964

BIBLIOGRAFIE

1. Л.П. Нейман, П.П. Калантаров, *Теоретические основы электротехники*. III, ГЭИ, Москва-Ленинград, 1954, 58—63.
2. К.А. Круг, *Основы электротехники*. ГЭИ, Москва-Ленинград, 1952, 314—315.
3. R. Rădulet, *Bazele teoretice ale electrotehnicii*. Vol. I. Inst. politehnic Bucureşti, 1953, 204—300.

STUDIUL INFLUENȚEI MOMENTULUI CANTITĂȚII DE MIȘCARE A AERULUI ASUPRA UNGHIULUI DE PULVERIZARE LA ARZĂTOARELE TURBIONARE

DE

VICTOR V. GHIA și EUGEN V. FERCALĂ

629.921

Unghiul de pulverizare este unul din factorii principali care determină caracteristicile procesului de ardere realizat de arzătoarele turbionare cu pulverizare mixtă.

De obicei, la aceste arzătoare pulverizarea se realizează atît datorită injecției mecanice la presiuni relativ scăzute, imprimîndu-se combustibilului o mișcare elicoidală, cît și datorită aerului insuflat, care efectuează tot o mișcare elicoidală.

În aceste condiții de funcționare, lucrarea își propune să studieze efectul momentului cantității de mișcare al aerului M în raport cu axa de simetrie a injectorului, mai întîi asupra rezistenței aerodinamice a carcasei arzătorului și a repartiției lichidului în jetul pulverizat, iar apoi asupra unghiului de pulverizare 2θ.

De asemenea, se va evidenția efectul geometriei injectorului asupra unghiului θ.

1. PIERDERILE DE PRESIUNE

Experimentările s-au efectuat folosindu-se instalația experimentală prezentată în figura 1.

Momentul cantității de mișcare al aerului M a fost modificat prin variația deschiderii clapetei directoare și prin variația debitului de aer insuflat.

ST. CERC. ENERG. ELECTR. TOM 14 Nr. 3 p. 691–703 BUCUREȘTI 1964

Valoarea momentului M se poate obţine cu suficientă precizie din expresia :

$$M = \frac{\gamma_0 D_a^2}{xyg} \cdot \frac{T_a}{273} \left(\frac{d-x}{2} + a \right) \text{kgfms}, \qquad (1)$$

unde

D_a este debitul de aer insuflat în arzător, în Nm^3/s ;
γ_0 — greutatea specifică a aerului, în kgf/Nm^3 ;

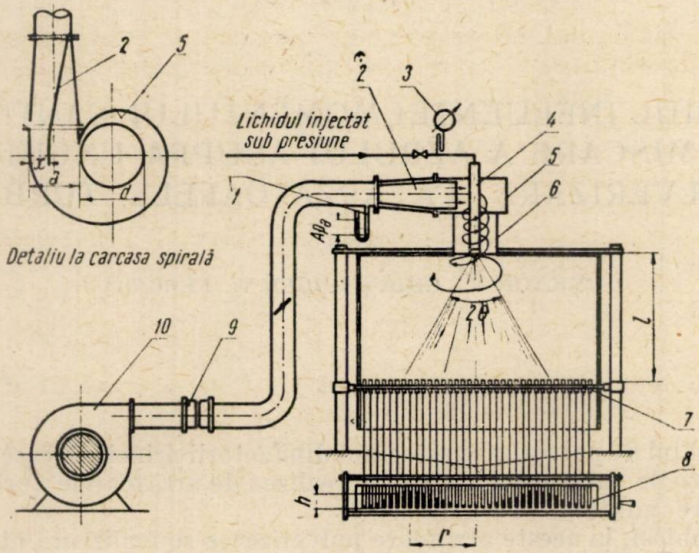


Fig. 1. — Schiţa instalaţiei experimentale :
1 — tub manometric ; *2* — clapetă directoare ; *3* — manometru ; *4* — injector ; *5* — carcasă spirală ; *6* — carcasă cilindrică ; *7* — eprubete de captat picături ; *8* — stator de captare ; *9* — dispozitiv de măsurat debitul de aer ; *10* — ventilator.

g — acceleraţia gravitaţiei, în m/s^2 ;
T_a — temperatura absolută a aerului insuflat, în °K ;
x — deschiderea clapetei, în m ;
y — lăţimea secţiunii de intrare a aerului în carcasa spirală a arzătorului, în m ;
d — diametrul porţiunii cilindrice a carcasei în m.

Pentru o anumită geometrie a carcasei arzătorului, admiţînd că temperatura mediului ambiant nu se schimbă,

$$M = C \cdot D_a^2, \qquad (2)$$

unde C este o constantă, care are diferite valori în funcţie de deschiderea clapetei.

Se poate considera că pierderile de presiune datorită accidentelor locale din carcasa arzătorului au o pondere sensibil mai mare față de piederile datorită frecărilor.

Plecînd de la formula generală

$$\Delta p_a = \sum_{i=1}^{i=n} \zeta_i \frac{W_{oi}^2 \gamma_0}{2g} \cdot \frac{T_a}{273} + \sum_{i=1}^{i=p} \lambda_i \frac{l_i}{d_i} \cdot \frac{W_{oi}^2 \gamma_0}{2g} \frac{T_a}{273},$$

pierderea de presiune totală pe traseul aerului se poate scrie sub forma:

$$\Delta p_a = C'. D_a^2. \tag{3}$$

Viteza aerului într-o porțiune oarecare se poate exprima funcție de D_a și de secțiunea de trecere respectivă. Coeficienții de pierderi de presiune locală ζ_i practic nu depind de debitul D_a, iar coeficienții de frecare λ_i sînt influențați într-o mică măsură de criteriul $\mathcal{R}e$.

Deoarece diametrele hidraulice d_i și lungimile porțiunilor considerate l_i sînt constante, iar T_a nu se modifică, pe baza afirmațiilor făcute anterior se poate considera într-o primă aproximație că C' este o constantă dependentă numai de deschiderea clapetei. Din relațiile (2) și (3) rezultă că:

$$\Delta p_a = \frac{C'}{C} \cdot M, \tag{4}$$

adică pierderea de presiune totală Δp_a ar varia liniar cu momentul M pentru aceeași geometrie de carcasă.

Primul obiectiv al cercetărilor a fost să determine în ce măsură și în ce domeniu se menține valabilă această lege de variație a momentului M cu Δp_a.

Geometria carcasei pentru o anumită deschidere a clapetei se va defini prin mărimea adimensională [1]

$$\psi = \frac{8\,M}{\pi . I . d.}. \tag{5}$$

Expresia valorii medii a impulsului aerului la ieșirea din carcasa cilindrică a arzătorului se poate scrie sub forma

$$I = \frac{4\,\gamma_0\, D_a^2\, T_a}{273\,\pi\, g d^2}. \tag{6}$$

Ținînd seama de relațiile (1) și (6), expresia caracteristicii geometrice a carcasei dată de (5) rezultă sub forma

$$\psi = \frac{d}{xy}(d - x + 2a). \tag{7}$$

Experimentările s-au efectuat pentru cinci deschideri ale clapetei, care au corespuns valorilor

$$\psi = 3{,}2\,;\ 4\,;\ 6{,}2\,;\ 10{,}6 \text{ și } 17{,}5.$$

În figura 2 se dau curbele de variaţie ale pierderii de presiune Δp pentru diferite valori ale caracteristicii geometrice ψ.

Se remarcă faptul că pentru acelaşi D_a, Δp_a este cu atît mai mare cu cît ψ este mai mare, adică cu cît clapeta directoare este mai închisă.

Studiind dependenţa dintre Δp_a şi M, rezultă următoarele:

— se poate considera cu suficientă precizie că, pentru aceeaşi valoare a lui ψ, Δp_a variază liniar cu M, ceea ce confirmă valabilitatea ipotezei făcute anterior;

— pentru $0 < M < 3.10^{-2}$ kgfms şi $3{,}2 < \psi < 17{,}5$ cu eroare mai mică ca 5%, se poate admite că, independent de ψ, Δp_a creşte proporţional cu creşterea lui M. Legea de variaţie este dată de ecuaţia

$$\Delta p_a = 5{,}27.10^3 . M. \tag{8}$$

2. REPARTIŢIA LICHIDULUI ÎN JETUL PULVERIZAT ŞI UNGHIUL DE PULVERIZARE

Întrucît literatura de specialitate nu furnizează date referitor la influenţa momentului M asupra unghiului θ, ne vom mărgini la început la estimarea calitativă a sensului de variaţie al fenomenului.

În conformitate cu datele teoretice şi experimentale referitoare la injectoarele mecanice cu cameră de turbionare, lichidul injectat este pulverizat sub forma unui hiperboloid de rotaţie [2], [3], [4]. Datorită prezenţei injectorului în partea terminală a carcasei arzătorului, valoarea maximă a vitezei axiale negative W_a, ca şi a zonei depresionare, nu se va obţine după direcţia axei (Δ). Va rezulta un vîrf de depresiune Δp, situat la distanţa R de axa (Δ). Pe măsură ce se măreşte momentul M şi caracteristica ψ, creşte atît valoarea maximă a depresiunii Δp, cît şi distanţa R.

În consecinţă, datorită aerului insuflat, asupra particulelor de lichid pulverizat vor acţiona forţe suplimentare, orientate către carcasa arzătorului, contribuind la mărirea unghiului de pulverizare.

Se poate admite că aceste forţe sînt dependente în special de valoarea depresiunii Δp, astfel că rezultă creşterea unghiului θ o dată cu creşterea lui M şi φ.

S-au experimentat patru camere de turbionare cu acelaşi diametru $d_c = 20$ mm, avînd caracteristicile geometrice [2], [3]: $A = 4{,}76$; $3{,}48$; $2{,}38$ şi $0{,}85$, folosindu-se apa drept fluid de lucru.

Din figura 3 rezultă curbele de variaţie a debitului de apă injectat B_a funcţie de presiunea de injecţie p_i.

Pentru $A = 2{,}38$, debitul injectat a fost sensibil mai mare decît în celelalte cazuri, în special deoarece s-a mărit diametrul diusei de ieşire d_e de la 1,5 la 1,8 mm.

La fiecare cameră de turbionare, experimentările s-au efectuat la patru valori ale caracteristicii geometrice $\psi = 3{,}2$; 4; $6{,}2$ şi $17{,}5$. Pentru fiecare valoare ψ s-au studiat regimurile de funcţionare corespunzătoare la trei debite de aer: $D_a = 700$; 1000 1 300 Nm³/h şi la trei presiuni de injecţie: $p_i = 3$; $6{,}5$; 10 kgf/cm².

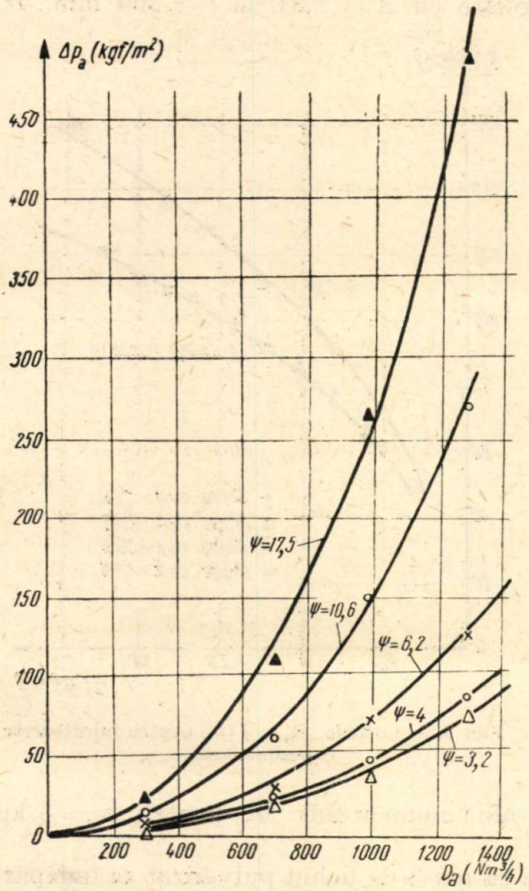


Fig. 2. — Curbele $\Delta p_a = f(D_a)$ pentru diferite valori ale caracteristicii geometrice ψ.

Mai întîi s-au ridicat curbele de variaţie a repartiţiei cantitative a lichidului în jetul pulverizat pentru regimurile de lucru arătate anterior. Pe baza acestora s-au trasat curbele de variaţie ale înălţimii procentuale h ale lichidului colectat în eprubete, funcţie de raza r, pentru o secţiune prin jumătate din jetul pulverizat (fig. 1).

Pentru exemplificare, în figura 4 se prezintă curbele $h = f(r)$ pentru camera de turbionare cu $A = 2{,}31$ la $l = 300$ mm, $D_a = 1\,300$ Nm³/h

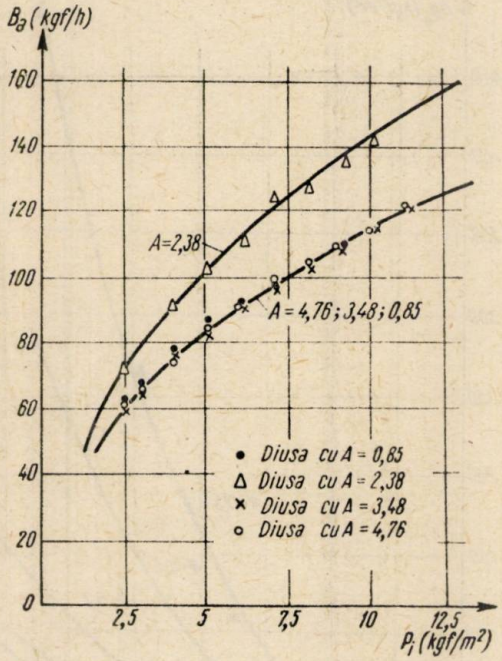


Fig. 3. — Curbele $B_a = f(p_i)$ pentru injectoarele experimentate.

şi patru valori ale momentului M, pentru $p_i = 3$ kgf/ cm² şi $p_i = 10$ kgf/cm².

Se constată că masa de lichid pulverizat se îndepărtează de axa (Δ) pentru acelaşi debit de aer D_a o dată cu creşterea momentului M, respectiv creşterea caracteristicii geometrice ψ.

La $p_i = 3$ kgf/cm², influenţa momentului M este mai sensibilă ca la $p_i = 10$ kgf/cm², astfel că se poate spune că M are o influenţă cu atît mai mică, cu cît p_i are o valoare mai mare.

De asemenea, masa de lichid se îndepărtează de axa (Δ) dacă se măreşte M, crescînd debitul de aer D_a şi menţinînd la o valoare constantă caracteristica geometrică ψ.

Plecînd de la aceste constatări, s-a căutat să se determine în ce măsură sînt influenţate curbele $h = f(r)$ atunci cînd momentul cantităţii

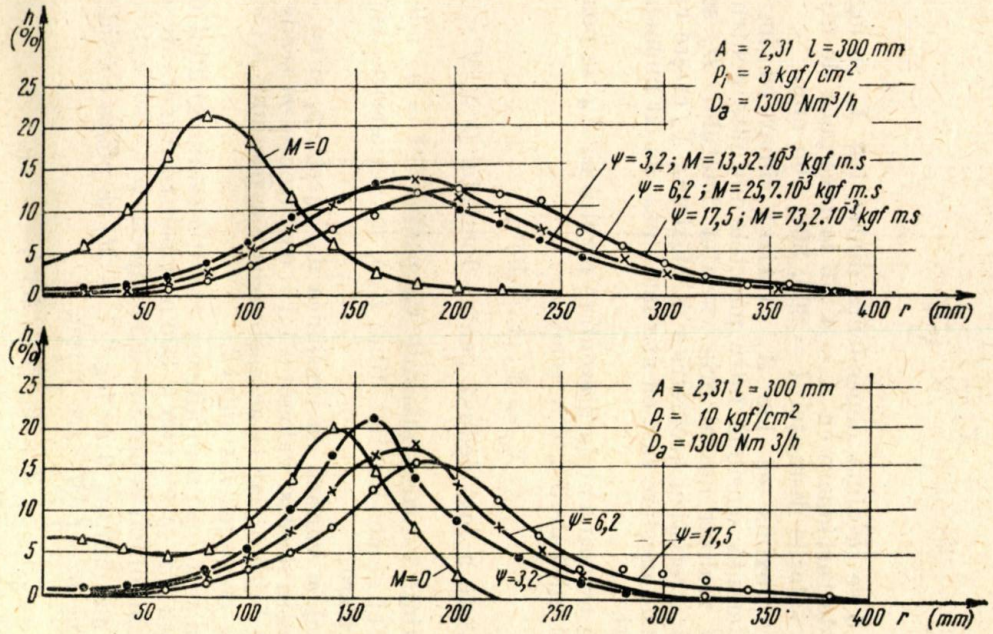


Fig. 4. — Curbele $h = f(r)$ pentru $M = 0$; $M = 13{,}32.10^{-3}$ kgfms; $M = 25{,}7.10^{-3}$ kgfms și $M = 73{,}22.10^{-3}$ kgfms, la $l = 300$ *mm*, $p_i = 3$, respectiv 10 kgf/cm²; $D_a = 1\,300$ Nm^3/h și $A = 2{,}31$.

de mişcare M este variat prin modificarea debitului D_a, menţinînd ψ constant sau variind ψ, însă menţinînd constant D_a.

Pentru a se putea compara rezultatele comod şi rapid, fiecare curbă $h = f(r)$ a fost caracterizată prin mărimea:

$$X_G = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} h_i \, r_i}{\sum_{i=1}^{i=n} h_i}. \tag{9}$$

În figura 5 se prezintă dependenţa dintre log X_G şi log $(1 + M)$ pentru camera de turbionare cu $A = 4,76$ la presiunea de injecţie $p_i = 3$ kgf/cm² şi valorile distanţei $l = 200, 300, 400$ mm.

Se poate aproxima că log X_G variază liniar cu log $(1 + M)$, neexistînd o diferenţă sensibilă între punctele obţinute pentru un anumit moment M realizat numai prin variaţia debitului D_a sau numai prin variaţia caracteristicii geometrice ψ. Mărimea X_G creşte cu mărirea lui M, însă această creştere este cu atît mai mică, cu cît momentul M are valori mai mari.

Din datele experimentale prezentate rezultă că X_G se poate deduce cu o eroare mai mică de 3% din relaţia

$$X_G = X_{G_0}(1 + M)^m, \tag{10}$$

a cărei valabilitate a fost dedusă pentru domeniul $0 < M < 73{,}2 \cdot 10^{-3}$ kgfms.

X_{G_0} reprezintă valoarea mărimii X_G pentru $M = 0$, adică pentru cazul cînd debitul de aer insuflat, fiind zero, nu acţionează asupra procesului de pulverizare.

Coeficientul m variază cu presiunea de injecţie p_i şi cu distanţa l. Astfel, pentru aceeaşi valoare a lui l coeficientul m scade cu creşterea presiunii de injecţie, iar la aceeaşi valoare a presiunii p_i, m se micşorează o dată cu creşterea distanţei l.

În figura 6 se dă ca exemplificare variaţia semiunghiului de pulverizare cu momentul M, la $l = 200$ şi 300 mm pentru camera de turbionare cu $A = 4{,}76$, funcţionînd la presiunea de injecţie $p_i = 10$ kgf/cm².

Variaţia mărimii log θ cu log $(1 + M)$ se poate considera liniară astfel că ecuaţia $\theta = f(M)$ are forma

$$\theta = \theta_0 (1 + M)^n, \tag{11}$$

unde θ_0 este semiunghiul de pulverizare, care se obţine numai la injecţie mecanică, fără să acţioneze aerul insuflat. Ecuaţia (11) a fost dedusă în domeniul $0 < M < 73{,}2 \cdot 10^{-3}$ kgfms, iar diferenţa dintre datele experimentale şi cele calculate cu această ecuaţie nu depăşeşte 3%.

Coeficientul n scade cu creşterea presiunii p_i, constatîndu-se o diferenţă puţin sensibilă între punctele corespunzătoare distanţelor $l = 200$ şi $l = 300$ mm.

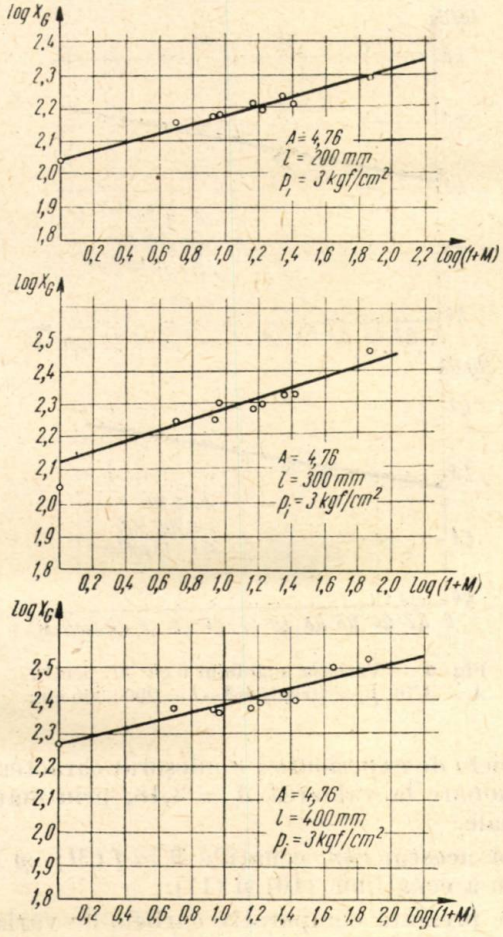


Fig. 5. — Variația mărimii X_G cu M pentru $A = 4{,}76$, $p_i = 3$ kg/cm² și $l = 200$; 300 ; 400 mm.

Rezultă că unghiul θ creşte cu M, însă această creştere este cu atît mai mică, cu cît M este mai mare. Indiferent de valoarea presiunii, pentru o anumită valoare a momentului M unghiul θ are o valoare întrucîtva mai mare pentru $l = 200$ mm, decît pentru $l = 300$ mm. Acest fenomen care este în special rezultatul acţiunii forţelor gravitaţionale asupra particulelor de lichid pulverizat, devine sensibil la $l = 400$ mm.

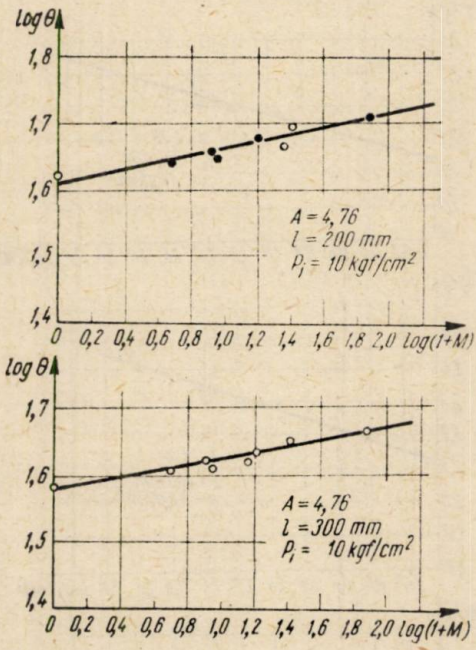


Fig. 6. — Variaţia unghiului θ cu M pentru $A = 4{,}76$, $p_i = 10$ kgf/cm² şi $l = 200$; 300 mm.

La al doilea ciclu de experienţe s-a micşorat caracteristica geometrică a camerei de turbionare la valoarea $A = 3{,}48$, prin mărirea diametrului ajutajelor tangenţiale.

Corespunzător acestui caz, ecuaţiile $\theta = f(M)$ şi $X_G = F(M)$ au o formă similară cu a ecuaţiilor (10) şi (11).

În figura 7 se prezintă comparativ curbele de variaţie cu presiunea p_i a exponenţilor m şi n, pentru $A = 3{,}48$ şi $A = 4{,}76$.

Se constată că atît unghiul θ cît şi X_G au valori mai mici decît valorile corespunzătoare la primul ciclu de experienţe. Aceasta se explică în primul rînd prin micşorarea unghiului θ_0 o dată cu scăderea caracteristicii geometrice A.

Valorile exponenţilor m şi n s-au mărit prin scăderea caracteristicii geometrice de la $A = 4{,}76$ la $A = 3{,}48$, ceea ce arată că în al doilea caz momentul M are o influenţă mai mare asupra mărimilor θ şi X_G.

Creșterea presiunii de injecție p_i micșorează diferențele care apar atît între valorile coeficienților m, cît și ale coeficienților n pentru cele două cazuri prezentate.

După ce s-a determinat în ce sens influențează scăderea caracteristicii A atunci cînd diametrul d_e se menține constant, în experimentările

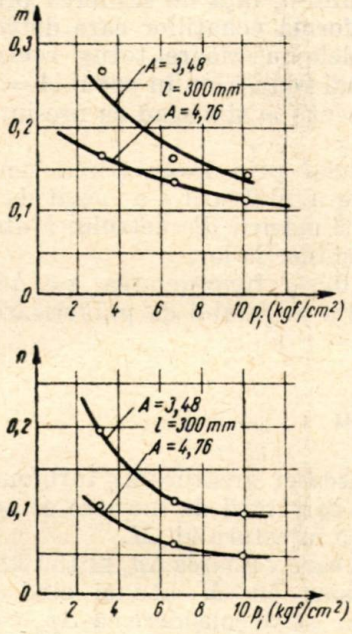


Fig. 7. — Reprezentarea comparativă a curbelor $m = f(p_i)$ și $n = F_{pi}$ pentru $A = 3,48$ și $A = 4,76$.

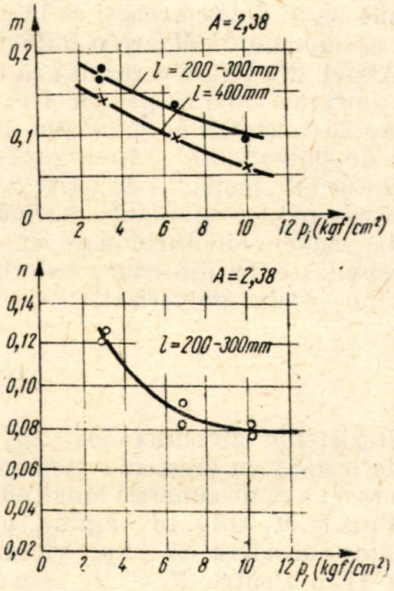


Fig. 8. — Reprezentarea funcțiilor $m = f(p_i)$ și $n = F(p_i)$ pentru $A = 2,38$ și $l = 200$; 300; 400 mm.

următoare s-a determinat influența scăderii lui A în același timp cu mărirea diametrului d_e.

În al treilea ciclu de experiențe, caracteristica geometrică a camerei de turbionare a avut valoarea $A = 2,38$.

Rezultatele experiențelor efectuate au arătat că θ_0 și X_{G_0} sînt mai mari decît valorile corespunzătoare cazului $A = 3,48$.

Ținînd seama de teoria injectoarelor centrifugale funcționînd cu fluid ideal [2], aceste rezultate ar părea contradictorii, întrucît, după această teorie, unghiul de pulverizare scade cu micșorarea caracteristicii A.

Cercetările mai recente au arătat că unghiul este influențat sensibil de raportul dintre diametrul ajutajului de ieșire d_e și diametrul camerei de turbionare d_c și în special de mărimea diametrului d_e. Folosind unele date obținute experimental [3], pentru calculul unghiului în cazul folosirii unui anumit fluid de lucru se pot deduce relații de forma :

$$\operatorname{tg} \theta_0 = C \cdot f(A) \frac{d_e^{p+q}}{d_c^q}, \qquad (12)$$

unde C, p, q sînt nişte constante, iar funcţia $f(A)$ creşte o dată cu creşterea caracteristicii geometrice A. Din relaţia (12) rezultă că unghiul θ_0 creşte cu mărirea diametrului ajutajului de ieşire d_e atunci cînd diametrul d_c se menţine cu valoare constantă.

Din experimentări a rezultat că asupra unghiului θ_0 prepondereză efectul creşterii datorită măririi diametrului d_e faţă de scăderea produsă prin micşorarea caracteristicii A. Deşi forma ecuaţiilor care determină mărimile X_G şi θ este aceeaşi ca în exemplele anterioare, totuşi remarcăm faptul că momentul M are o influenţă mai redusă ca în cazul $A = 3{,}48$.

Astfel, din figura 8 rezultă că exponenţii m şi n scad cu presiunea p_i şi au valori mai mici ca pentru $A = 3{,}48$.

Acest fenomen îl explicăm în special prin înrăutăţirea sensibilă fineţei de pulverizare. Astfel, raza medie a picăturii s-a mărit datorită atît creşterii diametrului de ieşire d_e, cît şi măririi diametrului ajutajelor tangenţiale [5], în consecinţă mărindu-se şi inerţia lor.

La camera de turbionare cu $A = 0{,}85$, funcţionarea s-a dovedit necorespunzătoare, din cauza valorii mici a unghiului de pulverizare şi a pulsaţiilor jetului pulverizat.

3. CONCLUZII

Rezistenţa aerodinamică Δp_a a carcasei arzătorului turbionar se măreşte o dată cu creşterea momentului cantităţii de mişcare al aerului în raport cu axa de simetrie longitudinală a injectorului M.

Pînă la $M_1 \cong 30 \cdot 10^{-3}$ kgfms, pentru care valoarea $\Delta p_a \cong 150$ kgf/m^2, se poate considera că Δp_a variază liniar cu M atunci cînd $3{,}2 < \psi < 17{,}5$. Pentru $M > M_1$ este necesar să se considere că Δp_a variază parabolic cu M. Aceasta arată că pentru domeniul respectiv raportul $\frac{C'}{C}$ din relaţia (4) depinde în mod sensibil de M.

Cu suficientă precizie se poate considera că repartiţia lichidului în jetul pulverizat este dependentă de M, indiferent dacă variaţia acestei mărimi se realizează la o valoare constantă a caracteristicii geometrice a carcasei ψ, modificîndu-se însă debitul de aer D_a sau pentru $D_a = \text{const.}$, variindu-se ψ.

Adoptîndu-se drept parametru caracteristic al curbei de repartiţie a lichidului în jetul pulverizat $h = f(r)$ mărimea X_G, se demonstrează că în cazurile practice se poate deduce o relaţie de forma:

$$X_G = X_{G_0}(1 + M)^m,$$

unde X_{G_0} este valoarea mărimii X_G pentru $M = 0$.

Dintr-o relaţie similară se poate calcula şi semiunghiul de pulverizare θ:

$$\theta = \theta_0 (1 + M)^{n'},$$

unde θ_0 este valoarea lui θ pentru $M = 0$, adică atunci cînd lichidul este pulverizat numai datorită injecţiei mecanice.

Valoarea exponenților m și n este dependentă de caracteristica geometrică a injectorului, de diametrul ajutajului de ieșire d_e, de presiunea de injecție p_i și de distanța l de la diusă la zona în care se captează picăturile pulverizate.

Pentru $0 < M \leqslant 73{,}2 \cdot 10^{-3}$ kgfms., $3 \leqslant p_i \leqslant 10$ kgf/cm^2 $2{,}38 \leqslant A \leqslant 4{,}76$ și $200 \leqslant l \leqslant 400$ mm, se poate considera că $0{,}05 < m < 0{,}25$, iar $0{,}05 < n < 0{,}2$.

Influența momentului M este cu atît mai redusă, adică valoarea lui m sau n este cu atît mai mică, cu cît l și p_i au valori mai mari. Pentru valori constante ale diametrelor d_e și d_c, exponenții m sau n cresc cu scăderea caracteristicii geometrice A.

Primit la redacție la 3 mai 1964

BIBLIOGRAFIE

1. Р.Б. АХМЕДОВ, *Интенсивности крутки воздушного потока в вихревых горелках.* Теплоэнергетика, *6*, 9—12(1962).
2. Г.Н. АБРАМОВИЧ, *Прикладная газовая динамика.* ИППЛ, Москва, 1953.
3. А.Г. БЛОХ, Е. К. КИЧКИНА, *О коэффициентах расхода и углах конусности факела.* Теплоэнергетика, *10*, 35—41 (1957).
4. P. LISENKLAM. *Atomisation of Liquid Fuel for Combustion.* Journal of the Institute of Fuel, *243*, 130—143 (1961).
5. А.С. ПЕНКО, *Распыление жидкостей.* Инженерно физический журнал, *12*, 47—51 (1961).

POSIBILITĂȚI DE GENERALIZARE A FORMULELOR DE CALCUL PENTRU VITEZA DE ARDERE ÎN CURENT TURBULENT

DE

N. ANTONESCU

CANDIDAT ÎN ȘTIINȚE TEHNICE

662.612 : 662.69

Modelarea vitezei turbulente de ardere a preocupat pe mulți cercetători, în special în legătură cu forma optimă de prezentare a relațiilor de calcul pentru viteza de ardere.

Din analiza ecuațiilor de mișcare și de ardere care descriu în forma cea mai generală procesul de ardere rezultă principalele criterii de exprimare generalizată a vitezei de ardere.

Valabilitatea acestor criterii este actualmente recunoscută, cu atît mai mult cu cît chiar analiza procesului fizic al arderii conduce la ele.

Astfel, cel mai important criteriu este criteriul intensității turbulenței, sau criteriul Karman, apoi intervine criteriul $\mathcal{E}u$, care, referindu-se la parametrii fizici inițiali ai gazului, se reduce la criteriul $\mathcal{M}$. În sfîrșit, un criteriu important, a cărui influență este certă, însă insuficient cunoscută, este lungimea caracteristică exprimată prin scala turbulenței l, sau un criteriu combinat scala turbulenței — viteza medie fluctuantă w'. Acest din urmă criteriu combinat poate fi coeficientul turbulent de difuzie D_T

$$D_T = w' \, l,$$

sau chiar cifra $\mathcal{R}e$.

În sfîrșit, după cercetările recente ale lui V. P. Sonțev, lungimea caracteristică a turbulenței poate și ea să fie exprimată ca o funcție de frecvența caracteristică a pulsațiilor turbulente. Considerînd turbulența ca rezultatul existenței concomitente a unor mișcări periodice diferite,

fiecare din ele caracterizată prin amplitudinea și frecvența sa proprie, se poate defini o frecvență medie a pulsațiilor și, corespunzător, o scală medie a turbulenței. Cu cît frecvența oscilațiilor este mai mare, cu atît scala corespunzătoare e mai mică

$$l = k\frac{W_m}{\omega_m},$$

unde

l este scala longitudinală a turbulenței;
w_m — viteza medie a curentului;
ω_m — frecvența medie a pulsațiilor;
K — coeficientul de proporționalitate.

În ansamblu, viteza de ardere turbulentă va depinde deci de viteza normală de ardere u_0, care cuprinde influența parametrilor fizici și chimici ai amestecului combustibil, de intensitatea turbulenței și de un alt factor aerodinamic, de exemplu viteza curentului W, scala turbulenței sau frecvența medie.

Sistemele de modelare expuse mai sus conduc la relații de determinare a vitezei turbulente de ardere de forma

$$U_T = f\left(u_0,\ \varepsilon,\ w,\ \frac{T_{\max}}{T_{\max_0}}\right), \tag{1}$$

unde $\frac{T_{\max}}{T_{\max_0}}$ este un coeficient de neuniformitate termică în flacără, sau alte forme similare

$$U_T = f\,(u_0,\ \varepsilon,\ l \text{ sau } \omega). \tag{2}$$

Dezavantajul principal al acestui gen de exprimare generalizată a vitezei de ardere este că necesită cunoașterea parametrilor turbulenței. Măsurarea parametrilor turbulenței este în prezent posibilă în institutele de cercetări; cît privește însă această măsurare în instalații industriale, ea nu va fi posibilă încă mulți ani. De aceea, în continuare, ne vom ocupa de posibilitățile de modelare care utilizează, în exprimarea generalizată a vitezei de ardere, parametrii fizici clasici ai gazului și ai curgerii.

Un prim punct important de notat în analiza relațiilor de exprimare a vitezei de ardere este că, acceptînd oricare din ipotezele clasice de ardere: în front ondulat de flacără, după Damköhler, sau în volum, după Scelkin, aceste relații vor arăta dependența vitezei de ardere de numai doi factori de bază: intensitatea și scala turbulenței. Factorii geometrici ai focarului influențează indirect viteza turbulentă de ardere prin influența lor asupra turbulenței, iar factorii fizici și chimici ai amestecului combustibili prin influența lor asupra vitezei normale de ardere. În consecință, relațiile de calcul pot utiliza doi parametri oarecare caracteristici curentului, cu condiția ca aceștia să fie funcții directe de parametrii turbulenței.

În curent liniar, pentru calculul vitezei de ardere u_T se efectuează analiza criterială a sistemului de ecuații diferențiale care descrie fenomenul arderii. Dintre aceste ecuații, una exprimă legătura dintre viteza de ardere și diferiții factori geometrici și funcționali ai focarului și deci din aceasta

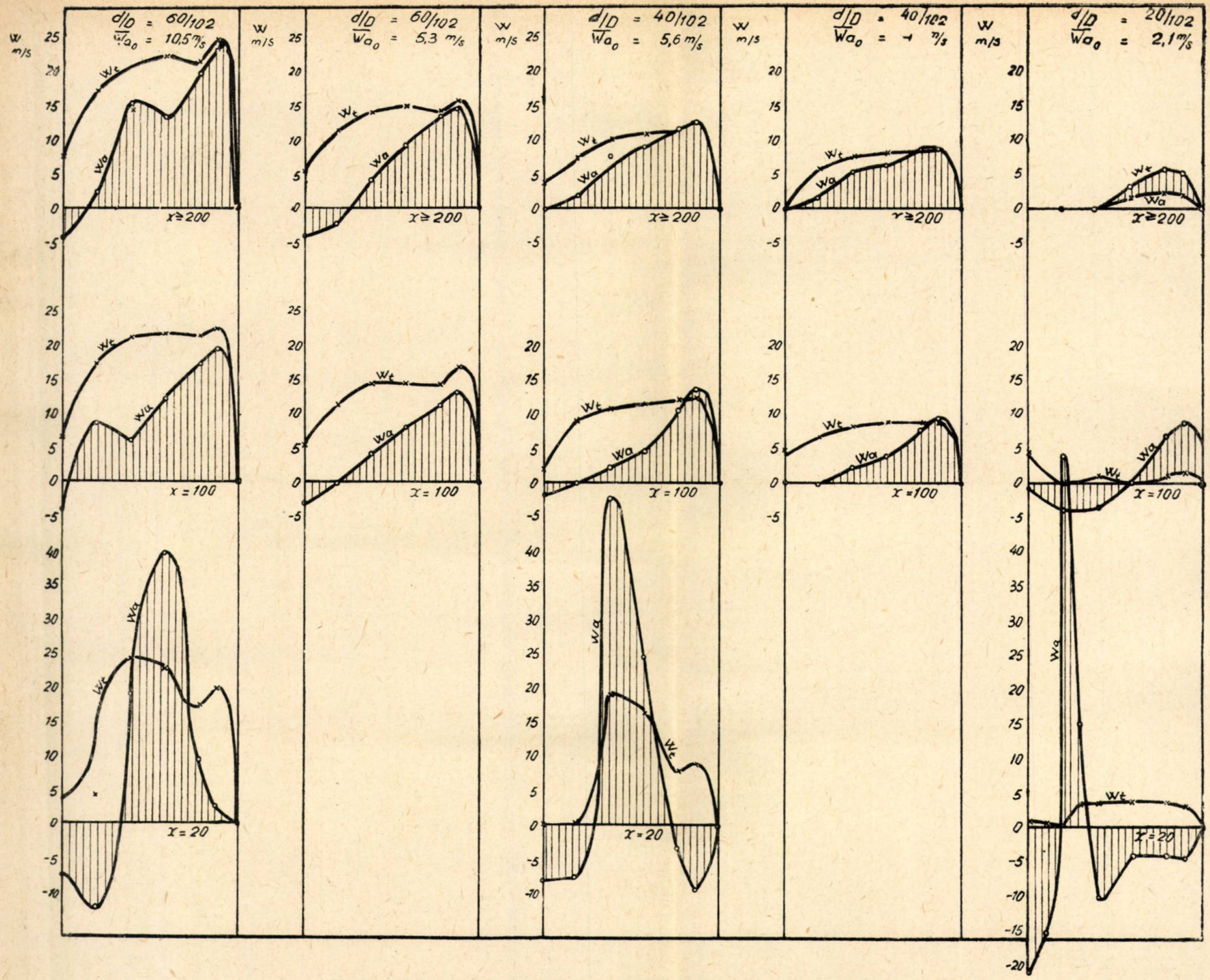
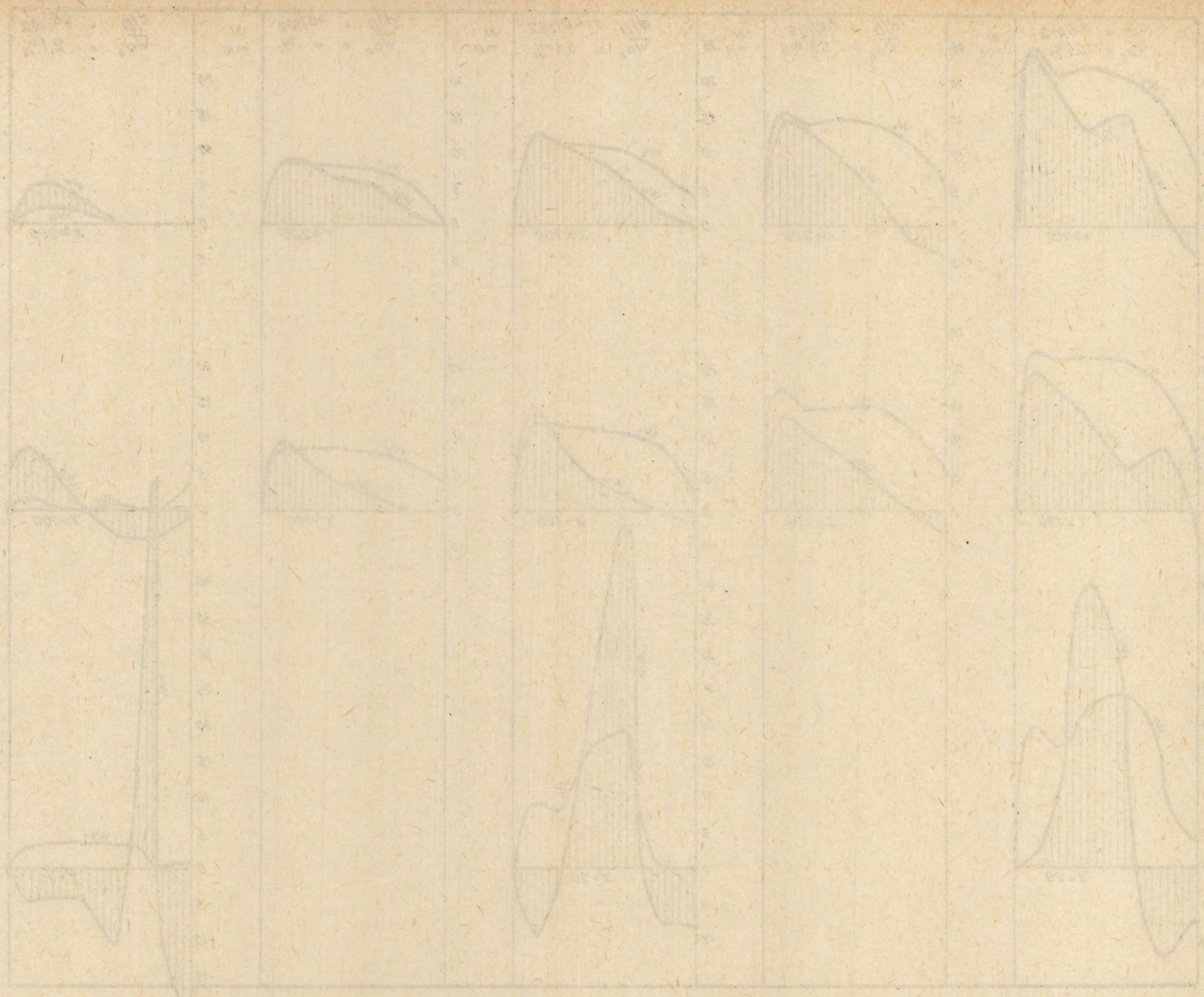


Fig. 2. — Viteza axială și tangențială în curentul turbionar produs de carcasa spirală.



poate fi dedusă o mărime adimensională caracteristică, $\mathcal{U}$, care permite exprimarea generalizată a vitezei de ardere:

$$\mathcal{U} = \frac{\Delta p}{\rho_a \cdot u_0 \cdot \bar{W}_{a_0} \cdot u_T^* \rho^*}, \tag{3}$$

unde

Δp este căderea de presiune în frontul de flacără, un prim element direct legat de turbulență;

$\bar{W}_{a_0}$ — viteza medie axială a curentului de amestec combustibil, cel de-al doilea factor legat de turbulență;

u_T^* — viteza relativă turbulentă de ardere

$$u_T^* = \frac{u_T}{u_0}$$

u_0 — viteza normală de ardere;

ρ_a — densitatea amestecului combustibil;

ρ^* — densitatea relativă a gazelor de ardere

$$\rho^* = \frac{\rho_g}{\rho_a}.$$

În curent turbionar, parametrii principali aerodinamici ai curentului de amestec combustibil, direct legați de parametrii turbulenței, sînt viteza medie axială $\bar{W}_{a_0}$ și unghiul caracteristic θ, determinat ca unghiul vitezei la periferia jetului cu axa de curgere.

O astfel de relație poate fi generalizată mai mult dacă se alege ca parametru caracteristic momentul cantității de mișcare a jetului M.

Se remarcă în această variantă de relație un fapt important, și anume că din funcțiile amintite se elimină atît θ cît și $\bar{W}_{a_0}$, astfel că u_T apare numai ca o funcție de M. Într-adevăr, erorile maxime ale punctelor experimentale față de curba medie sînt mai mici de 8,5% (deci sub precizia experimentală) și nu prezintă un caracter sistematic. Dependența lui u_T numai de momentul cantității de mișcare ar duce la concluzia că acest parametru caracterizează atît intensitatea turbulenței, cît și scala ei în curent turbionar. În cazul realizării mișcării turbionare cu ajutorul corpurilor elicoidale s-a dedus experimental o relație de forma

$$u_T = 161 \cdot u_0 \cdot M^{0,467}. \tag{4}$$

Comparativ cu alte formule în care vitezele de ardere se exprimă ca o funcție în care tangența unghiului θ intervine ca exponent al vitezei axiale medii, formula (4) prezintă avantajul unei generalități mărite, deoarece relația funcțională între u_T și M apare din înseși ecuațiile care descriu procesul fizic al arderii.

Concluzia asupra valabilității criteriului M în generalizarea exprimării vitezei de ardere în curent turbionar poate fi afirmată însă numai dacă și un curent turbionar, caracterizat printr-un cîmp de viteze diferit

de primul (de exemplu curentul turbionar produs în caracasa spirală),conduce la aceeași relație $u_T = f(M)$, ca și relația (4).

Carcasa spirală este dispozitivul cel mai des utilizat în construcțiile de arzătoare pentru turbionarea aerului sau amestecului combustibil. Datorită formei sale, carcasa spirală produce turbionarea fără accelerații bruște, ca cele în cazul admisiei tangențiale, și asigură un moment mare al cantității de mișcare în raport cu cel obținut cu ajutorul paletelor elicoidale.

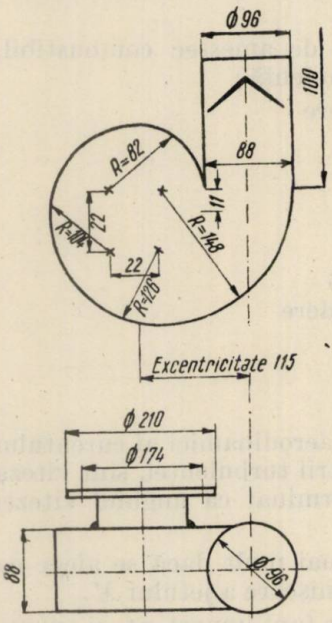


Fig. 1. — Carcasa spirală.

Caracteristic jetului produs în carcasa spirală comparativ cu cel produs de paletele elicoidale este zona curenților de întoarcere ce se formează în jurul axului turbionului. Din punctul de vedere al arderii, această zonă de întoarcere produce returul de flacără în zonele din amontele stabilizatorului, efect care perturbă procesul de ardere.

Pentru a evita fenomenele de retur există două posibilități : una din ele constă în realizarea unei turbionări reduse, astfel încît în centrul jetului vitezele axiale minime să nu fie negative ; a doua posibilitate este de a intercala în drumul curentului de gaze o diafragmă care prin accelerarea locală a curentului să constituie un obstacol pentru returul de flacără.

Dezavantajul primei posibilități este de a nu permite turbionări puternice și, în consecință, intensificări mari ale arderii. În ceea ce privește a doua metodă, apar unele dezavantaje legate în special de pierderile mari de presiune provocate în diafragmă și în același timp de reducerea sensibilă a vitezei tangențiale inițiale, respectiv a momentului cantității de mișcare.

Experimentarea dependenței dintre momentul cantității de mișcare și viteza de ardere în cazul carcaselor spirale s-a făcut utilizînd o carcasă cu dimensiunile arătate în figura 1.

În experimentările la rece s-a urmărit determinarea cîmpului de viteze într-un tub cu ∅ 102 mm, la distanțe de 20, 100 și 200 mm de marginea diafragmelor antiretur.

Diafragmele utilizate au avut dimensiunile relative $d/D = 60/102$, 40/102 și 20/102.

Analiza rezultatelor obținute, prezentate în diagrama din figura 2, arată că vitezele tangențiale au un maxim accentuat în regiunea $r/R \cong$ $\cong 0{,}9$, ceea ce va conduce la o viteză locală mare de ardere în regiunea periferică, unde se face și stabilizarea.

Viteza axială prezintă şi ea un maxim, la periferia jetului, şi un minim, uneori negativ, în centru.

O primă concluzie este că aspectul cîmpului de viteze este cu totul diferit de cel în cazul paletelor elicoidale. Este de remarcat de asemenea că, în mod normal, în curent liniar apare o puternică zonă de întoarcere în regiunea inelară care urmează diafragmei, cu un diametru cuprins între D şi D-d, unde D este diametrul tubului şi d al diafragmei. În cazul turbio-

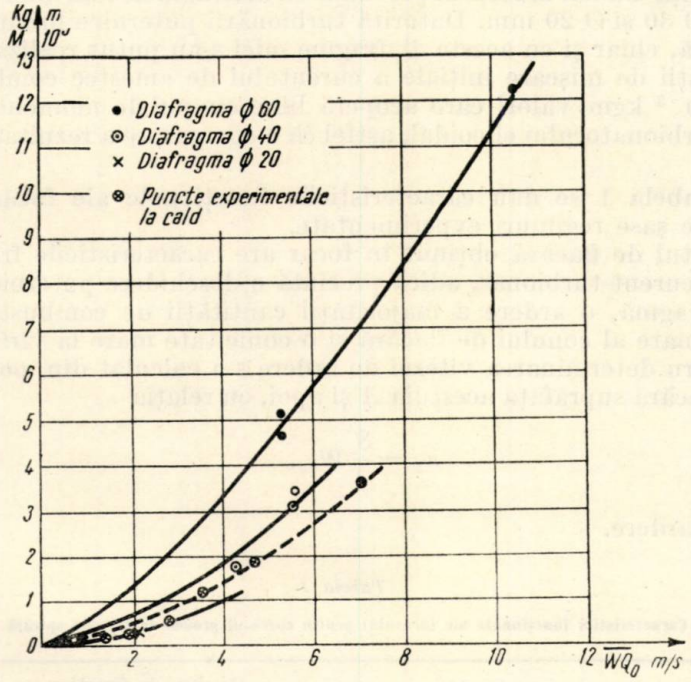


Fig. 3. — Momentul cantităţii de mişcare funcţie de viteza medie axială şi diametrul diafragmei.

nării puternice produse de carcasa spirală, astfel de zone de întoarcere sînt foarte reduse, din cauza expandării jetului.

În cazurile experimentate, la diafragma 60/102, zona periferică de întoarcere dispare la distanţa de 20 mm de la diafragmă, iar la cele de 40/102 şi 20/102 zona de întoarcere dispare la distanţa de 100 mm.

Pe baza măsurătorilor efectuate se poate calcula momentul cantităţii de mişcare al curentului de amestec combustibil funcţie de viteza medie W_{a_0} şi diametrul diafragmei. Variaţia momentului cantităţii de mişcare este prezentată în figura 3.

Se observă o scădere puternică a valorii momentului cantităţii de mişcare cu micşorarea orificiului diagramei ca urmare a efectului de frînare a vitezei tangenţiale.

În experimentările la cald s-a constatat că la diametre mai mari de diafragme decît Ø 40 mm arderea normală nu este posibilă, deoarece curentul axial invers provoacă returul de flacără pînă în peretele din fund al carcasei spirale. La diametrul de diafragmă de Ø 40 mm, stabilitatea flăcării este labilă, astfel că după un timp care nu depăşeşte 1 minut, datorită neuniformităţilor accidentale în ardere, se produce returul de flacără.

Experimentările de determinare a vitezei de ardere au fost posibile în consecinţă numai la focarul prevăzut cu diafragmele mai mici de 30 mm, şi anume Ø 30 şi Ø 20 mm. Datorită turbionării puternice produse de carcasa spirală, chiar şi cu aceste diafragme mici s-au putut realiza momente ale cantităţii de mişcare iniţiale a curentului de amestec combustibil de $0 \div 3{,}55 \cdot 10^{-3}$ kgm, valori care acoperă bine cîmpul de momente studiate în cazul turbionatorului elicoidal, astfel că o comparare a rezultatelor a fost posibilă.

În tabela 1 se dau caracteristicile funcţionale ale focarului-tunel pentru cele şase regimuri experimentate.

Frontul de flacără obţinut în focar are caracteristicile frontului de flacără în curent turbionar, adică prezintă o deschidere puternică imediat după diafragmă, o ardere a majorităţii cantităţii de combustibil pe un diametru mare al conului de flacără şi o conicitate mare la vîrful flacării.

Pentru determinarea vitezei de ardere s-a calculat din poziţia frontului de flacără suprafaţa acestuia A şi apoi, cu relaţia

$$u_T = \frac{S}{A} \bar{W}_{a_0}, \tag{5}$$

viteza de ardere.

Tabela 1

Caracteristici funcţionale ale focarului pentru curentul produs de carcasa spirală

Exp. nr.	Dimensiunea diafragmei d/D	Nm^3/h Debit gaz	$\bar{W}_{a_0}$ m/s	Presiuni în funcţionare la cald			kgm $M \cdot 10^3$
				P_{aer}	P_{gaz}	$P_{amestec}$	
1	20/96	6	2,84	327	327	322	0,63
2	20/96	4,2	1,98	165	165	159	0,28
3	20/96	3	1,42	85	85	83	0,19
4	30/96	15	7,1	315	315	292	3,55
5	30/96	10,6	4,7	161	161	155	1,82
6	30/96	7,6	3,6	88	88	85	1,13
7	40/96	retur la toate debitele					

Rezultatele calculelor sînt prezentate în tabela 2.

Se constată că viteza de ardere u_T este puternic influenţată de momentul cantităţii de mişcare M.

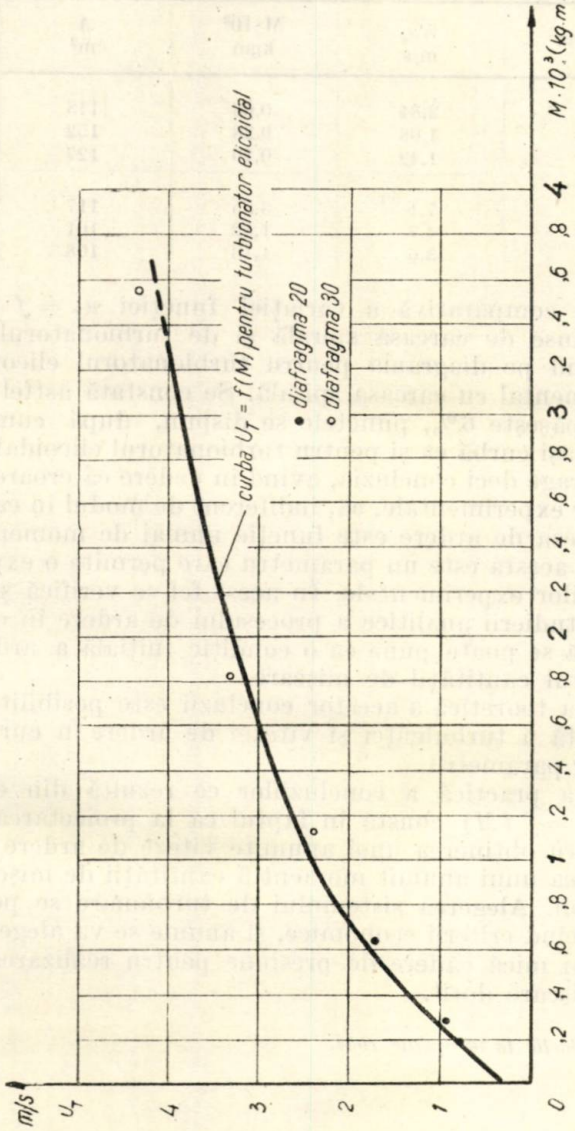


Fig. 4. — Așezarea punctelor experimentale pentru viteza de ardere pe curba generală $u_T = f(M)$.

Tabela 2

Viteza de ardere în curentul turbionar

Exp. nr.	Diafragma	$\overline{W}_{a_0}$ m/s	$M \cdot 10^3$ kgm	A cm²	u_T m/s
1	20/96	2,84	0,63	118	1,72
2		1,98	0,28	152	0,93
3		1,42	0,19	127	0,80
4	30/96	7,1	3,55	117	4,32
5		4,7	1,82	101	3,32
6		3,6	1,13	108	2,38

Verificarea comparativă a variației funcției $u_T = f(M)$ în cazul turbionării produse de carcasa spirală și de turbionatorul elicoidal s-a făcut transpunînd pe diagrama pentru turbionatorul elicoidal punctele obținute experimental cu carcasa spirală. Se constată astfel că, cu o abatere care nu depășește 6%, punctele se dispun, după cum se vede pe figura 4, pe aceeași curbă ca și pentru turbionatorul elicoidal.

Se poate trage deci concluzia, avînd în vedere că eroarea de 6% este în limita erorilor experimentale, că, indiferent de modul în care se produce turbionarea, viteza de ardere este funcție numai de momentul cantității de mișcare, deci acesta este un parametru care permite o exprimare generalizată a relațiilor experimentale. În acest fel se verifică și ipoteza care a stat la baza studierii analitice a procesului de ardere în curent turbionar, și anume că se poate pune ca o condiție inițială a arderii o relație privind momentul cantității de mișcare.

Importanța teoretică a acestor concluzii este posibilitatea de exprimare generalizată a turbulenței și vitezei de ardere în curent turbionar printr-un singur parametru.

Importanța practică a concluziilor ce rezultă din existența unei relații unice $u_T = f(M)$ constă în faptul că la proiectarea arzătoarelor turbionare pentru obținerea unei anumite viteze de ardere este necesară numai producerea unui anumit moment a cantității de mișcare a amestecului combustibil. Alegerea sistemului de turbionare se poate face mai departe introducînd criterii economice, și anume se va alege sistemul care produce cea mai mică cădere de presiune pentru realizarea momentului cantității de mișcare dorit.

Primit la redacție la 30 aprilie 1964.

CAMERA DE AMESTEC A EJECTOARELOR

DE

IOAN VLĂDEA şi ZENO ARDELEAN

621.69

Camera de amestec a ejectoarelor este partea constitutivă a lor unde se petrec cele mai complexe fenomene, indiferent dacă este vorba de ejectoare subsonice sau supersonice, de ejectoare cu lichide sau cu gaze. Aici se întîlnesc şi se amestecă cele două fluide, activ şi antrenat, pentru a forma un singur fluid amestecat, care urmează să parcurgă apoi difuzorul. Întîlnirea are loc cu viteze diferite, între fluide cu densităţi diferite şi uneori chiar cu direcţii diferite. De aceea aceste întîlniri se produc cu foarte multe şi însemnate pierderi.

Deşi cu problema camerei de amestec s-au ocupat foarte mulţi cercetători totuşi se poate spune că ea încă nu a fost clarificată pe deplin, mai ales în cazul ejectoarelor supersonice, unde fenomenele sînt şi mai complexe. Mulţi cercetători au atacat problema pe cale teoretică, dar nu au reuşit să obţină decît rezultate cu caracter general şi de aceea destul de puţin concludente.

Ca rezultat al cercetărilor de pînă acum se poate spune că în camera de amestec au loc următoarele fenomene mai importante :

a. Difuziunea celor două fluide (activ şi antrenat), care nu reacţionează chimic între ele. Această difuziune este un fenomen ireversibil, deci se soldează cu creştere de entropie dacă cele două fluide nu intră în cadrul paradoxului lui Gibbs. Difuziunea datorită numai agitaţiei moleculare este însă un fenomen lent, care cere un timp foarte îndelungat pentru a se produce în mod complet, deci necesită o cameră de amestec foarte lungă. Difuziunea este însă singura care poate fi luată în considerare în cazul fluidelor perfecte, deoarece toate celelalte fenomene sînt cauzate de frecări interne şi externe pe care fluidele perfecte nu le posedă.

ST. CERC. ENERG. ELECTR. TOM 14 Nr 3 p.713–723 BUCUREŞTI 1964

b. Vîrtejurile produse la suprafaţa de întîlnire a celor două fluide cu viteze diferite. Aceste vîrtejuri au fost remarcate şi în alte cazuri similare chiar de Helmholtz şi se produc totdeauna acolo unde două fluide reale (cu frecări) curg pe direcţii paralele cu viteze diferite. La suprafaţa de separaţie dintre cele două fluide se produc la început vîrtejuri mici, asemănătoare cu rulourile de la rulmenţi. Ele cresc apoi în intensitate şi extindere pe măsură ce înaintează consumînd o parte însemnată din energia curenţilor.

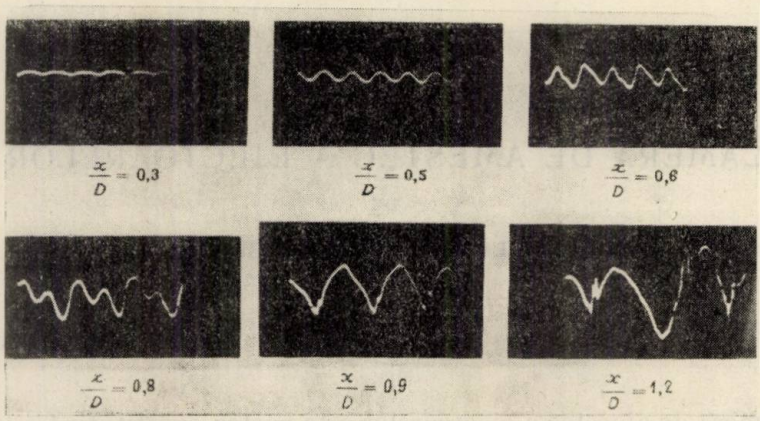
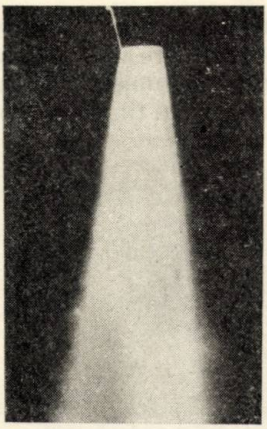


Fig. 1. — Pulsaţii de viteză în stratul-limită al unui curent înecat.

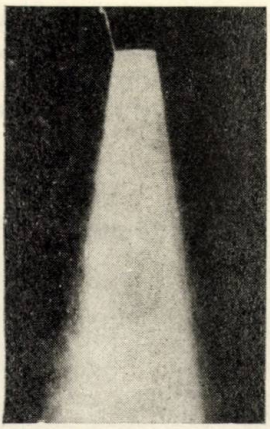
Aceste vîrtejuri au fost puse în evidenţă de O. Wehrmann şi R. Wille [1] cu ajutorul unui termoanemometru plasat în zona de trecere a unui curent de gaz printr-un gaz de acelaşi gen, cu grosime practic infinită aflat în repaus. S-a observat că, în zona de pătrundere a curentului în fluidul în repaus, viteza nu avea componente transversale, dar, pe măsură ce curentul înainta, componentele transversale îşi făceau apariţia, avînd un caracter periodic pulsator (fig. 1). Termoanemometrul, avînd o inerţie foarte mică, a putut înregistra cu suficientă fidelitate pulsaţiile vitezei transversale, care cresc tot mai mult în intensitate.

În laboratorul de termotehnică al Institutului politehnic din Timişoara au fost puse în evidenţă aceste vîrtejuri prin fotografierea unui jet de aer colorat cu praf de ţipirig, care străbate o masă de aer în repaus [2]. Se vede (fig. 2) că la început vîna de aer colorat are un caracter cilindric, fără răspîndire în masa aerului în repaus. Pe măsură ce pătrunde însă în această masă (a se vedea şi succesiunea fotografiilor executate cu timp de expunere diferit), marginile jetului se destramă şi apar în mod evident vîrtejurile amintite.

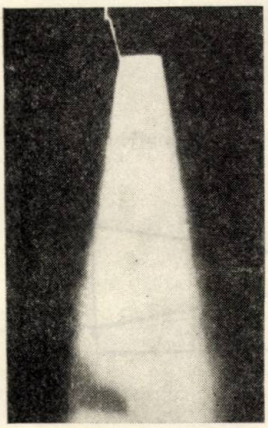
G. Flügel [3] a utilizat, pentru a pune în evidenţă vîrtejurile de mai sus, doi curenţi de apă paraleli, cu viteze diferite, în care a introdus pilitură de aluminiu foarte fină pentru a putea fi fotografiaţi. Cum se poate vedea şi în acest caz (fig. 3), vîrtejurile au caracterul evidenţiat şi în figurile anterioare.



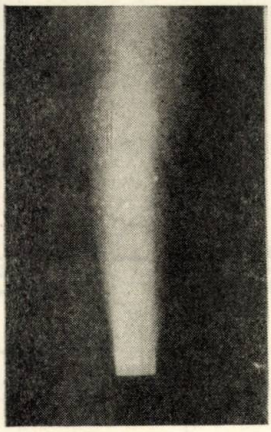
a



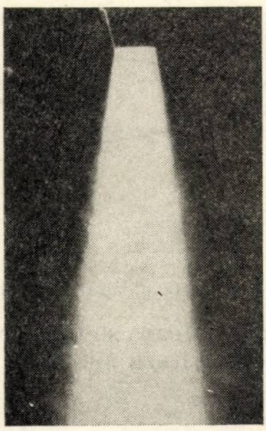
d



b



e



c

Fig. 2. — Vînă de aer colorată cu țipirig, curgînd printr-o masă de aer în repaus.

Pentru micşorarea pierderilor cauzate de aceste vîrtejuri, Fr. Bošnjaković [4] propune să se tindă la apropierea dintre vitezele fluidului activ şi antrenat, înainte de unirea lor în camera de amestec. În acest scop el recomandă introducerea ajutajului de destindere al fluidului activ în partea

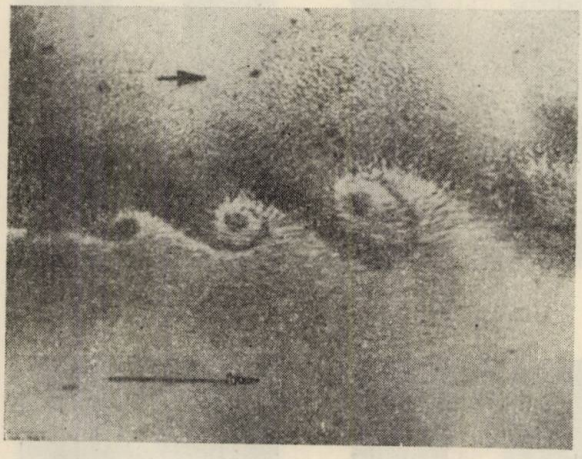


Fig. 3. — Vîrtejuri formate la suprafaţa de contact dintre doi curenţi de apă.

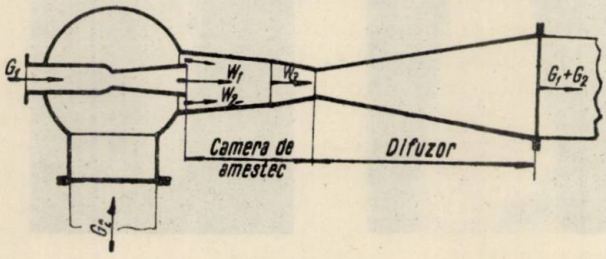


Fig. 4. — Ajutaj de destindere introdus în confuzorul ejectorului.

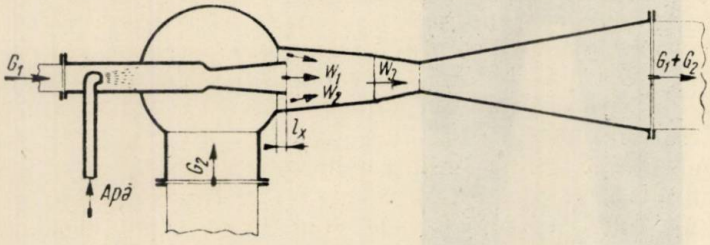


Fig. 5. — Stropire de apă în ajutajul de destindere al aburului activ.

convergentă a difuzorului (fig. 4), procedeu prin care se micşorează secţiunea de acces a fluidului antrenat şi îi măreşte viteza acestuia. Acest pro-

cedeu se practică în mod obișnuit în construcția modernă de ejectoare subsonice și chiar în cazul celor supersonice. Prin aceasta, partea convergentă a difuzorului, denumită uneori și *confuzor*, se transformă în bună parte în cameră de amestec propriu-zisă.

În altă lucrare [5], F. Bošnjaković recomandă chiar injectarea de apă pulverizată în vîna de abur activ (fig. 5), în special în scopul de a micșora viteza din această vînă și a o apropia astfel de viteza din vîna de fluid antrenat. Pentru a nu avea pierderi mari în întregul ejector, Bošnjaković recomandă să nu fie depășită viteza critică în camera de amestec, deci cu atît mai puțin în difuzor. Prin aceasta se anulează însă posibilitățile oferite de ejectoarele supersonice de a crea diferențe mari de presiune între ieșirea din ejector și camera de amestec. De aceea recomandarea de mai sus poate fi luată în considerare numai la ejectoarele subsonice.

Încercările lui A. N. Lojkin [6], J. Wiegand [7] și cele executate la Institutul politehnic din Timișoara nu au confirmat însă recomandarea lui Bošnjaković. Deplasîndu-se axial ajutajul de destindere în partea convergentă a difuzorului, s-a ajuns să se obțină valoarea maximă pentru coeficientul de ejecție $u_{max} = (G_2/G_1)_{max}$ la valori foarte modeste ale vitezei fluidului antrenat w_2 în raport cu viteza fluidului activ w_1, și anume cam de $w_2/w_1 = 0{,}04 \ldots 0{,}06$. Bineînțeles că această constatare nu poate fi extinsă și asupra ejectoarelor supersonice, care nu au fost încercate.

c. Șocurile produse la întîlnirea dintre cele două fluide. În cazul ejectoarelor supersonice sau mixte, în camera de amestec se întîlnesc un curent supersonic cu unul subsonic. Cum cei doi curenți nu sosesc aproape niciodată la întîlnire cu direcții absolut paralele și mai ales în camerele de amestec conice plasate în partea convergentă a difuzorului, în fluidul cu viteză supersonică se vor produce unde de șoc oblice, care produc pierderi și creștere de entropie. În undele de șoc se produce și o micșorare a vitezei, dar caracterul pronunțat oblic al undelor face ca această micșorare să fie aproape neglijabilă și tot astfel și creșterea aferentă de entropie. În orice caz, reducerea de viteză nu ajunge pînă în domeniul subsonic, deoarece altfel n-ar mai putea să existe ejectoare supersonice, ci cel mult numai ejectoare mixte.

Dacă se presupune că cei doi curenți de fluid au chiar de la întîlnire trasee paralele, profilul vitezelor imediat după întîlnire are aspectul din figura 6*a*. Cei doi curenți au încă o existență separată, ceea ce reiese și din aspectul net discontinuu al profilului de viteză. Fiecare profil de viteză particular este, la scara sa, un profil de curent turbulent, deci cu o variație destul de slabă a vitezei în miezul curentului și cu o cădere bruscă a ei spre zero în stratul-limită.

Pe măsură ce cei doi curenți înaintează unul alături de celălalt, ei se amestecă din motivele arătate mai sus, iar profilul vitezelor se transformă ca în fig. 6*b* și 6*c*. În figura 6*c* cele două fluide se pot considera complet amestecate, iar profilul vitezei are caracterul celui de la curentul turbulent răspîndit pe toată secțiunea camerei de amestec. Aceasta presupune însă existența unei camere de amestec suficient de lungă, a cărei lungime nu poate fi determinată prin calcul decît în mod aproximativ. O încercare de acest

gen face şi G. Flügel [3], luînd în considerare frecarea de la suprafaţa de contact dintre cei doi curenţi. Exactitatea determinării lungimii camerei, rezultată din calcule, depinde de exactitatea cu care s-a apreciat coeficientul de frecare superficială, care este însă variabil în lungul camerei.

Viteza medie rezultată prin amestecarea fluidelor cu frecare va fi mai mică decît viteza care ar rezulta la amestecul fără frecare. Energia consumată prin frecări, vîrtejuri etc. se va adăuga la entalpia amestecului de fluide, aşa că se poate scrie relaţia :

$$i''_3 = \frac{w'^2_3}{2} = i_3 + \frac{w_3^2}{2}, \tag{1}$$

unde :

i''_3 este entalpia amestecului obţinută fără frecări ;
i_3 — entalpia amestecului cu frecări ;
w'_3 — viteza medie teoretică rezultată după amestecare ;
w_3 — viteza medie rezultată cu frecări.

Indicele 3 reprezintă amestecul, pe cînd 1 reprezintă fluidul activ la intrarea în camera de amestec, iar 2 fluidul antrenat în aceeaşi situaţie. Se poate scrie

$$w_3 = \varphi_3 \cdot w'_3, \tag{2}$$

unde prin coeficientul de viteză φ_3 se înglobează toate pierderile din camera de amestec (prin frecări, vîrtejuri, şocuri etc.) Pierderea de energie cinetică va fi deci $(1 - \varphi_3^2) \cdot \frac{w_3^2}{2}$, care se adaugă la entalpia i''_3 pentru ca aceasta să devină i_3. Prin urmare, se poate scrie

$$i_3 = i''_3 + (1 - \varphi_3^2) \cdot \frac{w_3^2}{2}. \tag{3}$$

Energia reală cu care soseşte curentul activ în camera de amestec va fi $i_1 + \frac{w_1^2}{2}$, iar curentul antrenat $i_2 + \frac{w_2^2}{2}$. Se poate scrie, prin urmare

$$\left(i_1 + \frac{w_1^2}{2}\right) + u \cdot \left(i_2 + \frac{w_2^2}{2}\right) = (1 + u) \cdot \left(i_3 + \frac{w_3^2}{2}\right), \tag{4}$$

unde $u = G_2/G_1$ este *coeficientul de ejecţie* (raportul dintre debitul de fluid antrenat şi cel de fluid activ) al ejectorului. Însă :

$$i_1 + \frac{w_1^2}{2} = i_{0,1} \quad \text{şi} \quad i_2 + \frac{w_2^2}{2} = i_{0,2}, \tag{5}$$

unde :

$i_{0,1}$ este entalpia iniţială a fluidului activ aflat în repaus ;
$i_{0,2}$ — entalpia iniţială a fluidului antrenat.

Se poate deci scrie

$$(1 + u) \cdot \left(i_3 + \frac{w_3^2}{2}\right) = i_{0,1} + u \cdot i_{0,2} \tag{6}$$

Dacă se ține seama și de relația (3), se poate scrie

$$i_3' + (2 - \varphi_3^2) \cdot \frac{w_3^2}{2} = \frac{i_{0.1} + u,\ i_{0.2}}{1 + u}. \tag{7}$$

Valoarea vitezei medii din secțiunea finală a camerei de amestec depinde de profilul de viteză adoptat. Mulți cercetători admit pentru simplificare o repartiție uniformă a vitezei pe secțiune, ceea ce se abate de fapt cu aproximativ $10 \cdots 12\%$ de la viteza medie obținută cu repartiția curentului turbulent, scrisă sub forma

$$w = w_{max}\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^{5/4}\right]^{1/7}, \tag{8}$$

unde:

w_{max} este viteza maximă din centrul curentului cu rază totală R;

r — raza curentă pe secțiune.

Pentru *curentul înecat* (curentul activ intrat într-o masă mare de curent antrenat, ultimul având o viteză foarte mică sau nulă), V. Kármán propune o repartiție parabolică a vitezei, de forma

$$w = w_{max}\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]. \tag{9}$$

Tot pentru cazul curentului înecat, A. N. Lojkin [6] propune o repartiție sinusoidală a vitezei, de forma

$$w = w_{max}\left[1 + \cos\frac{\pi r}{R}\right], \tag{10}$$

iar Taiț [8] o repartiție parabolică de forma

$$w = w_{max}\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^{3/2}\right]^2. \tag{11}$$

Din cauza repartiției neuniforme pe secțiune, cele trei legi fundamentale ale curenților de fluide: legea continuității debitului, legea conservării impulsului și legea conservării energiei, vor da rezultate diferite în ceea ce privește viteza medie pe secțiune. Se obișnuiește să se scrie:

$$w_d/w_i = \psi_1 \qquad \text{și} \qquad w_i/w_e = \psi_2, \tag{12}$$

unde:

w_d este viteza medie obținută pe baza legii continuității;

w_i — viteza medie obținută pe baza legii conservării impulsului;

w_e — viteza medie obținută pe baza legii conservării energiei.

Având în vedere faptul că aproape totdeauna camera de amestec se află în partea convergentă a difuzorului, aceste două părți constitutive ale ejectorului pot fi tratate împreună ca un întreg. Partea convergentă este legată de partea divergentă a difuzorului printr-un gît cilindric, mai mult sau mai puțin lung. Din încercările făcute la Institutul politehnic din Ti-

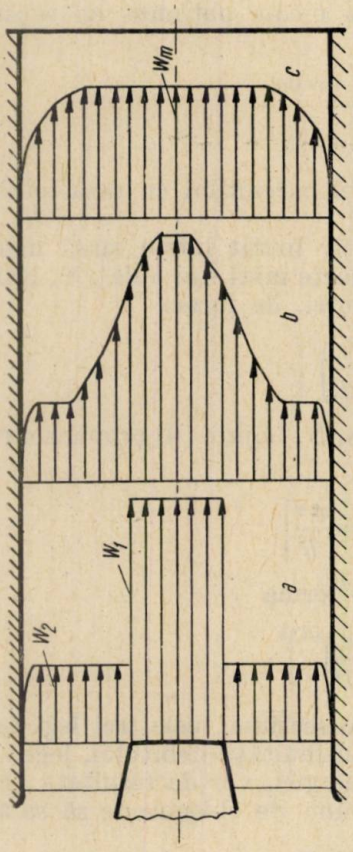


Fig. 6. — Profilele succesive ale vitezelor celor doi curenți concentrici.

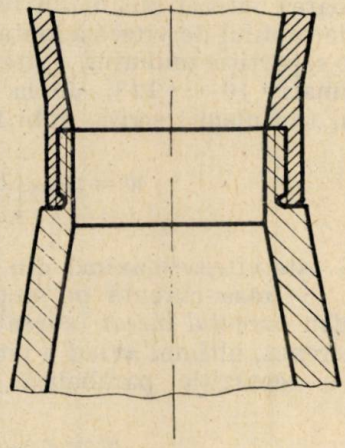


Fig. 8. — Asamblarea celor două părți constitutive ale difuzorului.

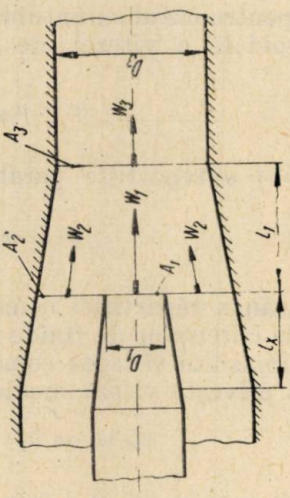


Fig. 7. — Distanța de pătrundere a ajutajului de destindere în confuzor.

mişoara a rezultat că gîtul mai lung de la ejectoarele subsonice are ca efect o aplatizare a curbei $u = f(l_x)$, unde l_x reprezintă distanţa de pătrundere a ajutajului de destindere a fluidului activ în partea convergentă a difuzorului (fig. 7). În schimb, gîtul mai scurt produce, în aceleaşi condiţii de funcţionare, o valoare cu ceva mai mare a lui u_{max} decît gîtul lung.

În cazul ejectoarelor supersonice, gîtul cilindric, se reduce numai la partea necesară confecţionării îngrijite a difuzorului avînd în vedere că acesta se execută de obicei din două bucăţi asamblate prin înşurubare (fig. 8).

Prelucrarea fină a ejectorului joacă un rol deosebit, ca, de altfel, şi centrarea atentă a părţilor sale constitutive, pentru buna comportare şi randamentul ejectorului. În gîtul ejectorului supersonic (secţiunea cea mai îngustă a difuzorului) se poate scrie:

$$p_4 = p_5 \cdot \left(\frac{2}{\varkappa + 1}\right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa - 1}}, \tag{13}$$

unde indicele 4 arată secţiunea gîtului, iar indicele 5 secţiunea de ieşire din difuzor (deci şi din ejector).

Între camera de amestec şi secţiunea 5 se poate scrie legea de conservare a energiei, sub forma:

$$i_3 + \frac{w_3^2}{2} = i_5 + \frac{w_5^2}{2} + p_5 \cdot v_5, \tag{14}$$

unde $p_5 \cdot v_5$ reprezintă lucrul mecanic necesar ca fluidul din ejector să pătrundă în spaţiul cu presiunea p_5 (lucrul mecanic de dislocare).

Dacă se ţine seama de ecuaţia (3), se poate scrie:

$$i_3'' + (2 - \varphi_3^2) \cdot \frac{w_3^2}{2} = i_5'' + (2 - \varphi_5^2) \cdot \frac{w_5^2}{2} + p_5 \cdot v_5 \cdot \tag{14a}$$

Avînd în vedere că i_3'' şi i_5'' reprezintă entalpii teoretice obţinute pe bază de destinderi izentropice, se poate scrie şi

$$i_5'' - i_3'' = c_p \cdot (T_5 - T_3) = \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} \cdot p_5 \cdot v_5 \left[1 - \left(\frac{p_3}{p_5}\right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}}\right]. \tag{15}$$

Prin urmare, relaţia (14*a*) se poate scrie şi

$$\frac{\varkappa}{\varkappa - 1} \cdot p_5 \cdot v_5 - \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} \cdot p_5 \cdot v_5 \cdot \left(\frac{p_3}{p_5}\right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}} = (2 - \varphi_3^2) \cdot \frac{w_3^2}{2} - (2 - \varphi_5^2) \cdot \frac{w_5^2}{2} - p_5 \cdot v_5 \tag{16}$$

Din legea conservării impulsului rezultă

$$w_{3,4} = \frac{w_1 + u \cdot w_2}{1 + u}, \tag{17}$$

deci, ţinînd seama şi de relaţiile (12),

$$w_3 = \frac{w_1 + u \cdot w_2}{\psi_2 (1 + u)}. \tag{18}$$

Se mai poate apoi scrie şi

$$v_5 = v_3 \cdot \left(\frac{p_3}{p_5}\right)^{1/\varkappa}, \tag{19}$$

iar v_3 se determină din legea continuităţii debitului

$$\frac{A_1 \cdot w_1}{v_1} + \frac{A_2 \cdot w_2}{v_2} = \frac{A_3 \cdot w_3, d}{v_3},$$

care devine

$$v_3 = v_1 \cdot \frac{A_3}{A_1} \cdot \frac{w_3, d}{w_1} \cdot \frac{1}{1 + u}, \tag{20}$$

unde A_1 şi A_3 sînt secţiunile în care vitezele sînt w_1 şi w_3. Ţinînd seama şi de relaţiile (12), se poate scrie:

$$v_3 = v_1 \cdot \frac{A_3}{A_1} \cdot \frac{w_3 \cdot \psi_1 \cdot \psi_2}{w_1 \cdot (1 + u)} = v_1 \cdot \psi_1 \cdot \frac{A_3}{A_1} \cdot \frac{w_1 + u \cdot w_2}{w_1 \cdot (1 + u)^2}. \tag{21}$$

Introducînd relaţiile (18), (19) şi (21) în relaţia (20) şi efectuînd transformările corespunzătoare, se obţine relaţia

$$\frac{p_3}{\varkappa - 1} \cdot \frac{v_1}{1 + u} \cdot \frac{A_3}{A_1} \cdot \frac{w_3 \cdot \psi_1 \cdot \psi_2}{w_1} \left[(2\varkappa - 1) \cdot \left(\frac{p_5}{p_3}\right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}} - \varkappa \right] =$$

$$= (2 - \varphi_3^2) \cdot \frac{(w_1 + u \cdot w_2)^2}{2 \varphi_2^2 \cdot (1 + u)^2} - (2 - \varphi_5^2) \frac{w_5^2}{2} \tag{22}$$

sau, în sfîrşit,

$$\frac{p_3}{\varkappa - 1} \cdot \frac{v_1}{1 + u} \cdot \frac{A_3}{A_1} \cdot \frac{\psi_1 \cdot \psi_2}{w_1} \left[(2\varkappa - 1) \cdot \left(\frac{p_5}{p_3}\right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}} - \varkappa \right] =$$

$$(2 - \varphi_3^2) \cdot \frac{w_1 + u \cdot w_2}{2 \psi_2 \cdot (1 + u)} - (2 - \varphi_5^2) \cdot \frac{w_5^2}{2} \cdot \frac{\psi_2 \cdot (1 + u)}{w_1 + u \cdot w_2}. \tag{22a}$$

Ecuaţia (22*a*) este valabilă pentru orice fel de ejector, dar pentru ejectoarele subsonice, în care vitezele nu se apropie prea mult de viteza critică, se poate scrie o relaţie mai simplă pe baza ecuaţiei lui Bernoulli:

$$p_3 + \frac{w_3^2}{2 v_3} = p_5 + \frac{w_5^2}{2 v_5}, \tag{23}$$

unde

$$w_3 = \frac{w_1 + u \cdot w_2}{\psi_2 \cdot (1 + u)} \quad \text{şi} \quad v_5 = \frac{v_1}{1 + u} \cdot \frac{A_3}{A_1} \cdot \frac{w_3 \cdot \psi_1 \cdot \psi_2}{w_1} \cdot \left(\frac{p_3}{p_5}\right)^{1/\varkappa}.$$

De aici rezultă :

$$p_5 - p_3 = \frac{(1+u)\cdot A_1 \cdot w_1}{2v_1 \cdot A_3 \cdot w_3 \cdot \psi_1 \cdot \psi_2} \cdot \left[\frac{(w_1 + u \cdot w_2)^2}{\psi_2^2 \cdot (1+u)^2} - w_5^2 \cdot \left(\frac{p_5}{p_3}\right)^{1/\varkappa} \right] \quad (24)$$

sau :

$$p_5 = p_3 + \frac{(1+u)\cdot A_1 \cdot w_1}{2v_1 \cdot A_3 \cdot \psi_1 \psi_2} \cdot \left[\frac{w_1 + u \cdot w_2}{\psi_2 \cdot (1+u)} - w_5^2 \left(\frac{p_5}{p_3}\right)^{1/\varkappa} \cdot \frac{\psi_2 \cdot (1+u)}{w_1 + u \cdot w_2} \right] \cdot \quad (24a)$$

În ambele ecuații (22*a*) și (24*a*), p_3 este ales astfel încît în secțiunea A_2 să se obțină viteza w_2, iar viteza w_5 se alege cît mai mică posibil, ca să nu dea o secțiune prea mare la ieșirea din ejector.

Se pot trasa curbe $p_5 = f(u)$, avînd ca parametru variabil $i_{0,1}$ pentru o anumită valoare a lui $i_{0,2}$ adică a condițiilor inițiale ale celor două fluide. În felul acesta se pot determina valorile obținute de u pentru diferite valori ale lui $i_{0,1}$ și p_5. Valorile φ_3 și φ_5 se aleg pe bază de experiență.

CONCLUZII

După cum s-a putut vedea, fenomenele reale din camera de amestec a ejectorului sînt foarte complicate. Ele depind în cea mai mare măsură de forma camerei și de viteza relativă și absolută a celor doi curenți (activ și antrenat). Pînă acum s-au putut lămuri numai aspectele principale ale fenomenelor, fără să se poată îmbrăca aceste aspecte într-o haină matematică riguroasă. De aceea determinarea pierderilor cauzate de vîrtejuri și șocuri se face încă tot pe cale experimentală.

Cînd ajutajul de destindere pentru fluidul activ pătrunde în partea convergentă a difuzorului, camera de amestec și difuzorul pot fi tratate ca un întreg. Aceasta permite să se scrie relații între coeficientul de ejecție, starea inițială a celor două fluide și presiunea finală a amestecului. Pe baza acestor relații se pot trasa curbe între cele trei categorii de mărimi arătate mai sus, care permit să se rezolve rapid diferitele probleme de dimensionare.

Primit la redacție la 20 martie 1964

BIBLIOGRAFIE

1. O. WEHRMANN, R. WILLE, *Beitrag zur Phänomenologie des laminar-turbulenten Übergangs im Freistrahl bei kleinen Reynoldszahlen.* Berlin, Springer-Verlag, 1958.
2. Z. ARDELEAN, *Contribuții la studiul teoretic și experimental camerelor de amestec ale ejectoarelor subsonice.* Dizertație pentru obținerea titlului de candidat în științe tehnice. Inst. Politehnic din Timișoara, 1963.
3. G. FLÜGEL, *Berechnung von Strahlapparaten.* DDI-Forschungsheft, 395 (1940).
4. Fr. BOŠNJAKOVIĆ, *Dampfstrahlgebläsen.* Z. ges. Kälteind., 229 (1936).
5. Fr. BOŠNJAKOVIĆ, *Dampfbefeuchtung in Strahlgebläsen.* Forsch. auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, *6*, 210/15 (1940).
6. A. N. LOJKIN, *Transformatoare de căldură.* București, Edit. tehnică, 1952.
7. J. WIEGAND, *Bemessung von Dampfstrahl-Verdichtern und ihr Verhalten bei wechselnden Betriebsbedingungen* VDI — Forschungsheft, 401 (1940).
8. N. IU. TAIT, *Calculul cuptoarelor de încălzire.* București, Edit. tehnică (1960).

RECOMANDĂRI PENTRU AUTORI :

Revista „Studii şi cercetări de energetică şi electrotehnică" publică rezultate originale ale cercetărilor din domeniile : energetică generală, electroenergetică şi electrotehnică, termoenergetică şi termotehnică — sub formă de articole, comunicări sau note. Revista mai cuprinde şi rubricile : discuţii, recenzii, informaţii şi altele. Temele abordate constituie cele mai recente realizări ştiinţifice şi tehnice.

1. Structura lucrării.

a) *Introducerea* va situa lucrarea pe fondul cunoştinţelor actuale, va desemna obiectivele şi indica metodele utilizate ;

b) *Tratarea* (despărţită pe subcapitole numerotat după clasificarea zecimală) va preciza premisele, ipotezele, simplificările adoptate şi va discuta rezultatele, erorile, posibilităţile şi comoditatea aplicării ;

c) *Concluziile* vor sintetiza rezultatele obţinute, limita lor de valabilitate şi áplicaţiile posibile.

2. Forma lucrării.

a) Lucrările se predau în 4 exemplare dactilografiate la 2 rînduri (2000 semne pe pagină), inclusiv exemplarul original fără corecturi, intervenţii.

b) se vor anexa :

bibliografia după standardele în vigoare ;

figurile pe calc în tuş, însoţite de cîte două copii şi de o listă a titlurilor figurilor ;

un rezumat de cinci, şase rînduri ;

un rezumat de circa 2000 semne.

c) La începutul lucrării se trece clasificarea zecimală internaţională ;

d) Volumul lucrării să nu depăşească circa 15 pagini.

Se primesc numai lucrări originale.

★

Manuscrisele se trimit Comitetului de redacţie : Bucureşti, Şos. Vitan nr. 236, raionul Tudor Vladimirescu.

Întreprinderea poligrafică „Informația", București — c. 2681

ERATĂ

Pag.	rîndul sau formula:	în loc de:	se va citi:
566	1 de jos	K	I
567	(3)	α	$\times$
568	4	j^{-2}; 7	j 2 x 7
576	14 de jos	P. ANGES, J. ANGES	P. AUGÉS, J. AUGÉ

St. cerc energ. electr., 3/1964.

1965 JUL - 9

LUCRĂRI APĂRUTE ÎN EDITURA ACADEMIEI R.P.R

V. PIMSNER, C. A. VASILESCU și GH. RĂDULESCU, *Energetica turbo motoarelor cu ardere internă*, 1964, 756 p., 45 lei.

D. DAMSKER, *Principii și mijloace noi de automatizare a acționărilor electrice*, 1964, 439 p., 24,50 lei.

N. TIPEI, V. N. CONSTANTINESCU, AL. NICA și O. BÎȚĂ, *Lagăre cu alunecare (calcul, proiectare, ungere)* (în limba rusă), 1964, 459 p., 30 lei.

CĂLIN ADRIAN VASILESCU, PERICLE SVORONOS și VICTOR PIMSNER, *Exploatarea rațională a gazelor naturale*, 1963, 367 p. + 7 pl., 26,40 lei

GH. CARTIANU, *Modulația de frecvență* (în limba rusă), 1961, 579 p. + 7 pl., 39,10 lei.

A. BELEȘ și MIRCEA SOARE, *Paraboloidul eliptic și hiperbolic în construcții*, 1964, 623 p. + 2 pl., 33 lei.

TRAIAN SĂLĂGEAN, *Fenomene fizice și metalurgice la sudarea cu arcul electric a oțelurilor*, 1963, 219 p., 12,10 lei.

A. MORARU, *Amplidina (mașina electrică amplificatoare de curent continuu cu cîmp transversal)*, 1962, 328 p. + 2 pl., 14,90 lei.

SUZANA GÎDEA, M. PROTOPOPESCU, D. DRIMMER, *Metalurgia fizică a semiconductorilor*, 1963, 501 p. + 4 pl., 31 lei.

VASILE MARCU, *Metalizarea prin pulverizare*, 1963, 340 p., 21 lei.

T. OROVEANU, *Scurgerea fluidelor prin medii poroase neomogene*, 1963, 329 p., 16,30 lei.

V. N. CONSTANTINESCU, *Lubrificația cu gaze*, 1963, 635 p., 31 lei.

*** *Tehnica nucleară în sprijinul producției. Unele realizări ale Institutului de fizică atomică al Academiei R.P.R.*, 1963, 253 p. + 1 pl., 14,30 lei.

*** *Sesiunea științifică jubiliară a Institutului de mecanică aplicată „Traian Vuia" al Academiei R.P.R.*, 1963, 445 p. + 1 pl., 23,30 lei.

I. P. „Informația" — c. 2681

43 821

Lei 18

F 1736

R

STUDII ŞI CERCETĂRI DE ENERGETICĂ ŞI ELECTROTEHNICĂ

VOLUM FESTIV

ÎNCHINAT ACADEMICIANULUI

REMUS RĂDULEŢ

CU OCAZIA ANIVERSĂRII A 60 DE ANI

4

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÂNE

St. cerc. energ. electr. Tom. 14 Nr. 4 p. 725—984 Bucureşti 1964

COMITETUL DE REDACȚIE

Acad. REMUS RĂDULEȚ — *redactor responsabil*;
Prof. G. BĂRĂNESCU, membru corespondent al Academiei R.P.R. — *redactor responsabil adjunct*;
Acad. A. AVRAMESCU;
Prof. M. MARINESCU, membru corespondent al Academiei R.P.R.;
V. M. POPOV, membru corespondent al Academiei R.P.R.;
Prof. C. ARAMĂ, membru corespondent al Academiei R.P.R.;
Prof. T. IONESCU, membru corespondent al Academiei R.P.R.;
Prof. ȘT. GHEORGHIU;
Ing. C. APETREI;
Ing. CS. NAGY;
Ing. V. PIMSNER;
Ing. C. A. VASILESCU;
Ing. ECATERINA ARIE — *secretar de redacție.*

Revista apare de 4 ori pe an.

Prețul unui abonament este de 72 lei.

Pentru a se asigura colecția completă și primirea la timp a revistei, reînnoiți abonamentul dv. pe anul 1965.

În țară, abonamentele se primesc la oficiile poștale, agențiile poștale, factorii poștali și difuzorii de presă din întreprinderi și instituții.

Comenzile de abonamente din străinătate se primesc la CARTIMEX, București, Căsuța poștală 134—135 sau la reprezentanții săi din străinătate.

Manuscrisele, cărțile și revistele pentru schimb, precum și orice altă corespondență se trimit la Comitetul de redacție pe adresa: BUCUREȘTI, Șos. Vitan nr. 236.

ANDREI TUGULEA

538.122 :621.30.13.2

Cîteva exemple de sinteze de cîmp magnetic în regim staționar

Sînt prezentate cîteva exemple de sinteză de cîmp magnetic care consistă în faptul că se dă distribuția cîmpului magnetic în lungul axei unei bobine cilindrice circulare și se determină distribuția amperspirelor care produc acest cîmp. Studiul se face în două cazuri : bobina aflată în vid și bobina mărginită în exterior de un mediu feromagnetic nesaturat.

St. cerc. energ. electr., Tom. 14, Nr. 4, 1964, p. 727

ALEXANDRU TIMOTIN

538.312 :537.311.31 :538.221

Asupra cuadritensorului energie-impuls macroscopic al cîmpului electromagnetic în medii cu proprietăți de material arbitrare

Se arată că o expresie generală a cuadritensorului energie-impuls macroscopic al cîmpului electromagnetic în prezența corpurilor poate fi stabilită, dacă se acceptă ipoteza că densitatea de energie a cîmpului electromagnetic și densitatea fluxului de energie a cîmpului electromagnetic sînt funcții de starea locală și instantanee a acestuia, independent de natura mediului. Expresia obținută este valabilă pentru medii cu proprietăți de material arbitrare și conduce, în medii liniare din punctul de vedere al polarizării electrice și al magnetizării, la rezultate echivalente celor care decurg din cuadritensorul lui Minkowsky.

St. cerc. energ. electr., Tom. 14, Nr. 4, 1964, p. 745

ANDREI TUGULEA, CEZAR FLUERAȘU

538.522.22 :621.3.013.70

Tensiuni electromotoare induse prin mișcare și forțe electrodinamice în cazul conductoarelor ecranate magnetic

În lucrare se arată că utilizarea formulelor cunoscute ale tensiunii electromotoare :

$$u_e = B\,l\,v$$

și ale forței electrodinamice

$$F = B\,I\,l$$

poate fi extinsă și în cazul unor conductoare filiforme ecranate magnetic total sau parțial și situate în cîmp magnetic inițial uniform.

Sînt indicate limite de aplicabilitate ale acestor formule, cum și consecințele pe care le implică în studiul mașinilor electrice. Un exemplu de calcul detaliat este prezentat în anexă.

St. cerc. energ. electr., Tom. 14, Nr. 4, 1964, p. 773

OSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT

STUDII ŞI CERCETĂRI DE ENERGETICĂ ŞI ELECTROTEHNICĂ

Tomul 14, nr. 4 1964

SUMAR

Pag.

* * * Academician profesor Remus Răduleţ (Cu ocazia împlinirii a 60 de ani) 727

ANDREI ŢUGULEA, Cîteva exemple de sinteze de cîmp magnetic în regim staţionar 735

ALEXANDRU TIMOTIN, Asupra cuadritensorului energie-impuls macroscopic al cîmpului electromagnetic în medii cu proprietăţi de material arbitrare 745

ANDREI ŢUGULEA şi CEZAR FLUERAŞU, Tensiuni electromotoare induse prin mişcare şi forţe electrodinamice în cazul conductoarelor ecranate magnetic 773

CONSTANTIN NEMOIANU, Refularea curentului armonic de aducţie în bare cilindrice de conductivităţi şi permeabilităţi diferite şi în contact în capete 793

ANDREI ŢUGULEA, Cîmpul electromagnetic cuasistaţionar al conductoarelor rectilinii parcurse de curenţi alternativi, în prezenţa ecranelor electromagnetice cilindrice 807

C. I. MOCANU, Calculul pierderilor de putere în ecrane electromagnetice ideale 839

C. I. MOCANU, Asupra transmisiunii energiei electromagnetice pe o linie electrică lungă multifilară 853

PAUL DIMO, Tipizarea totală a studiului reţelelor cu ajutorul „analizei nodale" 869

M. PREDA şi F. SPINEI, Forme generale de interconexiune a reţelelor fictive, corespunzătoare sistemelor de componente utilizate în studiul reţelelor trifazate 877

C. V. BĂLĂ, Contribuţii la problema producerii forţelor şi cuplului în maşinile electrice 899

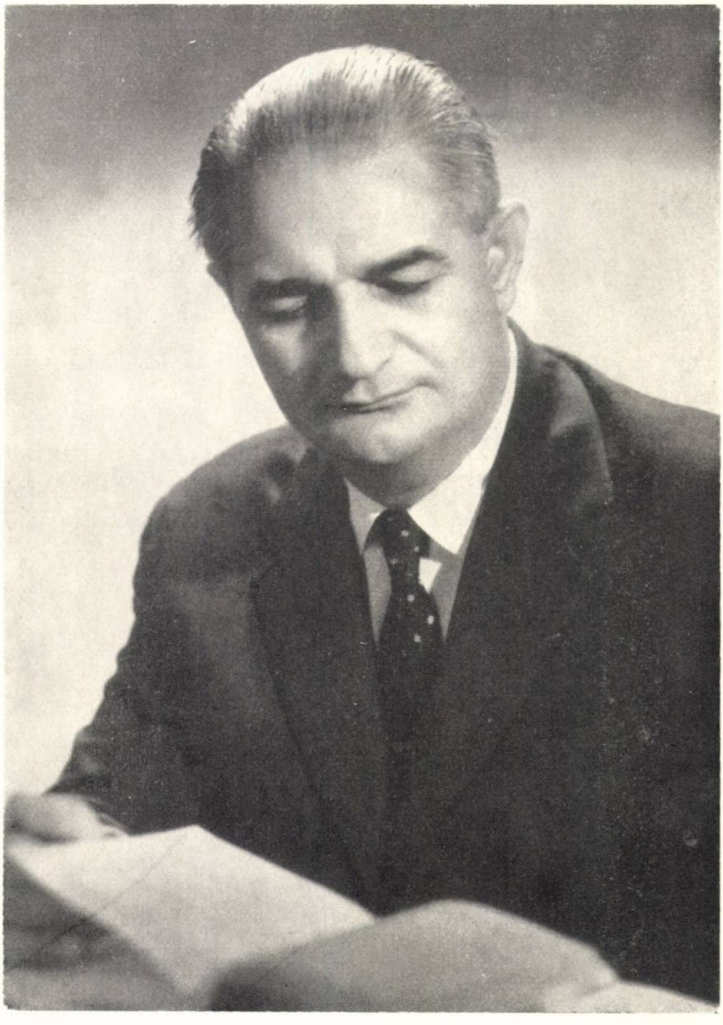
V. M. POPOV, Proprietăţi de stabilitate şi de optimalitate pentru sistemele automate cu mai multe funcţii de comandă 913

ECATERINA ARIE şi NICOLAE DAMIAN-IORDACHE, Determinarea caracteristicii dinamice frecvenţă-putere a unui sistem electroenergetic din comportarea sa la perturbaţii statistice. Metode şi algoritme de calcul . . 951

GLEB DRĂGAN, Contribuţii la determinarea supratensiunilor atmosferice induse în liniile aeriene de înaltă tensiune 969

Lucrări publicate de Academician prof. dr. ing. REMUS RĂDULEŢ. . . . 979

St. cerc. energ. electr. Tom 14 Nr. 4 p. 725—984 Bucureşti 1964



Remus Radulet

OPSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁRI ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT 1883

ACADEMICIANUL PROFESOR REMUS RĂDULEȚ

(Cu ocazia împlinirii a 60 de ani)

Marea majoritate a cititorilor revistei noastre cunosc, desigur, activitatea neobosită și multilaterală depusă de academicianul Remus Răduleț în serviciul științei și al progresului social. Alături de activitatea de cercetare științifică, ale cărei roade revista noastră, alături de atîtea alte reviste din țară și din străinătate, a avut cinstea să le prezinte cititorilor, mulți cunosc realizările academicianului Remus Răduleț ca întemeietor al unei școli românești de cercetare în domeniul electrotehnicii sau activitatea de orientare și îndrumare a catedrei pe care o conduce la Institutul politehnic din București. Multora le este cunoscută activitatea pe care academicianul Remus Răduleț o depune în calitate de președinte al Secției tehnice a Academiei R.P. Române, de director al Institutului de energetică al Academiei, sau de președinte al vechii instituții internaționale care este Comisia Electrotehnică Internațională.

De aceea, aniversarea a 60 de ani de viață este un binevenit prilej pentru a încerca să cuprindem pe scurt, într-o singură privire, realizările care i-au încununat activitatea și să subliniem prețuirea de care se bucură aceste realizări.

Originar din satul transilvănean Hendorf, regiunea Brașov, unde s-a născut la 3 mai 1904 și plecat apoi la Berivoii mici, în aceeași regiune unde urmează școala primară, își continuă studiile la liceele din Sighișoara și Făgăraș, absolvind apoi Facultatea de electromecanică, a Școlii politehnice din Timișoara. Intrat imediat după terminarea facultății, în 1927, ca asistent la catedra de electrotehnică, obține, un an mai tîrziu, o bursă pentru specializare la Școala politehnică federală din Zürich, Elveția, unde are prilejul de a urmări prelegerile unora dintre cei mai mari electrotehnicieni, fizicieni și matematicieni ai timpului. După susținerea doctoratului la Zürich, cu o teză privind teoria cuptoarelor de inducție fără fier se întoarce în țară, unde începe să desfășoare una dintre cele mai multilaterale și mai rodnice activități depuse de personalitățile noastre științifice. Astfel, alături de predarea unor cursuri de specialități diferite, însă înrudite ca substrat, și de efectuarea de cercetări științifice originale, desfășoară o activitate îndelungată în producție, ca inginer proiectant. Lărgindu-și continuu cercul preocupărilor la discipline tehnice și fizice înrudite, adîncește totodată studiul aspectelor generale, fundamen-

St. cerc. energ. electr. Tom 14 Nr. 4 p. 727—733 București 1964

tale, comune tuturor acestor discipline, ajungînd pe această cale pînă la cercetări în domeniul filozofiei științelor naturii. Prin aceste studii își formează și o concepție sistematică, unitară asupra disciplinelor de bază și a disciplinelor înrudite, căreia îi subordonează întreaga sa operă.

Deși o asemenea activitate, dat fiind caracterul ei în același timp divers și unitar, face dificilă efectuarea unei analize, care presupune împărțirea în clase independente, vom trece în revistă activitatea academicianului Remus Răduleț, încercînd totuși s-o împărțim în domenii distincte, subliniind totodată unitatea lor.

În acest sens se impune să considerăm în primul rînd activitatea didactică, pe care o începe îndată după terminarea studiilor de la Zürich. În perioada 1931—1951, în calitate de conferențiar și profesor la Institutul politehnic din Timișoara, predă cursuri avînd obiecte diferite, de la „Tehnica curenților slabi" și „Teoria mașinilor electrice" pînă la „Centrale electrice" și „Transportul și distribuția energiei electrice", toate aceste cursuri, deși diferă mult în ceea ce privește obiectul lor, fiind în fond strîns legate prin baza lor teoretică unică.

Tocmai această bază comună formează obiectul principal al preocupărilor didactice ale profesorului Remus Răduleț în perioada de după anul 1950, cînd își mută centrul de activitate în capitala țării, predînd la Facultatea de matematică a Universității, la Institutul de căi ferate și, începînd din 1951, la Institutul politehnic din București. Aici predă cursul de „Teoria cîmpului electromagnetic" și de „Bazele teoretice ale electrotehnicii', care reprezintă, în mare măsură, o sinteză a activității sale didactice și de cercetare anterioare. Aceste cursuri au adus un suflu nou în învățămîntul nostru superior. Vechiul sistem de predare a bazelor teoretice ale electrotehnicii, bazat pe teoria circuitelor electrice, a fost înlocuit în cursul profesorului Remus Răduleț printr-un sistem de predare bazat în mod consecvent pe teoria cîmpului electromagnetic. În afară de cursurile menționate, profesorul Remus Răduleț predă, în perioada de după 1950, și cursuri privind macrofizica și microfizica. Toată această activitate didactică și de cercetare a condus la formarea unei școli de cercetare electrotehnică în țara noastră, care, datorită activității depuse de academicianul Remus Răduleț în acest sens, se găsește astăzi în plin avînt.

În strînsă legătură cu activitatea sa didactică s-a desfășurat activitatea de cercetare științifică originală, depusă de academicianul Remus Răduleț. Contribuțiile aduse acoperă un domeniu vast, de la teoria generală a cîmpului electromagnetic și predeterminarea de cîmpuri electromagnetice pînă la probleme privind liniile electrice lungi, sudura electrică și curenți în conductoarele masive din cuptoarele electrice de inducție, din frîne și mașini electrice.

În teoria generală a cîmpului, academicianul Remus Răduleț a descoperit o diviziune consecventă a problemelor în „teoria mărimilor de primul ordin" și „teoria legilor interne ale electromagnetismului" , cu importante consecințe asupra problemei dimensiunii mărimilor fizice de primul ordin și raționalizării în electromagnetism.

Din același complex de cercetări fac parte studiile care au condus la elaborarea unei teorii a mărimilor fizice independentă de unitățile de

măsură. În cadrul unui alt complex de cercetări, Remus Răduleț a obținut condițiile cele mai generale în care forțele și momentele exercitate de cîmp asupra corpurilor pot fi reduse la stări fictive de tensiune în cîmp.

În domeniul studiului aplatizării frunții undelor mobile pe liniile electrice lungi, academicianul Remus Răduleț a elaborat una din primele lucrări în care a reușit să determine această aplatizare printr-o expresie analitică strînsă, utilizînd în acest scop o metodă originală.

În lucrările sale de predeterminare prin calcul a unor cîmpuri electrice și magnetice statice și staționare a folosit ca instrument de lucru în special reprezentarea conformă în probleme de cîmpuri plane sau modele plane pentru cîmpuri cu simetrie în raport cu o axă. A rezolvat pe această cale probleme noi de efecte de margine în electrostatică, de lungimi echivalente ale unor circuite magnetice și de calculul factorului de amplificare al unor triode cu forme foarte generale ale grilei, respectiv probleme de curenți de defect în pereți umezi și de ecranare electrodinamică.

În domeniul sudurii electrice cap la cap a dedus primele formule fundamentale pentru predeterminarea prin calcul a puterii necesare în acest scop, care au fost folosite, în colaborare cu regretatul academician Micloși, pentru evaluarea puterii necesare instalației de sudură cu ardere intermediară Taurus, inventată și brevetată în țară. Într-o lucrare de colaborare înrudită cu acestea a determinat recent regimul termic tranzitoriu în bare formate pe porțiuni din două metale, pe baza integrării corecte a ecuațiilor acestui regim, folosind cu ingeniozitate o ortogonalizare a funcțiunilor proprii respective generalizînd astfel rezultate cunoscute doar pe bază de aproximații ce nu sînt aplicabile decît unor cazuri particulare.

Problemele de determinare a curenților electrici variabili de aducție și de inducție sau Foucault în conductori imobili au format de mult timp o preocupare de căpetenie a colaboratorului nostru. Aceste probleme preocupă pe electrotehnicieni de aproape șase decenii.

Cum problemele de curenți variabili în conductoare masive de forme mai complicate prezintă dificultăți, atenția profesorului Răduleț s-a îndreptat în principal mai mult asupra conductoarelor drepte de secțiune poligonală sau asupra conductoarelor cu simetrie cilindrică, în special pentru cazul curenților Foucault. Fiindcă chiar și problemele de conductoare prismatice sau cu simetrie cilindrică prezintă dificultăți, numeroase probleme au fost rezolvate fie formate în aproximația de refulare slabă, fie în cea de refulare netă a curentului variabil.

Dintre lucrările sale mai noi, elaborate în colaborare cu tinere elemente din catedra sa și privind conductoarele prismatice cu oricîte fețe, relevăm rezolvarea în două aproximații bune a problemei fundamentale de determinare a factorului în alternativ al acestor conductoare la refulare netă a curentului electric. Aproximațiile se obțin prin folosirea unor modele ingenioase, în diedre și diedre trunchiate, pentru reprezentarea fenomenelor de pe două sau una din fețele conductorului cilindric, îmbinată cu „coaserea" la suprafața conductorului a soluțiilor obținute pentru diferitele fețe. Expresia generală obținută degenerează în anumite cazuri limită și simple în expresiile oarecum exacte, obținute pe alte căi;

ea aproximează bine expresiile obținute pe alte căi în cazul barelor cu pînă la patru fețe sau în cazul barelor cu secțiunea în poligon regulat. Ea constituie, totodată, singura aproximație cunoscută pînă în prezent pentru factorul rezistenței în alternativ al barelor prismatice de secțiune dreaptă neregulată și cu mai mult de trei fețe. Printr-o metodă de corelare se rezolvă și problema pierderilor prin curenți induși în anumite bare prismatice prin efect „omogen" de proximitate.

În domeniul curenților Foucault, profesorul Răduleț a acordat o atenție deosebită curenților induși în șarjele cuptoarelor de inducție fără fier. Cercetările sale în acest domeniu au fost începute în teza sa de doctorat, publicată acum o treime de secol. Ele au fost reluate pentru prima oară prin anii 1936—1937, cum și, pentru a doua oară, acum cîțiva ani, în colaborare cu elemente din catedra sa, pe care le-a inițiat între timp în cercetarea din acest domeniu.

Se știe că randamentul cuptoarelor la efect pelicular pronunțat e cu atît mai mic, cu cît conductivitatea șarjei e mai mare. Pentru a mări artificial randamentul cuptoarelor pentru astfel de șarje, anumiți constructori de cuptoare străini au propus acum mai bine de două decenii să se îmbrace interiorul creuzetului cu un strat de conductivitate mai mică, în care să se dezvolte în principal căldură prin efectul electrocaloric al curenților induși de bobina primară a acestor cuptoare, de unde să treacă prin conducție în șarja propriu-zisă. Ei i-au pus academicianului Remus Răduleț problema de a determina mărirea de randament în funcție de constantele de material ale șarjei și îmbrăcămintii conductoare și în funcție de grosimea acesteia. A rezolvat problema atît în aproximația pe care o reprezintă un model plan al cuptorului, cît și pentru cazul cuptorului cilindric, folosind un model infinit înalt al cuptorului, deoarece aceste aproximații nu afectează sensibil creșterea de randament, îmbrăcămintea fiind relativ subțire arătînd condițiile pentru a se obține o mărire sensibilă a randamentului față de cazul că ar lipsi îmbrăcămintea, mărire pe care a și calculat-o.

Cu ajutorul aproximației pentru efectul pelicular pronunțat a rezolvat, încă în perioada 1930—1937, problema calculului rezistenței și reactanței echivalente a șarjei cuptoarelor de inducție fără fier. Se punea problema determinării expresiilor unor factori de formă, adică depinzînd de raportul dintre diametrul și înălțimea șarjei, care, înmulțiți cu valorile pe care le furniza teoria cuptorului infinit lung pentru rezistența și reactanța echivalentă a acestuia, să dea valorile pe care le au aceste mărimi în cuptorul real. Problema a fost rezolvată în 1930, aproximînd fenomenele din cuptorul cu simetrie axială prin fenomenele dintr-un model plan-paralel al lui cu adîncimea egală cu diametrul șarjei și folosind reprezentarea conformă pentru determinarea cîmpului magnetic din izolanții dintre bobina primară și șarjă. Date fiind condițiile diferite de pe bazele șarjei în cuptorul real și în modelul plan-paralel, a operat numai cu afluxul de putere prin fețele laterale ale modelului. Prin experiențe făcute pe un cuptor de laborator a reușit să verifice aceste expresii cu o precizie suficientă pentru nevoile proiectării cuptoarelor, pentru șarje de forme și materiale diferite.

În 1937 a reușit să dea o a doua soluție aceleiași probleme, aproximînd șarja printr-un elipsoid de rotație care are drept axă de simetrie chiar axa de simetrie a cuptorului. A obținut astfel pentru factorii de formă expresii explicite și apropiate de cele din prima lucrare, însă cu valori și mai apropiate de valorile reale.

Cum valorile din lucrarea din 1930 coincideau cu cele măsurate pentru șarje cilindrice de o anumită formă și erau mai mici decît acestea pentru șarjele mai scurte și mai mari decît ele pentru șarjele mai lungi, problema modelului plan-paralel a fost reluată și ameliorată în anii trecuți. Calculîndu-se cu întregul aflux de putere prin fețele laterale și frontale ale modelului, s-au obținut valori ale factorilor de formă mai apropiați de cele reale și de cele calculate pe baza modelului elipsoidal al șarjei. Calculul a fost completat recent și cu evitarea unei aproximații ce fusese folosită în reprezentarea conformă.

În ultimii ani, academicianul Remus Răduleț a reluat, în colaborare, și studiul modelului elipsoidal al șarjei, pentru a obține o soluție nu numai pentru cazul refulării nete, ci și pentru cel al refulării difuze a curentului, care prezintă interes pentru prinderea unor indici noi care descriu comportarea cuptoarelor.

Aceste lucrări, urmărite de peste trei decenii, completate și cu o lucrare privitoare la reactanțele de scăpări ale unor cuptoare de inducție cu miez feromagnetic, sînt un exemplu tipic de felul în care o cercetare de cel mai înalt nivel poate să ducă la soluții tot mai precise ale unei probleme tehnice foarte dificile, prin atacarea ei din direcții diferite și prin mijloace matematice tot mai puternice. Verificări recente arată de altfel că și astăzi aceste lucrări sînt considerate și în străinătate drept cele mai avansate din domeniu.

Prin lucrările sale privitoare la curenții electrici în conductoare masive mobile a urmărit să contribuie la elaborarea unor teorii mai precise decît cele existente pentru frînele electrice de inducție cu disc neferomagnetic și feromagnetic pentru motoarele asincrone cu rotorul în formă de pahar sau cu lamele rotorice, care prezintă interes, printre altele, în automatizare, cum și pentru ambreiaje de inducție. Prin aceste lucrări, s-a rezolvat în principal problema determinării prin calcul a forței exercitate asupra armăturii mobile a frînelor și ambreiajelor, respectiv a cuplului motor al unor micromotoare electrice.

Aceste lucrări studiază fenomenele din frîne cu o aproximație mai bună decît în trecut, stabilind pentru forța de frînare expresii valabile pentru viteze oarecare ale discului frînei, folosind o aproximare mai bună a repartiției cîmpului magnetic de excitație în întrefier și operînd cu un întrefier echivalent, presupunînd însă infinită permeabilitatea magnetică a fierului, aproximație care este folosită curent în probleme de electrotehnică asemănătoare.

Expresia forței de frînare a frînelor cu rotorul în coroană circulară conductoare a fost stabilită prin două metode de calcul. În prima metodă s-a dezvoltat inducția magnetică de excitație, din între-

fierul frînei, în serie dublă Fourier, după coordonata din direcția mișcării și după cea perpendiculară pe direcția mișcării. S-au integrat în aceste condiții ecuațiile lui Maxwell și s-a obținut forța de frînare F_{mn} corespunzătoare armonicilor (de ordinele mn) superioare ale inducției magnetice B, iar prin însumare s-a determinat o primă expresie a forței de frînare.

Cea de-a doua metodă pentru calculul forței de frînare consistă în dezvoltarea expresiei inducției magnetice de excitație în serie Fourier simplă, după direcția mișcării, în a integra ecuațiile lui Maxwell scrise în ipoteze asemănătoare cu cele de mai sus, în calculul forței de frînare corespunzătoare prin însumarea forțelor care corespund diferitelor armonici ale inducției în direcția de mișcare a benzii. Experiențe publicate în literatura de specialitate și experiențe ulterioare, efectuate de colaboratori ai săi, care au stabilit apoi și o a treia expresie a forței de frînare, (arată o concordanță între calcul și experiment, care este mult mai bună decît rezultatele generale) ce fuseseră cunoscute în prealabil.

S-a elaborat apoi o teorie asemănătoare a frînelor al căror disc are partea centrală conductoare și s-a obținut un același ordin de mărime al diferențelor procentuale dintre valorile calculate ale forțelor de frînare și cele măsurate și publicate în literatura de specialitate.

Un al doilea grup de lucrări asupra curenților variabili în conductoare mobile, înrudit din punctul de vedere teoretic cu primul grup, privește teoria micromotoarelor asincrone cu rotorul în formă de pahar, respectiv cu lamele rotorice.

În lucrările, destul de numeroase, privitoare la motoarele cu rotorul în formă de pahar, nu se ținea seamă de influența fundului paharului și de cîmpul magnetic din zona capetelor de „bobine", iar cîmpul magnetic învîrtitor din întrefier se considera de tip circular. Profesorul Răduleț a ținut seamă de influența pe care o au fundul paharului, ca și cîmpul magnetic rezultant din zona capetelor de bobină, asupra densității curentului electric indus în rotor. De asemenea a considerat că în întrefier cîmpul magnetic învîrtitor este de tipul eliptic, cum se prezintă el de fapt în construcția obișnuită a acestor motoare. În anumite ipoteze de calcul și cu simplificări obișnuite în astfel de probleme a integrat ecuațiile lui Maxwell în rotor și a obținut expresia cuplurilor direct și invers ale motorului.

În lucrarea privitoare la motorul asincron difazat cu lame rotorice neferomagnetice și cîmp magnetic învîrtitor eliptic a calculat densitatea curentului electric din rotor și cuplul unui astfel de motor, al cărui rotor este constituit din lame neferomagnetice care ocupă generatoarele unui cilindru circular, lamele fiind unite între ele, la una din extremități, prin lame frontale.

Din cauza limitărilor date de aproximații, expresiile obținute pot servi pentru calcule de orientare ale forței în frîne și ambreiaje cu armătură feromagnetică.

Și acest grup de lucrări constitue un exemplu de urmărire unitară și la nivel înalt a unor fenomene complexe, în parte asemănătoare, prin ata-

carea lor din puncte de vedere diferite și cu mijloace de atac variate, pentru a se obține soluții tot mai bune în vederea stăpînirii lor în calcul și proiectare.

Cunoștințele în același timp vaste și profunde ale academicianului Remus Răduleț s-au manifestat din plin în vasta operă reprezentată de *Lexiconul tehnic romîn*, lucrare elaborată sub conducerea sa și pentru care a fost distins, în 1955, cu Premiul de Stat clasa I. În această operă, care, în a doua elaborare cuprinde vreo 80 000 de termeni, concepția sistematică unitară introdusă de academicianul Remus Răduleț se recunoaște la fiecare pagină. Menționăm că, pentru a realiza acest lucru, academicianul Remus Răduleț a trebuit să revizuiască cu minuțiozitate, fiecare dintre termenii cuprinși în lexicon, și să-i scrie complet pe cei generali, pentru a avea tabloul unei munci de o excepțională amploare, atît în adîncime, cît și în volum. Prin aceasta a adus o contribuție hotărîtoare la realizarea unei lucrări enciclopedice de amploare unică în literatura noastră.

Activitatea didactică și de cercetare științifică desfășurată de academicianul Remus Răduleț a exercitat o influență profundă asupra unei întregi generații de tineri cercetători, care au găsit în persoana sa un model de formație științifică severă. În activitatea sa, ei au găsit o exigență intransigentă pentru rigoarea și consecvența raționamentelor, refuzul net de a trata lucrările la suprafață chiar cînd uzanța generală permite acest lucru, îmbinarea neobișnuită a unei specializări foarte adînci cu un orizont larg asupra disciplinelor vecine, uneori chiar depărtate. Ei au găsit în aceste lucrări un model în privința atenției care trebuie acordată problemelor fundamentale, analizei profunde a conceptelor generale ale științei, ajungînd pînă la nivelul la care distincția dintre știința respectivă și filozofie este dificilă, pînă la punctul în care cercetarea științifică reclamă intervenția interpretării filozofice materialist-dialectice.

Școala vastă creată de academicianul Remus Răduleț cuprinde astăzi în specialitate un numai laboratoarele institutelor de cercetări și catedrele institutelor de învățămînt, superior, ci și fabricile și uzinele din țara noastră, fapt cu implicații evidente în desăvîrșirea construirii socialismului în țara noastră.

Comitetul de redacție și colaboratorii revistei noastre urează cu acest prilej academicianului Remus Răduleț deplină sănătate și forță de muncă pentru continuarea operei pe care a întreprins-o.

CÎTEVA EXEMPLE DE SINTEZE DE CÎMP MAGNETIC ÎN REGIM STAȚIONAR[1])

DE

ANDREI ȚUGULEA

Institutul politehnic, Cal. Griviței, nr. 132, București

538.122 :621.3.013.2

Sînt prezentate cîteva exemple de sinteză de cîmp magnetic care consistă în faptul că se dă distribuția cîmpului magnetic în lungul axei unei bobine cilindrice circulare și se determină distribuția amperspirelor care produc acest cîmp. Studiul se face în două cazuri : bobina aflată în vid și bobina mărginită în exterior de un mediu feromagnetic nesaturat.

Dacă se dau sursele cîmpului magnetic, care sînt în general distribuții de curenți de conducție, și se dă domeniul în care trebuie determinat cîmpul magnetic, inclusiv condițiile de pe frontiera acestuia, operația de determinare a cîmpului face parte din *analiza cîmpurilor magnetice*. Dacă se cere să se determine o repartiție a surselor cîmpului (adică a densității curentului de conducție), pentru a se obține o anumită repartiție a cîmpului într-un domeniu dat, operația de determinare a acestei repartiții, care e inversă operației de analiză, se poate numi *sinteza cîmpurilor magnetice*.

Remarcăm că nici unul dintre cei doi termeni nu este încă acceptat în limbajul teoretic, dar, avînd în vedere terminologia utilizată în probleme similare privind rețelele electrice, se pare că utilizarea lor e potrivită.

Dacă operația de analiză a cîmpurilor magnetice în regim staționar e o problemă clasică, în principiu rezolvată [1], [2], unde dificultățile

[1]) Articol apărut și în „Rev. Roum. Sci. Techn. — Electrotehn. Energ.", **9**, *4* (1964).

de rezolvare ale unor probleme concrete sînt de ordin matematic, operaţia de sinteză nu e în general studiată, fiind — ca şi în cazul reţelelor electrice — mult mai dificilă decît analiza. Nu s-a studiat, de exemplu, dacă problema are soluţie unică.

Problema sintezei cîmpurilor magnetice prezintă o mare importanţă în optica electronică, în teoria acceleratoarelor de particule, în studiul capcanelor magnetice etc.

În literatură există studii mai sistematice privind sinteza cîmpurilor magnetice în acceleratoare ciclice [3] şi în dispozitive anexe.

Există un caz în care operaţia de sinteză a unui cîmp magnetic este banală, şi anume atunci cînd acest cîmp este dat în întregul spaţiu presupus omogen.

În acest caz simplu, operaţia de sinteză se reduce la calculul rotorului vectorului intensitate a cîmpului magnetic, $\boldsymbol{H}$,

$$\boldsymbol{J} = \operatorname{rot} \boldsymbol{H}. \tag{1}$$

Problemele de sinteză sînt însă puse pentru domenii finite, în care distribuţiile de curenţi sînt limitate spaţial, adesea asimilabile cu nişte pînze de curenţi; în aceste probleme intervin în mod esenţial condiţiile la limită de pe frontiera domeniului în care se sintetizează cîmpul. În cele mai multe dintre probleme se dă cîmpul numai într-o anumită porţiune a domeniului: în lungul unei axe, pe o suprafaţă etc.

O soluţie generală a unor astfel de probleme este greu de întrevăzut şi de aceea ne limităm la cîteva cazuri simple, dar care prezintă interes.

În cele ce urmează se vor rezolva cîteva probleme de sinteză a unor cîmpuri magnetice în dispozitive de focalizare (lentile electronice magnetice) cu simetrie cilindrică, în care se dă cîmpul pe axa de simetrie longitudinală.

Se ştie că în optica electronică, în aproximaţia dioptricii lui Gauss (pentru fascicule paraxiale), ecuaţia traiectoriei unei particule e [4]:

$$\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}z^2} = -k\, r\, H^2(z), \tag{2}$$

unde r e distanţa dintre particulă şi axa de simetrie Oz, $H(z)$ e intensitatea cîmpului magnetic în lungul axei Oz, iar k o constantă.

În general, dacă se dă o lentilă electronică magnetică, se calculează cîmpul şi apoi se determină traiectoria. Dacă e necesară o anumită traiectorie, problema se rezolvă prin tatonări.

În lucrarea de faţă ne punem problema invers. Pentru a avea o anumită traiectorie $r(z)$, căreia îi corespund caracteristici optico-electronice prestabilite, determinăm din ecuaţia (2) funcţia $H(z)$, iar apoi, cunoscînd repartiţia cîmpului în lungul axei Oz, îl sintetizăm, adică găsim distribuţia de curenţi.

Studiul este efectuat în două cazuri: bobina cilindrică (presupusă infinit subțire) este situată în vid; bobina cilindrică este mărginită exterior de un mediu feromagnetic nesaturat cu permeabilitate practic infinită.

BOBINA CILINDRICĂ SITUATĂ ÎN VID

Se cere să se determine repartiția amperspirelor unei bobine circulare subțiri și foarte lungi, de rază a, în așa fel încît în lungul axei sale intensitatea cîmpului magnetic $H_z(z, o) = F(z)$, unde $F(z)$ e o funcție dată. Bobina e situată în vid (fig. 1).

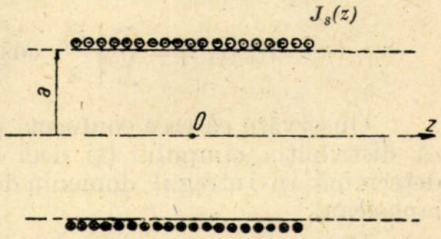


Fig. 1

Deoarece în afara pînzei de curent concentrate pe suprafața bobinei cîmpul magnetic e irotațional, se poate considera că el derivă dintr-un potențial scalar V_m, care satisface ecuația lui Laplace atît în interiorul, cît și în exteriorul bobinei.

Din motive de simetrie $V_m = V_m(z, r)$ și satisface ecuația lui Laplace în coordonate cilindrice:

$$\frac{\partial^2 V_m}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V_m}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_m}{\partial z^2} = 0. \tag{3}$$

Considerînd bobina infinit lungă, aplicînd metoda separării variabilelor și efectuînd dezvoltarea în integrală Fourier [5], [6], se obține soluția generală din interior:

$$V_m^{(i)}(r, z) = \int_0^\infty [A_\lambda \sin \lambda z + B_\lambda \cos \lambda z]\, I_0(\lambda r)\, d\lambda, \tag{4}$$

iar în exterior:

$$V_m^{(e)}(r, z) = \int_0^\infty [C_\lambda \sin \lambda z + D_\lambda \cos \lambda z]\, K_0(\lambda r)\, d\lambda, \tag{5}$$

unde s-a ținut seama că atît potențialul, cît și cîmpul sînt finite în lungul axei Oz și la $r \to \infty$. $I_0(\lambda r)$ și $K_0(\lambda r)$ sînt funcții Bessel de prima și a doua speță, de ordinul zero și de argument imaginar.

Deoarece se cunoaște funcția $H_z(z, 0) = F(z)$, se poate dezvolta și această funcție în integrală Fourier (presupunînd implicit că satisface condițiile necesare), obținîndu-se:

$$F(z) = \int_0^\infty [F_\lambda \sin \lambda z + G_\lambda \cos \lambda z]\, d\lambda = -\left[\frac{\partial V_m^{(i)}}{\partial z}\right] r = 0, \tag{6}$$

unde:

$$F_\lambda = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(z) \sin \lambda z\, dz \tag{7}$$

și

$$G_\lambda = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(z)\cos \lambda z \, dz. \tag{8}$$

Introducînd relația (4) în (6), rezultă:

$$A_\lambda = -\frac{G_\lambda}{\lambda} \quad \text{și} \quad B_\lambda = \frac{F_\lambda}{\lambda}. \tag{9}$$

Deci soluția generală va fi:

$$V_m^{(i)}(r, z) = \int_0^\infty \left[\frac{F_\lambda}{\lambda}\cos \lambda z - \frac{G_\lambda}{\lambda}\sin \lambda z\right] I_0(\lambda r)\, d\lambda. \tag{10}$$

Observăm că ea e conformă cu o teoremă cunoscută [7], care afirmă că distribuția cîmpului (și deci a potențialului) în lungul axei Oz îl determină în întregul domeniu de simetrie cilindrică în care acesta e laplacean.

Determinarea constantelor din soluția pentru exterior se face punînd condiția de trecere continuă prin suprafața bobinei a componentei radiale a inducției magnetice $B_r = \mu_0 H_r$, care e, în acest caz, proporțională cu H_r:

$$-\left(\frac{\partial V_m^{(i)}}{\partial r}\right)_{r=a} = -\left(\frac{\partial V_m^{(e)}}{\partial r}\right)_{r=a}. \tag{11}$$

Introducînd în relația (11) relațiile (5) și (10) și ținînd seama că $I_0'(\lambda a) = +I_1(\lambda a)$ și $K_0'(\lambda a) = -K_1(\lambda a)$, rezultă:

$$C_\lambda = \frac{G_\lambda}{\lambda}\cdot\frac{I_1(\lambda a)}{K_1(\lambda a)}; \quad D_\lambda = -\frac{F_\lambda}{\lambda}\cdot\frac{I_1(\lambda a)}{K_1(\lambda a)}. \tag{12}$$

Pentru calculul densității pînzei de curent J_s, utilizăm forma locală a legii circuitului magnetic, pentru suprafețele de discontinuitate [2]:

$$H_{2t} - H_{1t} \equiv H_z^{(i)}(z, a) - H_z^{(e)}(z, a) = J_s(z). \tag{13}$$

Ținînd seama de relațiile (4), (5), (9), (10) și (12) și utilizînd relația (13) rezultă:

$$J_s(z) = \int_0^\infty \frac{I_1(\lambda a)K_0(\lambda a) + I_0(\lambda a)K_1(\lambda a)}{K_1(\lambda a)}\cdot(F_\lambda \sin \lambda z + G_\lambda \cos \lambda z)\, d\lambda, \tag{14}$$

care reprezintă soluția generală a problemei. Ea poate fi particularizată în diferite cazuri care prezintă interes.

Din relația (14) se observă că, convergența integralei e asigurată de comportarea la valori mari ale funcțiunilor ce intervin sub semnul

de integrare. Astfel, pentru valori mari ale variabilei λa e satisfăcută relația:

$$\lim_{\lambda a \to \infty} \frac{I_1(\lambda a) K_0(\lambda a) + I_0(\lambda a) K_1(\lambda a)}{K_1(\lambda a)} \approx \lim \lambda^{-\frac{1}{2}} e^{\lambda a} \to \infty$$

dacă se ține seamă că formulele asimptotice la valori mari ale argumentelor pentru funcțiunile Bessel de argument imaginar sînt:

$$I_0(\lambda a) \approx I_1(\lambda a) = \left(\frac{1}{2\pi \lambda a}\right)^{\frac{1}{2}} e^{\lambda a} + \ldots$$

$$K_0(\lambda a) \approx K_1(\lambda a) = \left(\frac{\pi}{2\lambda a}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\lambda a} + \ldots$$

Pentru asigurarea convergenței integralei Fourier este necesar ca coeficienții F_λ și G_λ să descrească la valori mari ale variabilei λa cel puțin ca $\lambda^{\frac{1}{2}} e^{-M\lambda}$, unde $M > a$. Cum acești coeficienți depind de distribuția cîmpului de sintetizat, rezultă că nu orice distribuție de cîmp e sintetizabilă pe calea propusă și că nu e suficient ca această distribuție să fie dezvoltată în integrală Fourier [2]).

APLICAȚIE

a) Presupunem că $H_z\ (0, z) = H_0 \dfrac{1}{1 + k^2 \left(\dfrac{z}{a}\right)^2}$ cu k real și pozitiv.

Funcția fiind pară în z, armonicile în sinus sînt nule, și aplicînd relația (8) obținem [6]:

$$G_\lambda = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{H_0}{1 + k^2 \left(\frac{z}{a}\right)^2} \cos \lambda z \, dz = \frac{2H_0}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\left(\frac{a}{k}\right)^2}{\left(\frac{a}{k}\right)^2 + z^2} \cos \lambda z \, dz = \tag{15}$$

$$= H_0 \frac{a}{k} e^{-\frac{a}{k}\lambda}.$$

Densitatea pînzei de curent va fi:

$$J_s(z) = \frac{H_0 a}{k} \cdot \int_0^{\infty} e^{-\frac{a}{k}\lambda} \cdot \frac{I_1(\lambda a) K_0(\lambda a) + I_0(\lambda a) K_1(\lambda a)}{K_1(\lambda a)} \cos \lambda z \, d\lambda.$$

[2]) Această observație a fost relevată de ing. A. Moraru.

Se observă că pentru orice valoare $0 \leqslant k < 1$ integrala e convergentă, deoarece $e^{-\frac{a}{k}\lambda}$ descreşte mai repede decît $\lambda^{\frac{1}{2}} e^{-a\lambda}$.

Dînd diferite valori parametrului k, se poate sintetiza o întreagă familie de cîmpuri.

b) Presupunem $H_z(0, z) = H_0 e^{-\alpha^2 z^2}$ (α real).

Procedînd ca şi în cazul *a*), rezultă :

$$J_s(z) = \frac{H_0}{\alpha\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{\lambda^2}{4\alpha^2}} \cdot \frac{I_0(\lambda a) K_1(\lambda a) + I_1(\lambda a)\, K_0(\lambda a)}{K_1(\lambda a)} \cos \lambda z \, d\lambda. \quad (17)$$

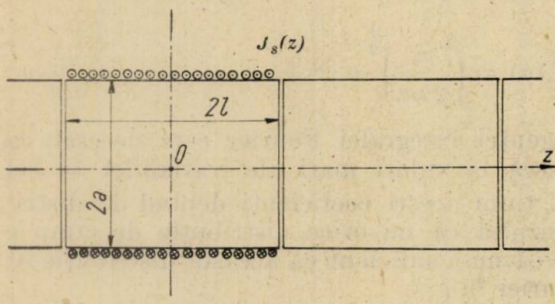


Fig. 2

Se observă uşor convergenţa rapidă a acestei integrale. Dînd diferite valori parametrului α, putem sintetiza de asemenea o familie de cîmpuri.

Deoarece mînuirea integralelor Fourier care apar în soluţii (14), (16), (17) e, pe de o parte, mai greoaie, iar pe de altă parte bobinele nu sînt infinite, pentru bobine de lungime finită se pot obţine în soluţii serii Fourier, considerînd cîmpul magnetic periodic în lungul axei Oz (fig. 2).

În aceste condiţii soluţia se obţine prin simpla înlocuire a integralelor prin serii şi a dezvoltărilor în integrală Fourier prin coeficienţii diferitelor armonici ale seriilor.

Astfel, din (14) rezultă :

$$J_s(z) = H_{\text{med}}(0, z) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{I_1(\lambda_k a)\, K_0(\lambda_k a) + I_0(\lambda_k a) \cdot K_1(\lambda_k a)}{K_1(\lambda_k a)} \cdot [F_k \sin \lambda_k z + G_k \cos \lambda_k z] \quad (18)$$

unde $\lambda_k = \frac{k\pi}{l}$, cu $k = 1, 2, \ldots$, iar F_k şi G_k sînt coeficienţii dezvoltării în serie Fourier a cîmpului $H(0, z)$, a căror descreştere la valori mari ale parametrului k trebuie să fie suficient de rapidă pentru a asigura convergenţa seriilor.

Dacă considerăm următoarea distribuţie a cîmpului :

$$H(0, z) = H_0 \left[1 - \frac{z^2}{l^2}\right] \text{pentru } -l \leqslant z \leqslant +l.$$

Calculînd coeficienții dezvoltării în serie Fourier și observînd că, datorită parității funcției nu rezultă decît armonici în cosinus, obținem pînă la sfîrșit soluția:

$$J_s(z)=\frac{2}{3}H_0-\frac{4H_0}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\cdot\frac{I_1(\lambda_k a)K_0(\lambda_k a)+I_0(\lambda_k a)K_1(\lambda_k a)}{K_1(\lambda_k a)}\cdot\cos\lambda_k z.$$

Se observă că seria e divergentă.

În aceste condiții, ne putem mărgini la o sintetizare aproximativă a cîmpului, reținînd, de exemplu, primele m armonici cari aproximează distribuția cîmpului cu o eroare ce poate fi evaluată. În aceste condiții suma primelor m armonici e finită pentru orice valoare finită a parametrilor λ_k.

În cazul exemplului nostru, considerînd deci primele m armonici, se obține soluția aproximativă:

$$J_s(z)\approx\frac{2}{3}H_0-\frac{4H_0}{\pi^2}\sum_{k=1}^{m}(-1)^k\cdot\frac{I_1(\lambda_k a)K_0(\lambda_k a)+I_0(\lambda_k a)K_1(\lambda_k a)}{K_1(\lambda_k a)}\cos\lambda_k z.$$

BOBINA MĂRGINITĂ ÎN EXTERIOR DE UN MEDIU FEROMAGNETIC N ESATURAT

Dacă în această nouă situație se cere să se rezolve aceleași probleme de sinteză ca în cazul precedent, se procedează ca și mai înainte, cu deosebirea că în acest caz soluția se simplifică, deoarece componenta tangențială a intensității cîmpului magnetic în exteriorul bobinei este nulă, ca urmare a faptului că fierul e nesaturat (fig. 3).

În acest caz ecuația pentru determinarea repartiției densității pînzei de curent devine:

$$J_s=H_z^{(i)}(a,z).$$

Ținînd seama de relațiile (6) și (10), rezultă:

$$J_s(z)=\int_0^{\infty}[F_\lambda\sin\lambda z+G_\lambda\cos\lambda z]\,I_0(\lambda a)\,d\lambda,$$

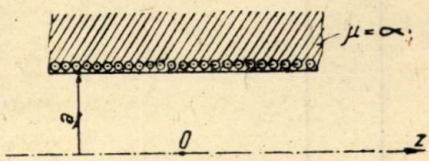


Fig. 3

pentru bobinele lungi și:

$$J_s(z)=H_{\text{med}}(0,z)+\sum_{k=1}^{\infty}[F_k\sin\lambda_k z+G_k\cos\lambda_k z]\cdot I_0(\lambda_k a),$$

în cazul distribuției periodice de bobine cu lungime finită. Condițiile impuse coeficienților F_λ și G_λ pentru asigurarea convergenței integralelor și seriilor se mențin aceleași ca în cazul precedent.

Tabelă

Cîmpul de sintetizat $H_z(0, z)$	F_λ	G_λ	Observații
$H_z \sim \frac{\pi}{2\sqrt{\rho^2+z^2}}$	0	$K_0(\lambda\rho)$	Convergența e asigurată pentru $\rho > a$
$H_z \sim \frac{\pi}{2(\rho^2+z^2)^{s+1}}$	0	$\sqrt{\pi}\left(\frac{\lambda}{2\rho}\right)^{s+\frac{1}{2}} \cdot \frac{K_{s+1/2}(\lambda\rho)}{\Gamma(s+1)}$	$\rho > a$ $s > -1$
$H_z \sim \frac{\pi z}{2(\rho^2+z^2)}$	$\frac{\pi}{2} e^{-\lambda\rho}$	0	$\rho > a$
$H_z \sim \frac{\pi z}{2(\rho^2+z^2)^2}$	$\frac{\pi}{4}\frac{\lambda}{\rho} e^{-\lambda\rho}$	0	$\rho > a$
$H_z \sim \frac{\pi z}{2(\rho_1^2+z^2)(\rho_2^2+z^2)}$	$\frac{\pi}{2} \cdot \frac{e^{-\lambda\rho_1} - e^{-\lambda\rho_2}}{\rho_2^2 - \rho_1^2}$	0	$\rho_1 > a$; $\rho_2 > a$
$H_z \sim \frac{\pi(b+cz)}{z^2+2qz+p^2}$	$\left[\frac{cq-b}{\sqrt{p^2-q^2}} \sin\lambda q + c\cos\lambda q\right] e^{-\lambda\sqrt{p^2-q^2}}$	$\left[\frac{b-cq}{p^2-q^2}\cos\lambda q + c\sin\lambda q\right] e^{-\lambda\sqrt{p^2-q^2}}$	$\sqrt{p^2-q^2} > a$
$H_z \sim \frac{\pi z^2}{2(\rho^4+z^4)}$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}\rho}\left[\cos\frac{\rho\lambda}{\sqrt{2}} - \sin\frac{\rho\lambda}{\sqrt{2}}\right] e^{-\frac{\rho\lambda}{\sqrt{2}}}$	$\rho > \sqrt{2}\, a$
$H_z \sim \frac{\pi z^3}{2(\rho^4+z^4)}$	$\cos\frac{\rho\lambda}{\sqrt{2}} e^{-\frac{\rho}{\sqrt{2}}\cdot\lambda}$	0	$\rho > \sqrt{2}\, a$

Toate exemplele studiate în paragraful precedent se recalculează simplu pentru noile condiții. În cele ce urmează dăm numai rezultatele.

a) În cazul distribuției $H_z\ (0, z) = H_0 \dfrac{1}{1 + k^2\left(\dfrac{z}{a}\right)^2}$ rezultă :

$$J_s(z) = \frac{H_0\, a}{k}\int_0^\infty e^{-\frac{a}{k}\lambda} \cdot I_0(\lambda a) \cos \lambda z \, d\lambda.$$

b) În cazul distribuției $H_z\ (0, z) = H_0\ e^{-\alpha^2 z^2}$ (α real) rezultă :

$$J_s(z) = \frac{H_0}{\alpha\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-\frac{\lambda^2}{4\alpha^2}} \cdot I_0(\lambda a) \cos \lambda z \, d\lambda.$$

c) În cazul distribuției $H_z(0, z) = H_0\left(1 - \dfrac{|z|}{l}\right)$ pentru bobine de lungime finită $2l$, rezultă, de exemplu, soluția de aproximație pentru primele $2m + 1$ armonici :

$$J_s(z) \cong \frac{H_0}{2} + \frac{4H_0}{\pi}\sum_{n=0}^{m} \frac{I_0(\lambda_n a)}{(2n+1)^2} \cos \lambda_n z$$

cu $\lambda = \dfrac{\pi(2n+1)}{l}$ $\qquad (n = 0, 1, \ldots m).$

d) În cazul distribuției $H_z(0, z) = H_0\left(1 - \dfrac{z^2}{l^2}\right)$ rezultă soluția de aproximație pentru primele m armonici :

$$J_s(z) = \frac{2}{3} H_0 - \frac{4H_0}{\pi^2}\sum_{k=1}^{m} (-1)^k \frac{I_0(\lambda_k a)}{k^2} \cos \lambda_k z$$

cu $\lambda_k = \dfrac{k\pi}{l}$ $\qquad (k = 1, 2, \ldots m).$

CONCLUZII

Exemplele de sinteză studiate arată că, în cazul simetriei cilindrice circulare, soluțiile problemelor sînt univoc determinate de distribuția cîmpului pe axă, la condiții la limită date.

Sinteza pe calea indicată e posibilă numai dacă coeficienții dezvoltării în integrală Fourier sau în serie Fourier a distribuției cîmpului magnetic în lungul axei de simetrie descresc suficient de repede. În tabelă sînt indicate cîteva distribuții care conduc la integrale convergente [3]).

[3]) Integralele au fost extrase din lucrarea : *Tabele de integrale, sume, serii și produse* de I. M. Rîjic și I. S. Gradștein, Edit. tehnică, 1955.

În cazul distribuției periodice a bobinelor, se pot obține soluții care să sintetizeze cîmpurile doar cu anumite aproximații.

Soluțiile obținute sînt, evident, valabile într-o primă aproximație, deoarece bobinele nu sînt infinit subțiri. Luarea în considerație și a grosimii lor finite e posibilă fără dificultăți principiale, dar ea ar complica în mod nejustificat soluțiile.

Fără îndoială sînt posibile sinteze și pentru alte forme de bobine și care urmează a fi eventual studiate. Scopul acestui articol a fost doar să ilustreze posibilitățile pe care le prezintă acest mod de a pune problema.

Primit la redacție la 15 august 1964

BIBLIOGRAFIE

1. R. Răduleț, *Bazele teoretice ale electrotehnicii*. Vol. I, II, București, 1955—1956 (curs litografiat).
2. A. Timotin și V. Hortopan, *Lecții de bazele electrotehnicii*. Vol. I, Edit. didactică și pedagogică, București, 1962.
3. C. C. Iliescu, *Magnetic field shape for nuclear instruments with radially constant field index in the median plane*. I.F.A., București, 1961.
4. W. Glaser, *Grundlagen der Elektronenoptik*. Springer-Verlag, Wien, 1952.
5. G. P. Tolstov, *Serii Fourier*. Edit. tehnică, București.
6. I. Sneddon, *Fourier transforms*. New York — Toronto — London, 1951.
7. W. R. Smythe, *Static and dynamic electricity*. New York — Toronto — London, 1950.

ASUPRA CUADRITENSORULUI ENERGIE-IMPULS MACROSCOPIC AL CÎMPULUI ELECTROMAGNETIC ÎN MEDII CU PROPRIETĂȚI DE MATERIAL ARBITRARE[1)]

DE

ALEXANDRU TIMOTIN

CANDIDAT ÎN ȘTIINȚE TEHNICE

Institutul politehnic, Cal. Griviței, nr. 132, București

538. 312:537. 311. 31.:538. 221

Se arată că o expresie generală a cuadritensorului energie-impuls macroscopic al cîmpului electromagnetic în prezența corpurilor poate fi stabilită, dacă se acceptă ipoteza că densitatea de energie a cîmpului electromagnetic și densitatea fluxului de energie a cîmpului electromagnetic sînt funcții de starea locală și instantanee a acestuia, independent de natura mediului. Expresia obținută este valabilă pentru medii cu proprietăți de material arbitrare și conduce, în medii liniare din punctul de vedere al polarizării electrice și al magnetizării, la rezultate echivalente celor care decurg din cuadritensorul lui Minkowski.

§ 1. PUNEREA PROBLEMEI

Teoria macroscopică relativistă a cîmpului electromagnetic e fundamentată pe ecuațiile locale Maxwell-Minkovski (în unități S.I.) :

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} - \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = \boldsymbol{J}; \qquad \operatorname{div} \boldsymbol{D} = \rho, \tag{1}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0; \qquad \operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0, \tag{2}$$

$$\frac{1}{\mu_0} \boldsymbol{B} - \boldsymbol{H} = \boldsymbol{M}; \qquad \boldsymbol{D} - \varepsilon_0 \boldsymbol{E} = \boldsymbol{P}, \tag{3}$$

[1)] Articol apărut și în „Rev. Roum. Sci. Techn.-Electrotechn. Energ.", **9**, *4* (1964).

care sînt Lorentz invariante şi independente de materialul considerat. În aceste ecuaţii, mărimile $\boldsymbol{E}$ (intensitatea cîmpului electric), $\boldsymbol{B}$ (inducţia magnetică), $\boldsymbol{D}$ (inducţia electrică) şi $\boldsymbol{H}$ (intensitatea cîmpului magnetic) sînt mărimi de stare macroscopică a cîmpului electromagnetic, iar mărimile $\boldsymbol{J}$ (densitatea de curent), ρ (densitatea de sarcină), $\boldsymbol{M}$ (magnetizaţia), $\boldsymbol{P}$ (polarizaţia electrică) sînt mărimi electrice şi magnetice de stare macroscopică a corpurilor, caracterizînd totodată interacţiunea acestora cu cîmpul. Toate aceste mărimi sînt definite relativ la un sistem de referinţă inerţial arbitrar [S], în raport cu care sînt scrise ecuaţiile de mai sus şi faţă de care punctul din corpul considerat are viteza locală şi instantanee $\boldsymbol{u}$. Mărimile

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m} \qquad \text{şi} \qquad \varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi \cdot 10^9} \text{ F/m} \tag{4}$$

sînt constantele universale numite permeabilitatea vidului şi permitivitatea vidului.

Cu toate succesele repurtate de teoria macroscopică relativistă în explicarea experienţelor privitoare la electrodinamica mediilor în mişcare, această teorie nu poate fi socotită completă din cauză că — aşa cum se ştie — nici pînă astăzi ea nu a condus la expresii unanim acceptate şi verificate de experienţă pentru energia şi impulsul asociate cîmpului electromagnetic în cazul mediilor în mişcare. Ca urmare, problema acţiunilor ponderomotoare ale acestui cîmp, în cazuri generale, nu este clarificată.

În universul cuadridimensional al lui Minkowski ($x = x_1$, $y = x_2$, $z = x_3$, $ict = x_4$ cu $i = \sqrt{-1}$ şi c viteza luminii în vid), proprietăţile dinamice ale unui sistem fizic sînt caracterizate prin cuadritensorul energie-impuls, notat strîns :

$$\mathcal{T} = \left\{ \begin{array}{c|c} \overline{\overline{\Theta}} & \mathrm{i}\, c\, \boldsymbol{g} \\ \hline \dfrac{\mathrm{i}}{c}\, \boldsymbol{S} & -w \end{array} \right\}, \tag{5}$$

în care : $\overline{\overline{\Theta}} = -\overline{\overline{T}}$ e tensorul spaţial de ordinul al doilea al densităţii fluxului de impuls (egal şi de semn contrar cu tensorul $\overline{\overline{T}}$ al tensiunilor maxwelliene), al cărui produs contractat la dreapta cu versorul $\boldsymbol{n}$ e egal cu impulsul $\overline{\overline{\Theta}} \cdot \boldsymbol{n}$ transmis în unitatea de timp prin unitatea de arie de versor $\boldsymbol{n}$ în sensul acestuia ; $\boldsymbol{S}$ e vectorul densităţii fluxului de energie, a cărui componentă $\boldsymbol{S}\,\boldsymbol{n}$ e egală cu energia transmisă în unitatea de timp prin unitatea de arie de versor $\boldsymbol{n}$ în sensul acestuia ; $\boldsymbol{g}$ e densitatea de volum a impulsului, iar w densitatea de volum a energiei. Dacă cuadritensorul $\mathcal{T}$ caracterizează un cîmp fizic ce exercită asupra corpurilor densitatea de forţă $\boldsymbol{f}$ şi mai transmite acestor corpuri direct (afară de

putere mecanică) puterea p pe unitatea de volum (de ex. prin efect Joule), formele locale ale teoremei energiei și impulsului :

$$\boldsymbol{f} = -\mathrm{Div}\,\bar{\bar{\Theta}} - \frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial t}, \tag{6}$$

$$\boldsymbol{f}\boldsymbol{u} + p = -\operatorname{div}\boldsymbol{S} - \frac{\partial w}{\partial t} \tag{7}$$

sînt componentele relației cuadridimensionale :

$$f_\alpha = -\sum_{\beta=1}^{4} \frac{\partial \mathcal{T}_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta}, \qquad (\alpha = 1,\ 2,\ 3,\ 4), \tag{8}$$

în care

$$f = \left(\boldsymbol{f},\ \mathrm{i}\,\frac{\boldsymbol{f}\boldsymbol{u} + p}{c}\right) = \left(f_x, f_y,\ f_z,\ \mathrm{i}\,\frac{\boldsymbol{f}\boldsymbol{u} + p}{c}\right) \tag{9}$$

e cuadrivectorul forță-putere.

Numeroase studii efectuate pînă în prezent (vezi pentru referințe bibliografice lucrările [1]...[8]) nu au adus încă argumente teoretice sau experimentale unanim acceptate pentru determinarea expresiei cuadritensorului energie-impuls care trebuie asociat cîmpului electromagnetic macroscopic în prezența corpurilor polarizate sau magnetizate. Totodată nu a fost studiat decît cazul *mediilor ideale* caracterizate prin polarizare liniară (cu permitivitate ε și permeabilitate μ, independente de cîmp și invariabile în timp într-un punct dat al unui corp). Și în cazul mediilor ideale se duc discuții în jurul a două expresii — una nesimetrică propusă de Minkowski (8), avînd componentele :

$$\left.\begin{aligned} &\bar{\bar{\Theta}}^{\mathrm{M}} = -\boldsymbol{E};\boldsymbol{D} - \boldsymbol{H};\boldsymbol{B} + \bar{\bar{1}}\,\frac{\boldsymbol{E}\boldsymbol{D} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{H}}{2}, && \boldsymbol{g}^{\mathrm{M}} = \boldsymbol{D} \times \boldsymbol{B}, \\ &\boldsymbol{S}^{\mathrm{M}} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H} \neq c^2 \boldsymbol{g}^{\mathrm{M}}, && w^{\mathrm{M}} = \frac{\boldsymbol{E}\boldsymbol{D} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{H}}{2}, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

și una simetrică, propusă de Abraham (9), avînd componentele :

$$\bar{\bar{\Theta}}^{\mathrm{A}} = -\frac{\boldsymbol{E};\boldsymbol{D} + \boldsymbol{D};\boldsymbol{E} + \boldsymbol{H};\boldsymbol{B} + \boldsymbol{B};\boldsymbol{H}}{2} + \bar{\bar{1}}\,\frac{\boldsymbol{E}\boldsymbol{D} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{H}}{2} - \left(\varepsilon\mu - \frac{1}{c^2}\right)\frac{\boldsymbol{u};\boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\Omega};\boldsymbol{u}}{2},$$

$$\boldsymbol{S}^{\mathrm{A}} = c^2 \boldsymbol{g}^{\mathrm{A}} = \frac{1}{2}\left[(\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H} + c^2\,\boldsymbol{D} \times \boldsymbol{B}) - \left(\varepsilon\mu - \frac{1}{c_2}\right)(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{u}\boldsymbol{\Omega}) + c^2\boldsymbol{\Omega})\right] \tag{11}$$

$$w^{\mathrm{A}} = \frac{\boldsymbol{E}\boldsymbol{D} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{H}}{2} - (c^2\varepsilon\mu - 1)\,\boldsymbol{u}\,\frac{\boldsymbol{E}^* \times \boldsymbol{H}^*}{c^2 - u^2},$$

în care :

$$\Omega = \frac{c^4}{(c^2 - u^2)^2}\left[\boldsymbol{E}^* \times \boldsymbol{H}^* + \frac{1}{c^2}(\boldsymbol{H}\,\boldsymbol{u})\,(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{E}^*) - \frac{1}{c^2}\,(\boldsymbol{E}\boldsymbol{u})(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{H})^*\right] \tag{12}$$

$$\boldsymbol{E}^* = \boldsymbol{E} + \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{B} \qquad \boldsymbol{H}^* = \boldsymbol{H} - \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{D}.$$

Numai în medii nepolarizabile cu $\varepsilon = \varepsilon_0$, $\mu = \mu_0$, $\boldsymbol{P} = 0$, $\boldsymbol{M} = 0$ (respectiv în vid) aceste expresii coincid şi conduc la cuadritensorul de componente :

$$\bar{\bar{\Theta}}^{\mathrm{N}} = -\,\varepsilon_0\,\boldsymbol{E}\,;\boldsymbol{E} - \mu_0\boldsymbol{H}\,;\boldsymbol{H} + \bar{\bar{1}}\left(\frac{\varepsilon_0\boldsymbol{E}^2}{2} + \frac{\mu_0\boldsymbol{H}^2}{2}\right), \qquad \boldsymbol{g}^{\mathrm{N}} = \frac{1}{c^2}\,\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H},$$

$$\boldsymbol{S}^{\mathrm{N}} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}, \qquad w^{\mathrm{N}} = \frac{\varepsilon_0\boldsymbol{E}^2}{2} + \frac{\mu_0\boldsymbol{H}^2}{2}, \tag{13}$$

care rezultă fără dificultăţi din expresia densităţii de forţă în medii nepolarizabile :

$$\boldsymbol{f}^{\mathrm{N}} = \rho\,\boldsymbol{E} + \boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B}. \tag{14}$$

Mai sus am notat cu $\bar{\bar{1}}$ tensorul unitate de componente $\delta_{jj} = 1$ şi $\delta_{jk} = 0$ $(j \neq k)$ şi cu $\boldsymbol{A}\,;\boldsymbol{B}$ produsul diadic al vectorilor $\boldsymbol{A}$ şi $\boldsymbol{B}$, adică tensorul de componente $A_j\,B_k$.

Privitor la stadiul actual al cercetărilor, se pot face următoarele observaţii :

a) Componentele $\bar{\bar{\Theta}}$, $\boldsymbol{g}$, $\boldsymbol{S}$, w ale cuadritensorului energie-impuls al cîmpului nu sînt accesibile experienţei (adică măsurării) direct, ci numai prin efectele lor asupra stării termomecanice a corpurilor, adică prin intermediul mărimilor $\boldsymbol{f}$ şi p. Prima problemă care se pune e deci stabilirea condiţiilor de *definire* univocă a acestor mărimi.

b) Pentru ca relaţiile (6) şi (7) să reprezinte o formă a principiului localizării acţiunilor fizice, trebuie ca mărimea $\mathfrak{T}$ *să caracterizeze un sistem fizic distinct de mediul* (*corpul*) *cu care coexistă*. Aceasta este *condiţia de separabilitate* a sistemului fizic global (existent într-un domeniu din spaţiu) într-un sistem „cîmp" şi un sistem „corp", fiecare cu alte mărimi de stare. Dacă Z^{K} e ansamblul mărimilor de stare locală şi instantanee ale corpului, iar Z e ansamblul mărimilor de stare locală şi instantanee ale cîmpului (şi afectînd indicele superior G, respectiv K, compo-

nentelor tensorului energie-impuls global, respectiv al corpului), condiția de separabilitate se scrie :

$$\begin{aligned} \bar{\bar{\Theta}}^{G} &= \bar{\bar{\Theta}}^{K}(Z^{K}) + \bar{\bar{\Theta}}(Z), \\ \boldsymbol{g}^{G} &= \boldsymbol{g}^{K}(Z^{K}) + \boldsymbol{g}(Z), \\ \boldsymbol{S}^{G} &= \boldsymbol{S}^{K}(Z^{K}) + \boldsymbol{S}(Z), \\ \boldsymbol{w}^{G} &= w^{K}(Z^{K}) + w(Z). \end{aligned} \tag{15}$$

c) Această condiție de separabilitate poate fi interpretată *în sens slab*, adică numai în raport cu sistemul de referință inerțial propriu [S^0] — care se găsește în repaus relativ local și instantaneu cu punctul din corp considerat —, sau *în sens tare*, adică în raport cu orice sistem de referință inerțial [S] față de care punctul din corp considerat are viteza locală și instantanee oarecare $\boldsymbol{u}$. Cuadritensorul lui Abraham satisface numai condiția de separabilitate slabă, pe cînd cuadritensorul lui Minkowski satisface și condiția de separabilitate tare.

d) În teoria cîmpului (10) se admite că, punînd condiția ca tensorul energie-impuls al cîmpului să fie funcție de starea locală și instantanee a acestuia, în raport cu orice referențial inerțial (adică prin condiția de separabilitate tare), se asigură *definirea* lui univocă.

Acest lucru e adevărat, dacă nu există o clasă Z^* de mărimi de stare ale corpului care să aibă valori univoc determinate de valorile mărimilor de stare ale cîmpului din același punct și din același moment — cum sînt, de exemplu, $\boldsymbol{P}$ și $\boldsymbol{M}$, care sînt mărimi de stare ale corpului univoc determinate prin (3) de mărimile de stare ale cîmpului.

e) Dacă există astfel de mărimi, cuadritensorii corpului $\mathfrak{T}^{K}$ și cîmpului $\mathfrak{T}$ *nu sînt univoc determinați* prin condiția de separabilitate tare. Se poate demonstra că, dacă Θ, $\boldsymbol{g}$, $\boldsymbol{S}$ și w reprezintă un sistem de valori compatibile cu datele experimentale, orice alt sistem de valori :

$$\bar{\bar{\Theta}}' = \bar{\bar{\Theta}} - \bar{\bar{1}}\,\varphi, \quad \boldsymbol{g}' = \boldsymbol{g}, \quad \boldsymbol{S}' = \boldsymbol{S}, \quad w' = w + \varphi \tag{16}$$

e compatibil cu aceleași date experimentale dacă $\varphi = \varphi(Z^*)$ e un invariant scalar al universului cuadridimensional, funcție de mărimile de stare ale corpului, care depind de mărimile de stare ale cîmpului din același punct și din același moment ([9], [10]).

f) În această situație, cuadritensorul energie-impuls poate fi univoc determinat numai cu o *condiție suplimentară cu caracter definitoriu* (fără implicații experimentale), de exemplu privitoare la alegerea stării de referință a energiei cîmpului. O astfel de condiție poate fi următoarea [9] : în starea de referință a energiei cîmpului trebuie ca — independent de proprietățile de material și în raport cu orice sistem de referință — să se anuleze *toate* componentele cuadritensorului energie-impuls, precum și densitatea de volum a forței și a puterii :

$$w = 0, \quad \bar{\bar{\Theta}} = 0, \quad \boldsymbol{S} = 0, \quad \boldsymbol{g} = 0, \quad \boldsymbol{f} = 0, \quad p = 0. \tag{17}$$

g) Ecuațiile Maxwell-Minkowski (1), (2), (3) sînt legi generale, adică au aceeași formă oricare ar fi proprietățile de material ale mediului considerat. De aceea și separarea cîmp-corp, în sens tare, ar trebui să conducă la o expresie a cuadritensorului energie-impuls al cîmpului care să fie independentă de proprietățile de material.

În lucrarea de disertație [11] am arătat că se poate stabili o expresie generală, independentă de proprietățile de material, a cuadritensorului energie-impuls macroscopic $\mathcal{T}$ al cîmpului electromagnetic în următoarele ipoteze : cîmpul electromagnetic e separabil „în sens tare" de corpul cu care coexistă ; mulțimea mărimilor de stare locală și instantanee a cîmpului e $Z = \{\boldsymbol{E}, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{H}\}$; teorema energiei cîmpului electromagnetic (7) se încadrează în modul de formulare al primului principiu al termodinamicii ; starea de referință a energiei cîmpului satisface local și instantaneu condiția (17).

În cele ce urmează vom stabili această expresie în ipoteze mai puțin restrictive, și anume :

I. Cuadritensorul energie-impuls al sistemului global $\mathcal{T}^{G}$ poate fi descompus într-un cuadritensor asociat corpului $\mathcal{T}^{K}$ și un cuadritensor asociat cîmpului $\mathcal{T}$, astfel încît în sistemul de referință propriu $[S^0]$ cuadritensorul asociat corpului e funcție de starea locală Z^{0K} a acestuia, iar densitatea fluxului de energie care îi corespunde este densitatea q^0 a fluxului de căldură :

$$\overline{\Theta}^{0K} = \overline{\Theta}^{K}(Z^{0K}), \quad g^{0K} = g^{K}(Z^{0K}), \quad S^{0K} = S^{K}(Z^{0K}) = q^{0}, \qquad w^{0K} = w^{K}(Z^{0K}). \tag{18}$$

Observație. De obicei se presupune că impulsul corpului se anulează o dată cu viteza lui, adică $g^{0K} = 0$. Deoarece însă în general $S^{0K} = q^0 \neq 0$, ar putea exista și un impuls „de repaus" nenul asociat curentului de căldură.

II. Densitatea de energie și de flux de energie asociate cîmpului electromagnetic sînt funcții de starea locală și instantanee a acestuia care nu depind de proprietățile de material ale mediului.

$$w = w^{G} - w^{K} = w(Z), \qquad S = S^{G} - S^{K} = S(Z). \tag{19}$$

Observație. Această ipoteză implică, în fond, posibilitatea extinderii principiului întîi al termodinamicii la sistemele cu cîmp electromagnetic, astfel încît să fie susceptibil de o formulare locală cu adăugarea unor termeni aditivi specifici cîmpului și ireductibili la termenii mecanotermici cunoscuți.

III. Starea locală și instantanee Z a cîmpului electromagnetic e complet caracterizată în orice sistem de referință de mărimile $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{H}$ (eventual numai de unele dintre ele) :

$$Z = \{\boldsymbol{E}, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{H}\}. \tag{20}$$

Observație. Se știe că, în sistemul de referință propriu [S^0], polarizația $\boldsymbol{P}^0$ și magnetizația $\boldsymbol{M}^0$ depind prin legi de material de intensitățile cîmpului electric $\boldsymbol{E}^0$, respectiv magnetic $\boldsymbol{H}^0$. În cazul cel mai simplu al unor stări de echilibru (sau asociate unor transformări reversibile), în lipsa unor polarizații permanente și în aproximația liniară, aceste legi de material au forma :

$$\boldsymbol{P}^0 = \varepsilon_0 \chi_e \boldsymbol{E}^0, \qquad \boldsymbol{M}^0 = \chi_m \boldsymbol{H}^0, \tag{21}$$

în care χ_e, respectiv χ_m sînt susceptivitatea electrică, respectiv magnetică, dependente de condiții locale neelectrice : temperatură, stare de deformare, umiditate etc. Chiar în acest caz — cu totul particular —, valorile locale și instantanee ale polarizației și magnetizației nu sînt univoc determinate de valorile locale și instantanee ale lui $\boldsymbol{E}^0$ și $\boldsymbol{H}^0$, deoarece și $\boldsymbol{P}^0$ și $\boldsymbol{M}^0$ pot varia din motive „neelectromagnetice".

În cazul general, polarizația și magnetizația pot avea componente permanente și pot depinde nu numai de $\boldsymbol{E}^0$, de $\boldsymbol{H}^0$ și de mărimile de stare locală a corpului, *ci și de derivatele tuturor acestor mărimi în raport cu timpul* (postefect) etc.

De aceea, în măsura în care nu se introduce nici o particularizare privitoare la materialul studiat și se consideră transformări de stare oarecare (nu neapărat cvasistatice), *valorile instantanee, locale, ale polarizației și magnetizației trebuie considerate independente de valorile instantanee, locale, ale oricăror altor mărimi de stare* (ale corpului sau ale cîmpului).

Numai astfel concluziile care se obțin sînt libere de orice restricție privitoare la natura materialului considerat. Existența unor legi de material de forma (21) va rezulta apoi cu necesitate (vezi § 6) din aplicarea principiilor termodinamicii pentru anumite regimuri particulare (stări de echilibru, transformări reversibile etc.).

§ 2. ENERGIA ELECTROMAGNETICĂ ȘI FLUXUL DE ENERGIE ELECTROMAGNETICĂ

Din ipotezele menționate rezultă că funcțiile (19) pot fi determinate în situații particulare din punctul de vedere al stării locale a corpului, *cu condiția ca aceste particularizări să nu afecteze independența locală* a mărimilor $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{H}$.

În acord cu rezultatele cunoscute și unanim acceptate ale teoriei cîmpului electromagnetic în medii *nepolarizabile* ($\boldsymbol{P} = 0$, $\boldsymbol{M} = 0$, $\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H}$), vom admite ca valabile expresiile (13), adică vom

admite pentru fluxul de energie printr-o suprafață închisă Σ (fluxul vectorului lui Poynting) în astfel de medii expresia:

$$\oint_{\Sigma} \boldsymbol{S}^{N}\, d\boldsymbol{A} = \oint_{\Sigma} (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H})\, d\boldsymbol{A}. \tag{22}$$

În aceste condiții se pot demonstra succesiv propozițiile 2.1, 2.2 și 2.3 de mai jos.

2.1. **În medii imobile și în referențialul propriu, densitatea fluxului de energie al cîmpului electromagnetic are, în interiorul unui corp polarizat și magnetizat oarecare, expresia:**

$$\boldsymbol{S}^{0} = \boldsymbol{E}^{0} \times \boldsymbol{H}^{0}. \tag{23}$$

Demonstrație. Fie $\sum$ o suprafață închisă în interiorul corpului presupus polarizat, magnetizat și imobil și fie $\sum_{in}$ și $\sum_{ex}$ două suprafețe de aceeași formă cu $\sum$, infinit apropiate și care conțin suprafața $\sum$ *între* ele. Datorită faptului că suprafețele sînt infinit apropiate, din relația (7) rezultă că fluxul de energie electromagnetică e același prin oricare dintre ele:

$$\oint_{\Sigma_{in}} \boldsymbol{S}^{0}\, d\boldsymbol{A} = \oint_{\Sigma} \boldsymbol{S}^{0}\, d\boldsymbol{A} = \oint_{\Sigma_{ex}} \boldsymbol{S}^{0}\, d\boldsymbol{A}. \tag{24}$$

(Din punctul de vedere al conservării energiei, numai fluxul vectorului lui Poynting printr-o suprafață *închisă* are o semnificație măsurabilă.)

Presupunem acum că am golit interstițiul infinit strîmt dintre $\sum_{in}$ și $\sum_{ex}$ de materialul polarizat și l-am înlocuit cu un material *nepolarizat*, avînd toate celelalte proprietăți neschimbate. Această înlocuire *nu afectează starea corpului* și a cîmpului din interiorul lui $\sum_{in}$ și din exteriorul lui $\sum_{ex}$ (deoarece anularea lui $\boldsymbol{P}$ și $\boldsymbol{M}$ în interstițiul infinit strîmt dintre $\sum_{in}$ și $\sum_{ex}$ e echivalentă introducerii unor foițe închise de dipoli de putere infinit mică, care nu dau cîmp în afara lor). În schimb, în interstițiul nepolarizat dintre $\sum_{in}$ și $\sum_{ex}$, starea cîmpului electromagnetic e alta, fiind caracterizată de mărimile $\boldsymbol{E}_{N}$, $\boldsymbol{D}_{N} = \varepsilon_{0}\boldsymbol{E}_{N}$, $\boldsymbol{B}_{N} = \mu_{0}\boldsymbol{H}_{N}$, $\boldsymbol{H}_{N}$ și de vectorul Poynting $\boldsymbol{E}^{0}_{N} \times \boldsymbol{H}^{0}_{N}$, conform cu (13). De aceea, după practicarea interstițiului nepolarizat, relația (24) devine:

$$\oint_{\Sigma_{in}} \boldsymbol{S}^{0}\, d\boldsymbol{A} = \oint_{\Sigma} (\boldsymbol{E}^{0}_{N} \times \boldsymbol{H}^{0}_{N})\, d\boldsymbol{A} = \oint_{\Sigma_{ex}} \boldsymbol{S}^{0}\, d\boldsymbol{A}. \tag{25}$$

Din compararea relațiilor (24) și (25) rezultă:

$$\oint_{\Sigma} \boldsymbol{S}^{0}\, d\boldsymbol{A} = \oint_{\Sigma} (\boldsymbol{E}^{0}_{N} \times \boldsymbol{H}^{0}_{N})\, d\boldsymbol{A} = \oint_{\Sigma} (\boldsymbol{E}^{0}_{N} \times \boldsymbol{H}^{0}_{N})\, \boldsymbol{n}\, dA. \tag{26}$$

Dar în produsul mixt $(\boldsymbol{E}_N^0 \times \boldsymbol{H}_N^0)\,\boldsymbol{n}$ nu intervin decît componentele tangenţiale la suprafaţă ale vectorilor $\boldsymbol{E}_N^0$ şi $\boldsymbol{H}_N^0$, care se conservă la trecerea prin orice suprafaţă de discontinuitate imobilă. De aceea există relaţia:

$$(\boldsymbol{E}_N^0 \times \boldsymbol{H}_N^0)\,\boldsymbol{n} = (\boldsymbol{E}^0 \times \boldsymbol{H}^0)\,\boldsymbol{n}, \tag{27}$$

în care $\boldsymbol{E}^0$ şi $\boldsymbol{H}^0$ sînt valorile din *interiorul* corpului (de pe faţa interioară a suprafeţei $\sum_{in}$ sau de pe faţa exterioară a suprafeţei $\sum_{ex}$), *valori egale cu acelea existente în punctele suprafeţei* $\sum$ *înainte de practicarea interstiţiului*. Din (27) şi (26) rezultă deci, pentru fluxul de energie electromagnetică printr-o suprafaţă închisă, în medii în repaus, expresia:

$$\oint_{\Sigma} \boldsymbol{S}^0\,\mathrm{d}\boldsymbol{A} = \oint_{\Sigma} (\boldsymbol{E}^0 \times \boldsymbol{H}^0)\,\mathrm{d}\boldsymbol{A}, \tag{28}$$

din care rezultă şi expresia (23) pentru vectorul lui Poynting ca funcţie de stare, cunoscută de mult timp pentru materiale liniare (cu $\boldsymbol{D}^0 = \varepsilon\,\boldsymbol{E}^0$ şi $\boldsymbol{B}^0 = \mu\,\boldsymbol{H}^0$) şi care rezultă şi din cuadritensorii lui Minkowski şi Abraham.

Demonstraţia de mai sus stabileşte că expresia (23) e independentă de proprietăţile de material ale corpului (care poate avea şi polarizaţie electrică permanentă, şi magnetizaţie permanentă, saturaţie, isteresis etc.).

Observaţie. În principiu, la (23) s-ar mai putea adăuga un termen aditiv solenoidal funcţie de stare. Singura expresie care satisface această condiţie ar fi de forma $\boldsymbol{S}^{0\star} = k_0 \boldsymbol{B}^0$, în care k_0 ar fi o constantă *universală*, cu dimensiuni, de natură pseudoscalară. Se poate arăta că adăugarea unui astfel de termen nu ar satisface condiţiile de transformare care sînt cerute pentru componentele cuadritensorului energie-impuls.

2.2. **În medii imobile şi în referenţialul propriu, densitatea de energie a cîmpului electromagnetic are, în interiorul unui corp polarizat şi magnetizat oarecare, expresia:**

$$w^0 = \frac{\varepsilon_0 E^{02}}{2} - \frac{B^{02}}{2\mu_0} + \boldsymbol{B}^0\boldsymbol{H}^0 + \varphi\left(\boldsymbol{D}^0 - \varepsilon_0 \boldsymbol{E}^0, \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}^0 - \boldsymbol{H}^0\right), \tag{29}$$

în care $\varphi(\boldsymbol{P}^0, \boldsymbol{M}^0)$ *e o funcţie scalară* (*deocamdată*) *arbitrară.*

Demonstraţie. Sistemul global „corp + cîmp" este un sistem izolat, pentru care ecuaţia de conservare a energiei trebuie să aibă forma locală:

$$\frac{\partial (w^K + w)}{\partial t} + \operatorname{div}(\boldsymbol{S}^K + \boldsymbol{S}) = 0 \tag{30}$$

în orice referenţial inerţial. Pentru un mediu imobil şi în referenţialul propriu [S^0], cu (18), (19), (20) şi (23), această ecuaţie se scrie:

$$\frac{\partial}{\partial t^0} w^K(Z^{0K}) + \frac{\partial}{\partial t^0} w(\boldsymbol{E}^0, \boldsymbol{D}^0, \boldsymbol{B}^0, \boldsymbol{H}^0) = -\operatorname{div} \boldsymbol{q}^0 - \operatorname{div}(\boldsymbol{E}^0 \times \boldsymbol{H}^0).$$

Cu ajutorul ecuațiilor (1) și (2) ale cîmpului, expresia div $(\boldsymbol{E}^0 \times \boldsymbol{H}^0)$ se transformă și se obține:

$$\frac{\partial}{\partial t^0} w^{\mathrm{K}} (Z^{0\mathrm{K}}) + \frac{\partial}{\partial t^0} w (\boldsymbol{E}^0, \boldsymbol{D}^0, \boldsymbol{B}^0, \boldsymbol{H}^0) = - \operatorname{div}^0 \boldsymbol{q}^0 + \boldsymbol{E}^0 \boldsymbol{J}^0 + \\ + \boldsymbol{E}^0 \frac{\partial \boldsymbol{D}^0}{\partial t^0} + \boldsymbol{H}^0 \frac{\partial \boldsymbol{B}^0}{\partial t^0}. \tag{31}$$

Considerăm mai întîi o stare staționară și se obține forma locală a efectului electrocaloric (Joule):

$$\operatorname{div}^0 \boldsymbol{q}^0 = \boldsymbol{E}^0 \boldsymbol{J}^0 . \tag{32}$$

Considerăm apoi o transformare în care numai mărimile de stare ale corpului sînt *local* invariabile și deci *și* $\boldsymbol{M}^0$, și $\boldsymbol{P}^0$. Conform legii lui Joule, membrul drept al expresiei (32) reprezintă puterea transmisă de cîmp corpului pe unitatea de volum în procesul de conducție a curentului electric, putere care se regăsește integral în fluxul de căldură din cauza caracterului staționar al stării corpului. Expresia (32) e deci valabilă și în acest caz și, din (31) cu $Z^{0\mathrm{K}} = \text{const.}$, $\boldsymbol{P}^0 = \text{const.}$ și $\boldsymbol{M}^0 = \text{const}$, rezultă:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t^0} w (\boldsymbol{E}^0, \boldsymbol{D}^0, \boldsymbol{B}^0, \boldsymbol{H}^0)\right]_{\boldsymbol{P}^0, \boldsymbol{M}^0} = \boldsymbol{E}^0 \frac{\partial \boldsymbol{D}^0}{\partial t^0} + \boldsymbol{H}^0 \frac{\partial \boldsymbol{B}^0}{\partial t^0} = \\ = \frac{\partial}{\partial t^0} \left(\varepsilon_0 \frac{\boldsymbol{E}^{02}}{2} + \frac{\mu_0 \boldsymbol{H}^{02}}{2} \right),$$

deoarece $\boldsymbol{D}^0 = \varepsilon_0 \boldsymbol{E}^0 + \boldsymbol{P}^0$ și $\boldsymbol{B}^0 = \mu_0 \boldsymbol{H}^0 + \mu_0 \boldsymbol{M}^0$. Din această relație rezultă că densitatea de energie diferă de funcția de stare a cîmpului, a cărei derivată apare în ultimul membru numai cu un termen aditiv, care este o funcție de polarizație și magnetizație:

$$w^0 = w (\boldsymbol{E}^0, \boldsymbol{D}^0, \boldsymbol{B}^0, \boldsymbol{H}^0) = \frac{\varepsilon_0 \boldsymbol{E}^{02}}{2} + \frac{\mu_0 \boldsymbol{H}^{02}}{2} + \mathrm{f} (\boldsymbol{P}^0, \boldsymbol{M}^0). \tag{33}$$

Aceasta este cea mai generală expresie a densității energiei, ca funcție de starea locală a cîmpului (de care cu (3) depind și $\boldsymbol{P}^0$, și $\boldsymbol{M}^0$).

Dacă se poate alege arbitrar starea de referință a energiei și dacă alegem starea (invariantă):

$$\boldsymbol{E} = 0, \qquad \boldsymbol{B} = 0, \tag{34}$$

se poate determina funcția f. În adevăr, cu (34), (3) și $w^0 = 0$ din (33) rezultă:

$$\frac{\mu_0 \boldsymbol{H}^{02}}{2} = - \frac{\mu_0 \boldsymbol{M}^{02}}{2} = \mathrm{f} (\boldsymbol{P}^0, \boldsymbol{M}^0)$$

și pentru densitatea de energie se obțin expresiile (echivalente):

$$w^0 = \frac{\varepsilon_0 E^{02}}{2} + \frac{\mu_0 H^{02}}{2} - \frac{\mu_0 M^{02}}{2} = \frac{E^0 D^0 + B^0 H^0}{2} - \frac{P^0 E^0 + M^0 B^0}{2} = \\ = \frac{\varepsilon_0 E^{02}}{2} - \frac{B^{02}}{2\mu_0} + H^0 B^0, \tag{35}$$

dintre care ultima conține numai mărimile de stare ale cîmpului.

Dacă nu se poate alege arbitrar starea de referință a energiei, dar se scoate în evidență expresia (35), care se anulează în starea invariantă (34), se obține pentru cea mai generală expresie a densității de energie relația (29), în care $\varphi(P^0, M^0)$ e o altă funcție scalară, arbitrară de $P^0 = D^0 - \varepsilon_0 E^0$ și de $M^0 = \frac{1}{\mu_0} B^0 - H^0$.

2.3. **Într-un punct arbitrar al unui corp polarizat și magnetizat oarecare și față de un referențial inerțial [S] oarecare, densitatea de energie și densitatea fluxului de energie asociate cîmpului electromagnetic au expresiile:**

$$\boxed{\begin{aligned} &\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H} \\ &w = \frac{\varepsilon^0 E^2}{2} - \frac{B^2}{2\mu_0} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{H} + \varphi\left(\boldsymbol{D} - \varepsilon_0 \boldsymbol{E}, \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B} - \boldsymbol{H}\right), \end{aligned}} \tag{36}$$

în care funcția $\varphi(P, M)$ e deocamdată nedeterminată.

În adevăr, din (19) și (20) rezultă că:

$$w = w(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{H}) \text{ și } \boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{H}) \tag{37}$$

sînt funcții universale de variabilele respective și deci, în acord cu principiul relativității restrînse, au forma (29), respectiv (23), în orice referențial inerțial.

§ 3. IMPULSUL ELECTROMAGNETIC ȘI FLUXUL DE IMPULS ELECTROMAGNETIC

Conform ipotezelor I și II, mărimile (36) sînt componente ale cuadritensorului $\mathcal{T}$ al cîmpului, care poate fi determinat acum, deoarece expresiile (36) sînt valabile în orice sistem de referință. Va fi suficient să folosim relația care exprimă transformarea densității fluxului de energie $\boldsymbol{S}$ în trecerea de la referențialul propriu [S^0] la un referențial oarecare [S], față de care [S^0] are viteza $\boldsymbol{u} = \nu \boldsymbol{u}$. Această relație rezultă din relațiile de transformare ale componentelor de cuadritensori și, în aproximația [1]

[1] Calculul se poate conduce și fără această aproximație cu același rezultat. Relația (38), ca și relațiile (42), (43), (44) și (49), sînt forme particulare ale relației $T_{\alpha\beta} = \sum_{\gamma} \sum_{\delta} a_{\alpha\gamma} a_{\beta\delta} T^0_{\gamma\delta}$, în care $a_{\alpha\gamma}$ sînt elementele matricii transformării Lorentz generale de la [S°] la [S].

vitezelor mici, $\frac{u^2}{c^2} \ll 1$ (ne necesară dar suficientă consideraţiilor noastre, care trebuie să fie valabile la orice viteză), are forma:

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}^0 + \boldsymbol{u}\, w^0 + \boldsymbol{u} \cdot \overline{\overline{\Theta}}^0 + \boldsymbol{u}(\boldsymbol{g}^0 \boldsymbol{u}), \tag{38}$$

în care $\boldsymbol{u} \cdot \overline{\overline{\Theta}}^0$ e produsul contractat la stînga al tensorului $\overline{\overline{\Theta}}^0$ cu vectorul $\boldsymbol{u}$ (adică vectorul de componente $\sum_{j=1}^{3} u_j \Theta^0{}_{jk}$).

Totodată vom mai utiliza relaţiile de transformare ale vectorilor $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{H}, \boldsymbol{P}, \boldsymbol{M}$, care rezultă din caracterul lor de componente ale cuadritensorilor antisimetrici ai cîmpului:

$$\Phi = \{\Phi_{\alpha\beta}\} \qquad \text{cu matricea} \qquad \left\| \begin{array}{cccc} 0 & B_z & -B_y - \mathrm{i}E_x/c \\ -B_z & 0 & B_x - \mathrm{i}E_y/c \\ B_y & -B_x & 0 & -\mathrm{i}E_z/c \\ \mathrm{i}E_x/c & \mathrm{i}E_y/c & \mathrm{i}E_z/c & 0 \end{array} \right\| \tag{39}$$

şi

$$\Gamma = \{\Gamma_{\alpha\beta}\} \qquad \text{cu matricea} \qquad \left\| \begin{array}{cccc} 0 & H_z & -H_y & -\mathrm{i}cD_x \\ -H_z & 0 & H_x & -\mathrm{i}cD_y \\ H_y & -H_x & 0 & -\mathrm{i}cD_z \\ \mathrm{i}cD_x & \mathrm{i}cD_y & \mathrm{i}cD_z & 0 \end{array} \right\| \tag{40}$$

şi al polarizaţiilor

$$\Pi = \{\Pi_{\alpha\beta}\} \qquad \text{cu matricea} \qquad \left\| \begin{array}{cccc} 0 & M_z & -M_y & \mathrm{i}cP_x \\ -M_z & 0 & M_x & \mathrm{i}cP_y \\ M_y & -M_x & 0 & \mathrm{i}cP_y \\ -\mathrm{i}cP_x & -\mathrm{i}cP_y & -\mathrm{i}cP_z & 0 \end{array} \right\| \tag{41}$$

Relaţiile de transformare corespunzătoare au, în aceeaşi aproximaţie $\left(\frac{u^2}{c^2} \ll 1\right)$, forma:

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}^0 - \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{B}^0; \qquad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}^0 + \frac{\boldsymbol{u}}{c^2} \times \boldsymbol{E}^0; \tag{42}$$

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{D}^0 - \frac{\boldsymbol{u}}{c^2} \times \boldsymbol{H}^0; \qquad \boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}^0 + \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{D}^0; \tag{43}$$

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}^0 + \frac{\boldsymbol{u}}{c^2} \times \boldsymbol{M}^0; \qquad \boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}^0 - \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{P}^0. \tag{44}$$

Cu ajutorul acestor relații de transformare se pot demonstra propozițiile 3.1, 3.2, 3.3 de mai jos.

3.1. **Dacă mărimile (36) sînt densitatea de energie și densitatea fluxului de energie asociate tensorului cîmpului electromagnetic, atunci în sistemul de referință propriu densitatea de impuls și densitatea fluxului de impuls au expresiile:**

$$g^0 = \boldsymbol{D}^0 \times \boldsymbol{B}^0,$$

$$\bar{\bar{\Theta}}^0 = -\bar{\bar{T}}^0 = -\boldsymbol{H}^0; \boldsymbol{B}^0 - \boldsymbol{E}^0; \boldsymbol{D}^0 + \\ + \bar{\bar{1}}\left(-\frac{\varepsilon_0 \bar{E}^{02}}{2} + \frac{\boldsymbol{B}^{02}}{2\mu_0} + \bar{\boldsymbol{E}}^0 \bar{\boldsymbol{D}}^0 - \varphi(\bar{\boldsymbol{P}}^0, \boldsymbol{M}^0)\right) \tag{45}$$

(în care am notat cu $\boldsymbol{A}; \boldsymbol{B}$ produsul diadic al vectorilor $\boldsymbol{A}$ și $\boldsymbol{B}$, adică tensorul de componente $A_j B_k$, și cu $\bar{\bar{1}}$ tensorul unitate din spațiul tridimensional).

Demonstrație. Înlocuind pe $\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{S}^0$ și w^0 cu (36) în (38), rezultă egalitatea:

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E}^0 \times \boldsymbol{H}^0 + \boldsymbol{u} \cdot \left[\bar{\bar{\Theta}}^0 + \bar{\bar{1}}\left(\frac{\varepsilon_0 \bar{E}^{02}}{2} - \frac{\bar{\boldsymbol{B}}^{02}}{2\mu_0} + \bar{\boldsymbol{H}}^0 \bar{\boldsymbol{B}}^0 + \varphi(\bar{\boldsymbol{P}}^0, \bar{\boldsymbol{M}}^0)\right)\right] + \\ + \boldsymbol{u}(g^0 \boldsymbol{u}). \tag{46}$$

Înlocuind în $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}$ pe $\boldsymbol{E}$ și $\boldsymbol{H}$ cu (42) și (43), se obține egalitatea:

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E}^0 \times \boldsymbol{H}^0 + \boldsymbol{u} \cdot [-\boldsymbol{H}^0; \boldsymbol{B}^0 - \boldsymbol{E}^0; \boldsymbol{D}^0 + \bar{\bar{1}}(\boldsymbol{H}^0 \boldsymbol{B}^0 + \boldsymbol{E}^0 \boldsymbol{D}^0)] \\ + \boldsymbol{u}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{D}^0 \times \boldsymbol{B}^0)). \tag{47}$$

Expresiile (46) și (47) trebuie să fie egale pentru orice mărime și orientare a lui $\boldsymbol{u}$ și de aceea coeficienții puterilor lui $\boldsymbol{u}$ trebuie să fie identici. Se obțin astfel relațiile (45).

3.2. **Pentru ca expresia (36) a densității de energie să-și păstreze forma în orice sistem de referință, termenul aditiv nedeterminat φ, funcție de polarizații, trebuie să fie un invariant scalar al universului cuadridimensional**

$$\boxed{\varphi(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{M}) = \varphi(\boldsymbol{P}^0, \boldsymbol{M}^0).} \tag{48}$$

Demonstrație. Această proprietate se poate verifica fără dificultăți considerînd relația de transformare a densității de energie (fără nici o aproximație):

$$w = \frac{c^2}{c^2 - u^2}\left[w^0 + \boldsymbol{u}\boldsymbol{g}^0 + \boldsymbol{u}\frac{\boldsymbol{S}^0}{c^2} + \frac{u^2}{c^2}\cdot(\overline{\Theta}^0\cdot\boldsymbol{u})\boldsymbol{u}\right] \tag{49}$$

și efectuînd pentru ea identificările efectuate mai sus pentru relația (38). O demonstrație mai simplă se obține considerînd relația (45) în starea particulară $\boldsymbol{E} = 0$, $\boldsymbol{B} = 0$ (adică $\Phi = 0$ și deci $\boldsymbol{E}^0 = 0$, $\boldsymbol{B}^0 = 0$). Cum această condiție poate fi îndeplinită local cu valori arbitrare pentru $\boldsymbol{P}$ și $\boldsymbol{M}$ (de ex. în materiale cu polarizare permanentă), alegerea acestei stări nu implică nici o particularizare pentru funcția $\varphi(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{M})$. În această stare însă din (36) și (45) rezultă:

$$\boldsymbol{S}^0 = 0, \quad \boldsymbol{g}^0 = 0, \quad w^0 = \varphi(\boldsymbol{P}^0, \boldsymbol{M}^0), \quad w = \varphi(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{M}), \quad \overline{\overline{\Theta}}^0 = -\overline{\overline{1}}\varphi(\boldsymbol{P}^0, \boldsymbol{M}^0).$$

Cu aceste valori din (49) se obține:

$$\varphi(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{M}) = \frac{c^2}{c^2 - u^2}\left[\varphi(\boldsymbol{P}^0, \boldsymbol{M}^0) - \frac{u^2}{c^2}\varphi(\boldsymbol{P}^0, \boldsymbol{M}^0)\right],$$

de unde rezultă relația (48).

3.3. **Într-un punct arbitrar al unui corp polarizat și magnetizat și față de un referențial inerțial [S] oarecare, densitatea de impuls și densitatea fluxului de impuls asociate cîmpului electromagnetic au expresiile:**

$$\begin{gathered}\boldsymbol{g} = \boldsymbol{D} \times \boldsymbol{B},\\ \overline{\overline{\Theta}} = -\overline{\overline{T}} = -\boldsymbol{H}; \boldsymbol{B} - \boldsymbol{E}; \boldsymbol{D} +\\ + \overline{\overline{1}}\left(-\frac{\varepsilon_0 \boldsymbol{E}^2}{2} + \frac{\boldsymbol{B}^2}{2\mu_0} + \boldsymbol{E}\boldsymbol{D} - \varphi\left(\boldsymbol{D} - \varepsilon_0 \boldsymbol{E}, \frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0} - \boldsymbol{H}\right)\right).\end{gathered} \tag{50}$$

Aceste expresii se pot verifica fără dificultăți cu ajutorul relațiilor de transformare ale componentelor $\overline{\overline{\Theta}}$ și $\boldsymbol{g}$ ale cuadritensorilor, plecînd de la valorile (36) și (45) și utilizînd relațiile de transformare ale mărimilor $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{H}$. Verificarea nu este însă necesară dacă se observă că expresiile (36) și (50) corespund unei expresii cuadridimensionale tensoriale, așa cum arătăm mai jos.

§ 4. CUADRITENSORUL ENERGIE-IMPULS AL CÎMPULUI ELECTROMAGNETIC MACROSCOPIC ȘI SEPARAREA „CÎMP-CORP"

Ipotezele stabilite inițial au permis să se determine expresiile (36) și (50) ale funcțiilor de stare $\overline{\overline{\Theta}}$, $\boldsymbol{g}$, $\boldsymbol{S}$, w într-un sistem de referință arbitrar pînă la termenul aditiv invariant, funcție de polarizații

$\varphi(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{M}) = \varphi(\boldsymbol{D} - \varepsilon_0 \boldsymbol{E}, \frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0} - \boldsymbol{H})$. Pe baza lor se pot stabili concluziile 4.1, 4.2 și 4.3 de mai jos.

4.1. Teorema separării „cîmp-corp". Sistemul fizic global, compus din corpurile localizate într-o anumită regiune din spațiu și cîmpul electromagnetic cu care ele coexistă, poate fi separat în sens tare (adică invariant) într-un sistem „corp", caracterizat de un cuadritensor energie-impuls $\mathcal{T}^{\mathrm{K}}$, funcție numai de mărimile de stare locală și instantanee ale corpului, și un sistem „cîmp" caracterizat de un cuadritensor $\mathcal{T}$, funcție numai de mărimile de stare locală și instantanee ale cîmpului:

$$\mathcal{T}^{\mathrm{G}} = \mathcal{T}^{\mathrm{K}}(Z^{\mathrm{K}}) + \mathcal{T}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{H}). \tag{51}$$

Separarea nu este unică, deoarece se poate trece de la „cîmp" la „corp" un cuadritensor diagonal, funcție de polarizația $\boldsymbol{P}$ *și de magnetizația* $\boldsymbol{M}$, *fără ca mărimile termomecanice de stare ale corpului (singurele direct accesibile experienței) să fie afectate. Impulsul și fluxul de energie sînt însă separate univoc.*

Demonstrație. Mărimile (18), funcție de starea corpului în referențialul propriu $[S^0]$, definesc un cuadritensor $\mathcal{T}^{\mathrm{K}}$ și unul singur care să le aibă drept componente. Cu ajutorul relațiilor de transformare liniare ale acestor componente, respectiv ale mărimilor de stare ale corpului — relații care, în afară de astfel de mărimi, nu conțin decît viteza $\boldsymbol{u}$, adică tot o mărime de stare a corpului —, se vor putea exprima întotdeauna componentele tensorului $\mathcal{T}^{\mathrm{K}}$ față de un referențial oarecare [S], ca funcții de mărimile de stare Z^{K} ale corpului față de [S]:

$$\overline{\overline{\Theta}}^{\mathrm{K}} = \overline{\overline{\Theta}}^{\mathrm{K}}(Z^{\mathrm{K}}), \quad \boldsymbol{g}^{\mathrm{K}} = \boldsymbol{g}^{\mathrm{K}}(Z^{\mathrm{K}}), \quad \boldsymbol{S}^{\mathrm{K}} = \boldsymbol{S}^{\mathrm{K}}(Z^{\mathrm{K}}), \quad w^{\mathrm{K}} = w^{\mathrm{K}}(Z^{\mathrm{K}}). \tag{52}$$

Aceste funcții depind de natura materialului considerat.

Pe de altă parte, relațiile (36) și (50) exprimă componentele tensorului energie-impuls al cîmpului ca *funcții universale* de starea acestuia:

$$\overline{\overline{\Theta}} = \overline{\overline{\Theta}}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{H}), \quad \boldsymbol{g} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{H}), \quad \boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{H}), \quad w = w(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{H}). \tag{53}$$

Relațiile (52) și (53) exprimă realizarea condiției de separabilitate (15), respectiv (51), în sens tare.

Separarea nu este însă unică, deoarece în $\overline{\overline{\Theta}}$ și w (nu și în $\boldsymbol{S}$ și $\boldsymbol{g}$), apare funcția de polarizație $\varphi(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{M})$ rămasă nedeterminată. Această funcție, cu valoare invariantă la schimbarea referențialului, este nedeterminată și din punctul de vedere experimental. În adevăr, dacă notăm provizoriu cu accent mărimile corespunzătoare unui $\varphi \neq 0$ și fără accent cele corespunzătoare cazului $\varphi = 0$, sînt valabile pentru componentele cuadritensorului $\mathcal{T}$ al cîmpului relațiile (16), care, în formă cuadridimen-

sională — notînd cu δ cuadritensorul unitate de componente $\delta_{\alpha\beta} = 0$ $(\alpha \neq \beta)$ şi $\delta_{\beta\beta} = 1$ $(\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4)$ —, se scriu

$$\mathcal{T}' = \mathcal{T} - \delta\,\varphi(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{M}). \tag{54}$$

Deoarece $\mathcal{T}' + \mathcal{T}'^{K} = \mathcal{T}^{G} = \mathcal{T} + \mathcal{T}^{K}$, rezultă şi relaţia:

$$\mathcal{T}'^{K} = \mathcal{T}^{K} + \delta\varphi(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{M}), \tag{55}$$

adică

$$\overline{\overline{\Theta}}'^{K} = \overline{\overline{\Theta}}^{K} + \overline{\overline{1}}\,\varphi, \quad \boldsymbol{g}'^{K} = \boldsymbol{g}^{K}, \quad \boldsymbol{S}'^{K} = \boldsymbol{S}^{K}, \quad w'^{K} = w^{K} - \varphi. \tag{56}$$

Pe de altă parte, densităţile de forţă şi de putere corespunzătoare vor fi:

$$\boldsymbol{f}' = -\operatorname{Div}\overline{\overline{\Theta}}' - \frac{\partial \boldsymbol{g}'}{\partial t} = -\operatorname{Div}(\overline{\overline{\Theta}} - \overline{\overline{1}}\,\varphi) - \frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial t} = \boldsymbol{f} + \operatorname{grad}\varphi, \tag{57}$$

$$\begin{aligned} p' &= -\boldsymbol{f}'\boldsymbol{u} - \operatorname{div}\boldsymbol{S}' - \frac{\partial w'}{\partial t} = \\ &= -\boldsymbol{f}\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}\operatorname{grad}\varphi - \operatorname{div}\boldsymbol{S} - \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial t} = p - \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}. \end{aligned} \tag{58}$$

Prin trecerea de la $\varphi = 0$ la $\varphi \neq 0$ „se exercită" o densitate de forţă suplimentară grad φ, care e compensată exact de schimbarea tensiunilor „mecanice" $\overline{\overline{T}}^{K} = -\overline{\overline{\Theta}}^{K}$ cu o presiune numeric egală cu φ, astfel că echilibrul dinamic local şi deci starea de mişcare a corpului nu e afectată. Totodată densitatea de energie $p'\mathrm{d}t = p\,\mathrm{d}t - \mathrm{d}\varphi$, cedată în timpul $\mathrm{d}t$ direct de cîmp corpului, scade cu o diferenţială exactă corespunzătoare scăderii cu φ a densităţii de energie a corpului. De aceea nici bilanţul energetic al acestuia nu e afectat. În § 6 se va exemplifica într-un caz concret această invarianţă a stării termomecanice a corpului la transformarea (54). Deoarece $\mathcal{T}(Z)$ e o funcţie universală, şi $\varphi(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{M})$ trebuie să fie o funcţie universală, independentă de natura materialului. Alegerea acestei funcţii e, în rest, complet arbitrară şi constituie o *condiţie definitorie* pentru cuadritensorul energie-impuls al cîmpului electromagnetic macroscopic.

4.2. **Oricare ar fi proprietăţile de material ale mediului, cuadritensorul energie-impuls al cîmpului electromagnetic are expresia tensorială:**

$$\boxed{\mathcal{T}_{\beta\gamma} = \sum_{\alpha=1}^{4} \Phi_{\beta\alpha}\,\Gamma_{\gamma\alpha} + \delta_{\beta\gamma}\,\mathfrak{L},} \tag{59}$$

în care $\mathfrak{L}$ e invariantul scalar (numit densitate lagrangeană):

$$\boxed{\mathfrak{L} = \frac{1}{2}\sum_{\delta=1}^{4}\sum_{\varepsilon=1}^{4}\left(\frac{1}{2\mu_0}\,\Phi_{\varepsilon\delta}^{2} - \Phi_{\varepsilon\delta}\,\Gamma_{\varepsilon\delta}\right) - \varphi(\Pi),} \tag{60}$$

$$\mathfrak{L} = -\frac{\varepsilon_0 \boldsymbol{E}^2}{2} + \frac{\boldsymbol{B}^2}{2\mu_0} - \boldsymbol{BH} + \boldsymbol{ED} + \varphi(\boldsymbol{P}_0, \boldsymbol{M}) =$$

$$= \frac{\boldsymbol{DE} - \boldsymbol{BH}}{2} + \frac{\boldsymbol{BM} + \boldsymbol{PE}}{2} - \varphi(\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{M}),$$

iar $\varphi = \varphi(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{M})$e un invariant scalar, funcţie arbitrară de polarizaţii.

Expresiile (59) şi (60) rezultă din (36) şi (50) fără dificultăţi, ţinînd seamă de (39) şi (40). Caracterul tensorial al operaţiilor din membrul drept al egalităţilor (59) şi (60) constituie o verificare generală a invarianţei expresiilor (36) şi (50). Aşa cum am menţionat la început, aceste expresii au fost stabilite pentru prima dată, cu ipoteze mai restrictive, în lucrarea [9].

Cu ajutorul formei cuadridimensionale a ecuaţiilor Maxwell-Minkowski (1), (2), (3):

$$\sum_{\beta=1}^{4} \frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = \mathfrak{J}_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, 3, 4), \tag{61}$$

$$\frac{\partial \Phi_{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma} + \frac{\partial \Phi_{\gamma\alpha}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial \Phi_{\beta\gamma}}{\partial x_\alpha} = 0 \qquad (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3, 4), \tag{62}$$

$$\Phi_{\alpha\beta} - \mu_0 \Gamma_{\alpha\beta} = \mu_0 \Pi_{\alpha\beta} \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4), \tag{63}$$

în care:

$$\mathfrak{J} = [J_x, J_y, J_z, \mathrm{i}c\rho] \tag{64}$$

e *cuadrivectorul densităţii de curent-sarcină*, se poate determina cuadrivectorul densitate de forţă-putere:

$$\mathfrak{f} = \left[f_x, f_y, f_z, \mathrm{i}\,\frac{\boldsymbol{p} + \boldsymbol{fu}}{c}\right], \tag{65}$$

luînd divergenţa cuadritensorului (59) cu semn schimbat:

$$\mathfrak{f}_\beta = -\sum_{\gamma=1}^{4} \frac{\partial \mathfrak{T}_{\beta\gamma}}{\partial x_\gamma}. \tag{66}$$

Această relaţie exprimă sub formă cuadridimensională teoremele energiei şi impulsului (6) şi (7). Efectuînd calculele, se obţine expresia:

$$\boxed{\mathfrak{f}_\beta = \sum_{\alpha=1}^{4} \Phi_{\beta\alpha} \mathfrak{J}_\alpha - \frac{1}{2} \sum_{\varepsilon=1}^{4} \sum_{\delta=1}^{4} \Phi_{\varepsilon\delta} \frac{\partial \Pi_{\varepsilon\delta}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial \varphi(\Pi)}{\partial x_\beta}.} \tag{67}$$

Dacă se calculează cuadritensorul $\mathfrak{M}$ antisimetric al *densităţii momentelor forţelor*, definit de relaţia:

$$\mathfrak{M}_{\beta\gamma} = -\sum_{\alpha=1}^{4} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (x_\beta \mathfrak{T}_{\gamma\alpha} - x_\gamma \mathfrak{T}_{\beta\alpha}), \tag{68}$$

care exprimă sub formă cuadridimensională teoremele momentului cinetic și ale mișcării centrului de masă, se obține expresia :

$$\boxed{\mathfrak{M}_{\beta\gamma} = x_\beta f_\gamma - x_\gamma f_\beta + \mathfrak{T}_{\beta\gamma} - \mathfrak{T}_{\gamma\beta},} \tag{69}$$

independentă de funcția nedeterminată φ. În aceste relații

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z, \quad x_4 = ict. \tag{70}$$

4.3. Există o stare de referință a cîmpului electromagnetic, în care, la proprietăți de material arbitrare, se pot anula atît componentele cuadritensorului energie-impuls, cît și componentele cuadrivectorului forță-putere (condiția 17), dacă și numai dacă se alege :

$$\varphi(\Pi) \equiv \varphi(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{M}) = 0. \tag{71}$$

Această stare e dată de condiția (17), $\boldsymbol{E} = 0$, $\boldsymbol{B} = 0$, adică :

$$\Phi = 0. \tag{72}$$

Demonstrație. Deoarece într-un moment dat componentele cuadrivectorului $\mathfrak{f}$ au valori local independente de ale cuadritensorilor Φ, Γ și $\Pi = \frac{1}{\mu_0}\Phi - \Gamma$, condiția (72) e necesară pentru anularea expresiei (67). Deoarece cu (72) din (59), (60) și (67) se obțin relațiile :

$$\mathfrak{T}_{\beta\gamma} = -\delta_{\beta\gamma}\varphi(\Pi); \qquad f_\beta = \frac{\partial\varphi(\Pi)}{\partial x_\beta}, \tag{73}$$

iar în medii cu proprietăți de material arbitrare, în starea (72), φ poate avea orice valori, condiția (72) e suficientă numai dacă se impune (71). Cum alegerea funcției universale și invariante φ nu are implicații experimentale, condiția (17) are un caracter definitoriu pentru cuadritensorul $\mathfrak{T}$ al cîmpului, care deci ar putea fi definit *univoc* astfel :

Cuadritensorul funcție de starea cîmpului a cărui sumă cu un cuadritensor funcție de starea corpului este cuadritensorul energie-impuls global și care se anulează în acea stare a cîmpului în care nu există schimb de energie și de impuls între „cîmp" și „corp".

§ 5. TEOREME DE CONSERVARE

Operînd în cele ce urmează cu $\varphi \neq 0$, studiem teoremele de conservare asociate cuadritensorului (59).

5.1. Componentele spațiale și temporale ale relațiilor (66) și (67) exprimă — așa cum se știe — conservarea impulsului și a energiei și permit determinarea *densității de forță* $\boldsymbol{f}$ exercitate de cîmp asupra corpului și a *densității totale de putere*, $p_{\text{tot}} = \boldsymbol{fu} + p$, transmise de cîmp corpului. Se obțin astfel :

a) *forma locală a teoremei impulsului electromagnetic* :

$$\boldsymbol{f} = -\frac{\partial(\boldsymbol{D}\times\boldsymbol{B})}{\partial t} - \mathrm{Div}\left[-\boldsymbol{E};\boldsymbol{B}-\boldsymbol{H};\boldsymbol{B}+ \right.$$
$$\left. + \bar{\bar{1}}\left(-\frac{\varepsilon_0 E^2}{2}+\frac{B^2}{2\mu_0}+\boldsymbol{E}\boldsymbol{D}-\varphi(\boldsymbol{P},\boldsymbol{M})\right)\right] \tag{74}$$

cu densitatea de forță :

$$\boldsymbol{f} = \rho\boldsymbol{E} + \boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B} - \mathrm{grad}\,(\boldsymbol{E}\overset{\downarrow}{\boldsymbol{P}} + \boldsymbol{B}\overset{\downarrow}{\boldsymbol{M}}) + \mathrm{grad}\;\varphi(\boldsymbol{P},\boldsymbol{M}), \tag{75}$$

în care se recunosc termenii $\rho\boldsymbol{E}+\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B}$, cunoscuți de la medii nepolarizate (aici săgeata exprimă faptul că derivarea operează numai asupra mărimii indicate) ;

b) *forma locală a teoremei energiei electromagnetice* :

$$p_{\mathrm{tot}} = -\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\varepsilon_0 E^2}{2}-\frac{B^2}{2\mu_0}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{H}+\varphi(\boldsymbol{P},\boldsymbol{M})\right] - \mathrm{div}\,(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}) \tag{76}$$

cu densitatea totală de putere :

$$p_{\mathrm{tot}} = p + \boldsymbol{f}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{E}\boldsymbol{J} + \boldsymbol{E}\frac{\partial\boldsymbol{P}}{\partial t} + \boldsymbol{B}\frac{\partial\boldsymbol{M}}{\partial t} - \frac{\partial\varphi(\boldsymbol{P},\boldsymbol{M})}{\partial t}. \tag{77}$$

Introducînd vectorul $\boldsymbol{Q}$ al *densității de sarcină transmisă* definit în fiecare punct și în fiecare referențial de condiția :

$$\boldsymbol{J} = \frac{\partial\boldsymbol{Q}}{\partial t} \tag{78}$$

și folosind notațiile :

$$\mathrm{grad}_{\boldsymbol{P}}\,\varphi = \boldsymbol{i}\frac{\partial\varphi}{\partial P_x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial\varphi}{\partial P_y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial\varphi}{\partial P_z}, \tag{79}$$

$$\mathrm{grad}_{\boldsymbol{M}}\,\varphi = \boldsymbol{i}\frac{\partial\varphi}{\partial M_x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial\varphi}{\partial M_y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial\varphi}{\partial M_z}, \tag{80}$$

$$\partial\boldsymbol{Q} = \frac{\partial\boldsymbol{Q}}{\partial t}\,\mathrm{d}t\,; \qquad \partial\boldsymbol{P} = \frac{\partial_{\boldsymbol{P}}}{\partial t}\,\mathrm{d}t\,; \qquad \partial\boldsymbol{M} = \frac{\partial\boldsymbol{M}}{\partial t}\,\mathrm{d}t, \tag{81}$$

$$\partial l_{\mathrm{tot}} = p_{\mathrm{tot}}\,\mathrm{d}t = p\,\mathrm{d}t + \boldsymbol{f}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}, \qquad \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{u}\,\mathrm{d}t, \tag{82}$$

relația (77) capătă forma (după înmulțirea cu $\mathrm{d}t$) :

$$\partial l_{\mathrm{tot}} = \boldsymbol{E}\cdot\partial\boldsymbol{Q} + (\boldsymbol{E}-\mathrm{grad}_{\boldsymbol{P}}\,\varphi)\cdot\partial\boldsymbol{P} + (\boldsymbol{B}-\mathrm{grad}_{\boldsymbol{M}}\,\varphi)\cdot\partial_{\boldsymbol{M}}. \tag{83}$$

Aceasta este expresia *densității de lucru elementar echivalent* transmis de cîmp corpului și, prin analogie cu expresia lucrului mecanic generalizat

din termodinamica sistemelor cu un număr finit de grade de libertate :

$$\delta \mathfrak{L} = \sum_{k=1} X_k \, \mathrm{d}x_k, \tag{84}$$

permite să se interpreteze mărimile $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{P}$ şi $\boldsymbol{M}$ ca *parametri externi locali* ai cîmpului electromagnetic macroscopic. Ca şi parametrii externi x_k din (84), mărimile $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{P}$ şi $\boldsymbol{M}$ caracterizează interacţiunea ne-termică a „sistemului" (aici : cîmpul) cu „exteriorul" (aici : corpul), au variaţii liniar independente (local) şi intervin în caracterizarea stărilor de echilibru (aici : electrostatice şi magnetostatice) ale sistemului (ale cîmpului). Interpretarea arătată extinde la cîmp formulările cunoscute din termodinamica sistemelor cu un număr finit de grade de libertate, cu observaţia că în acest caz — deoarece temperatura nu intervine în caracterizarea stărilor de echilibru ale cîmpului — cîmpul rezultă a fi un sistem termodinamic ideal de entropie nulă.

Semnificaţia fizică a expresiilor (77) şi (83) se adînceşte, dacă se consideră invariantul scalar :

$$p^0 = \boldsymbol{E}^0 \boldsymbol{J}^0 + \boldsymbol{E}^0 \frac{\partial \boldsymbol{P}^0}{\partial t^0} + \boldsymbol{B}^0 \frac{\partial \boldsymbol{M}^0}{\partial t^0} - \frac{\partial \varphi \, (\boldsymbol{P}^0 \boldsymbol{M}^0,)}{\partial t^0} = - \frac{\boldsymbol{f}\boldsymbol{u} + p_{\mathrm{tot}}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \tag{85}$$

şi se observă că variaţiile locale, în referenţialul propriu $\mathrm{d}\boldsymbol{P}^0 = \dfrac{\partial \boldsymbol{P}^0}{\partial t^0} \mathrm{d}t^0$ şi $\mathrm{d}\boldsymbol{M}^0 = \dfrac{\partial \boldsymbol{M}^0}{\partial t^0} \mathrm{d}t^0$, pot fi exprimate în funcţie de variaţiile $\delta \boldsymbol{P}^0$ şi $\delta \boldsymbol{M}^0$, relative la axe ataşate rotaţiei locale a mediului cu unghiul elementar $\overline{\delta \alpha^0}$ prin relaţiile :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\boldsymbol{P}^0 &= \delta \boldsymbol{P}^0 + \overline{\delta \alpha^0} \times \boldsymbol{P}^0, \\ \mathrm{d}\boldsymbol{M}^0 &= \delta \boldsymbol{M}^0 + \overline{\delta \alpha^0} \times \boldsymbol{M}^0. \end{aligned} \tag{86}$$

Se obţine astfel expresia :

$$\begin{aligned} \delta l_{\mathrm{tot}} = \boldsymbol{f} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} + (\boldsymbol{P}^0 \times \boldsymbol{E}^0 + \boldsymbol{M}^0 \times \boldsymbol{B}^0) \, \overline{\delta \alpha^0} + \boldsymbol{E}^0 \boldsymbol{J}^0 \, \mathrm{d}t^0 + \\ + (\boldsymbol{E}^0 - \mathrm{grad}_{\boldsymbol{P}^0} \varphi) \, \delta \boldsymbol{P}^0 + (\boldsymbol{B}^0 - \mathrm{grad}_{\boldsymbol{M}^0} \varphi) \, \delta \boldsymbol{M}^0, \end{aligned} \tag{87}$$

din care rezultă că densitatea de volum a lucrului elementar echivalent cedat de cîmp corpului cuprinde :

— *densitatea lucrului elementar de translaţie* :

$$\delta l_{\mathrm{trans}} = \boldsymbol{f} \, \mathrm{d}\boldsymbol{r}, \tag{88}$$

cu $\boldsymbol{f}$ dat de (75) ;

— *densitatea lucrului elementar de rotaţie* :

$$\delta l_{\mathrm{rot}} = (\boldsymbol{P}^0 \times \boldsymbol{E}^0 + \boldsymbol{M}^0 \times \boldsymbol{B}^0) \, \overline{\delta \alpha^0} = \boldsymbol{c}^0 \, \overline{\delta \alpha^0}, \tag{89}$$

corespunzătoare densităţii de volum a cuplului :

$$\boldsymbol{c}^0 = \boldsymbol{P}^0 \times \boldsymbol{E}^0 + \boldsymbol{M}^0 \times \boldsymbol{B}^0 ; \tag{90}$$

— *densitatea lucrului elementar de conducție* (efectele Joule, Peltier, electrochimice etc.) :

$$\delta l_{\text{cond}} = \boldsymbol{E}^0 \boldsymbol{J}^0 \mathrm{d}t^0 = \boldsymbol{E}^0 \mathrm{d}\boldsymbol{Q}^0 ; \tag{91}$$

— *densitatea lucrului elementar de polarizație electrică* :

$$\delta l_{\text{pol}} = (\boldsymbol{E}^0 - \operatorname{grad}_{\boldsymbol{P}^0} \varphi (\boldsymbol{P}^0, \boldsymbol{M}^0)) \cdot \delta \boldsymbol{P}^0 ; \tag{92}$$

— *densitatea lucrului elementar de magnetizație* :

$$\delta l_{\text{mag}} = (\boldsymbol{B}^0 - \operatorname{grad}_{\boldsymbol{M}^0} \varphi (\boldsymbol{P}^0, \boldsymbol{M}^0)) \cdot \delta \boldsymbol{M}^0 . \tag{93}$$

Ultimii doi termeni nu sînt luați de obicei în considerație cînd se studiază bilanțul energetic al cîmpului electromagnetic, deși se introduc (eventual pînă la un termen aditiv diferențială exactă) la studiul bilanțului energetic al corpului. Teoria dezvoltată aici e, din acest punct de vedere, consecventă (vezi și § 6).

5.2. Componentele relațiilor (68) și (69) exprimă — așa cum se știe — teorema momentului cinetic și teorema mișcării centrului de masă. Considerînd componentele cu indicii $\beta, \gamma = 1, 2, 3$ și integrînd pe domeniul spațial V_Σ mărginit de suprafața închisă Σ, se obține *forma integrală a teoremei momentului cinetic* (mai comodă pentru interpretare) :

$$\int_{V_\Sigma} (\boldsymbol{P} \times \boldsymbol{E} + \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{B} + \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{f}) \, \mathrm{d}V = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{V_\Sigma} \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{g} \, \mathrm{d}V - \\ - \oint_\Sigma \boldsymbol{r} \times (\overline{\overline{\Theta}} \cdot \boldsymbol{n}) \, \mathrm{d}A, \tag{94}$$

cu $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{g}$ și $\overline{\overline{\Theta}}$ dați de (60) și (74), ($\boldsymbol{n}$ = normala exterioară).

Din această relație rezultă că, datorită nesimetriei cuadritensorului $\mathfrak{T}$, cîmpul exercită asupra corpurilor și un moment (cuplu) intrinsec cu densitatea :

$$\boxed{\boldsymbol{c} = \boldsymbol{P} \times \boldsymbol{E} + \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{B} = \boldsymbol{D} \times \boldsymbol{E} + \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{H},} \tag{95}$$

funcție de starea locală și instantanee a cîmpului.

Această densitate de cuplu — care a rezultat mai sus (90) și din interpretarea teoremei energiei — poate să determine fie nesimetria tensiunilor mecanice ale corpului, fie apariția unor densități superficiale de cuplu în starea de tensiune a corpului [9], fie ambele efecte.

Considerînd componentele cu indicele $\gamma = 4$ ale relațiilor (68) și (69) și integrînd pe același domeniu, se obține, după reducerea unor termeni, relația :

$$\int_{V_\Sigma} \boldsymbol{r} \, p_{\text{tot}} \, \mathrm{d}V - \int_{V_\Sigma} \boldsymbol{S} \, \mathrm{d}V = - \oint_\Sigma \boldsymbol{r} (\boldsymbol{S}\, \boldsymbol{n}) \, \mathrm{d}A - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{V_\Sigma} \boldsymbol{r} \, w \, \mathrm{d}V. \tag{96}$$

Această ecuație poate fi interpretată, în lumina concepției lui Einstein privitoare la asocierea unei mase inerte oricărei forme de energie ($m = W/c^2$), ca descriind mișcarea centrului de inerție al cîmpului, avînd raza vectoare $\boldsymbol{R}$ definită de relația :

$$\boldsymbol{R}\int_{V_\Sigma} w\,\mathrm{d}V = \int_{V_\Sigma} \boldsymbol{r}\,w\,\mathrm{d}V. \tag{97}$$

Se obține astfel *ecuația de mișcare a centrului de inerție*

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}t}\int_{V_\Sigma} w\,\mathrm{d}V = -\boldsymbol{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{V_\Sigma} w\,\mathrm{d}V - \oint_\Sigma \boldsymbol{r}(\boldsymbol{S}\boldsymbol{n})\,\mathrm{d}A + \int_{V_\Sigma} \boldsymbol{S}\,\mathrm{d}V - \int_{V_\Sigma} \boldsymbol{r}p_{\mathrm{tot}}\,\mathrm{d}V, \tag{98}$$

din care trebuie să rezulte mișcarea uniformă a centrului de inerție în cazul cînd cîmpul constituie un sistem izolat. Cîmpul din V_Σ este un sistem izolat, dacă nu interacționează cu exteriorul suprafeței Σ, adică dacă *în fiecare punct* al suprafeței

$$\overline{\overline{\Theta}}\cdot\boldsymbol{n}|_\Sigma = 0 \qquad \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{n}|_\Sigma = 0, \tag{99}$$

și dacă nu interacționează cu corpul, adică dacă *în fiecare punct* al domeniul V_Σ

$$\boldsymbol{f}|_{V_\Sigma} = 0, \qquad p_{\mathrm{tot}}|_{V_\Sigma} = 0, \tag{100}$$

fără ca toate mărimile de stare ale cîmpului să fie identic nule în V_Σ.

În aceste condiții de izolare, din teorema impulsului (73) și din teorema energiei (75) rezultă :

$$W = \int_{V_\Sigma} w\,\mathrm{d}V = \text{const.}, \qquad \boldsymbol{G} = \int_{V_\Sigma} \boldsymbol{g}\,\mathrm{d}V = \text{const.} \tag{101}$$

și ecuația (98) se poate scrie, după derivare :

$$W\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{V_\Sigma} \boldsymbol{S}\,\mathrm{d}V = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{V_\Sigma} (\boldsymbol{S} - c^2\boldsymbol{g})\,\mathrm{d}V. \tag{102}$$

De obicei se consideră că, pentru a ajunge la o mișcare rectilinie și uniformă a centrului de inerție ($\mathrm{d}^2\boldsymbol{R}/\mathrm{d}t^2 = 0$), e necesar să fie satisfăcută *relația lui Planck* :

$$\boldsymbol{S} = c^2\boldsymbol{g}, \tag{103}$$

care atrage după sine simetria cuadritensorului energie-impuls. Acesta este unul dintre argumentele care se aduc [7] împotriva cuadritensorului nesimetric al lui Minkowski. În realitate, mișcarea uniformă și rectilinie a centrului de masă e asigurată de relația mai puțin restrictivă :

$$\int_{V_\Sigma} \frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{S} - c^2\boldsymbol{g})\,\mathrm{d}V = 0 \tag{104}$$

în condițiile de izolare considerate. Din (36) și (50) rezultă că izolarea de exterior (99) e asigurată numai dacă

$$\boldsymbol{E}|_{\Sigma} = 0, \qquad \boldsymbol{B}|_{\Sigma} = 0. \tag{105}$$

Din (75) și (77) rezultă că izolarea de corp (100) e asigurată (cu $\boldsymbol{E} \neq 0$ și $\boldsymbol{B} \neq 0$ în V_{Σ}) numai dacă în toate punctele din V_{Σ}

$$\rho = 0, \quad \boldsymbol{J} = 0, \quad \boldsymbol{P} = \text{const.}, \quad \boldsymbol{M} = \text{const.} \tag{106}$$

Cîmpul caracterizat de cuadritensorul $\mathcal{T}$ e deci izolat de corp numai în cazul cînd polarizația și magnetizația acestuia sînt constante în timp și în spațiu. Dar în acest caz rezultă, cu (1) și (2):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{S} - c^2\boldsymbol{g}) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H} - \frac{\boldsymbol{D} \times \boldsymbol{B}}{\varepsilon_0\mu_0}\right) = -c^2\boldsymbol{P} \times \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} + \\ + \frac{\boldsymbol{M}}{\varepsilon_0} \times \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = c^2\boldsymbol{P} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{E} + \frac{\boldsymbol{M}}{\varepsilon_0} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{H} \end{aligned} \tag{107}$$

și

$$\int_{V_{\Sigma}} \frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{S} - c^2\boldsymbol{g})\, \mathrm{d}V = c^2\boldsymbol{P} \times \oint_{\Sigma} (\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{E})\, \mathrm{d}A + \frac{\boldsymbol{M}}{\varepsilon_0} \times \oint_{\Sigma} (\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{H})\, \mathrm{d}A. \tag{108}$$

Cu (105) și (106) rezultă însă atunci condiția (104) privitoare la mișcarea uniformă a centrului de inerție:

Cuadritensorul nesimetric $\mathcal{T}$ definit de (59) și (60) este compatibil cu mișcarea uniformă și rectilinie a centrului de inerție al cîmpului, în condițiile în care acesta e „izolat" din punctul de vedere al schimbului de energie și de impuls.

§ 6. CORPUL SUB ACȚIUNEA CÎMPULUI

Teoria dezvoltată în această lucrare poate fi considerată satisfăcătoare numai dacă poate conduce la o formulare consistentă a interacțiunii dintre cîmp și corp. În cele ce urmează vom exemplifica această interacțiune pentru cazul unui fluid perfect, izolant ($\boldsymbol{J} = 0$), cu polarizare electrică și magnetizare reversibile și liniare. Vom nota cu τ densitatea de masă a fluidului, cu p presiunea lui totală, cu T temperatura absolută, cu s densitatea de volum a entropiei. Vom lucra în aproximația nerelativistă, operînd cu mărimile definite în referențialul propriu (dar fără a mai pune indicele superior ^{0}).

Tensiunile „mecanice" din fluid sînt, în acest caz, descrise de tensorul diagonal $\overline{\overline{T}}^{\mathrm{K}} = -\overline{\overline{1}}\, p^{\mathrm{K}}$, iar condiția de echilibru a momentelor impune anularea densității de cuplu exercitate de cîmp $\bar{c} = 0$ ($\boldsymbol{P} \parallel \boldsymbol{E}$ și $\boldsymbol{M} \parallel \boldsymbol{B}$). În aceste condiții, densitatea de volum a lucrului elementar echivalent (87) cedat de cîmp corpului se scrie:

$$\delta l_{\mathrm{tot}} = \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{u}\, \mathrm{d}t + \boldsymbol{E}\, \mathrm{d}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{B}\, \mathrm{d}\boldsymbol{M} - \mathrm{d}\varphi(P, M). \tag{109}$$

Densitatea de volum a impulsului fluidului $\boldsymbol{g}^{\mathrm{K}}$ şi densitatea lui de energie w^{K} sînt date de relaţiile clasice :

$$\boldsymbol{g}^{\mathrm{K}} = \tau \boldsymbol{u}, \qquad w^{\mathrm{K}} = w_0 + \tau \frac{u^2}{2}, \tag{110}$$

în care w_0 e densitatea de energie interioară de repaus.

Ţinînd seama de ecuaţia de conservare a masei :

$$\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} + \tau \operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0, \tag{111}$$

ecuaţia de conservare a impulsului fluidului, sub formă locală, este :

$$\tau \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{f} - \operatorname{grad} p^{\mathrm{K}}. \tag{112}$$

Ţinînd seama de această relaţie, forma locală a principiilor termodinamicii pentru transformări reversibile şi izoterme rezultă :

$$\mathrm{d}(w_0 - Ts) = (p^{\mathrm{K}} + w_0 - Ts)\frac{\mathrm{d}\tau}{\tau} + \delta l_{\mathrm{tot}} - \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{u}\, \mathrm{d}t. \tag{113}$$

Cu (109) şi notînd cu :

$$\mathfrak{F} = w_0 - Ts \tag{114}$$

densitatea de volum a energiei libere, se obţine egalitatea :

$$\mathrm{d}\mathfrak{F} = \left(\frac{p^{\mathrm{K}} + \mathfrak{F}}{\tau}\right)\mathrm{d}\tau + E\,\mathrm{d}P + B\,\mathrm{d}M - \mathrm{d}\varphi(P, M) \tag{115}$$

(deoarece $\overline{E} \parallel \overline{P}$ şi $\overline{B} \parallel \overline{M}$, se poate opera numai cu valorile scalare ale vectorilor). Trecînd diferenţiala exactă $\mathrm{d}\varphi$ în primul membru, se obţine o altă formă locală a principiilor termodinamicii pentru cazul studiat ($T = \text{const.}$) :

$$\boxed{\mathrm{d}(\mathfrak{F} + \varphi(P, M)) = \left(\frac{p^{\mathrm{K}} + \mathfrak{F}}{\tau}\right)\mathrm{d}\tau + E\,\mathrm{d}P + B\,\mathrm{d}M.} \tag{116}$$

Din această relaţie rezultă că energia liberă a fluidului este o funcţie de densitatea lui de masă, de polarizaţia electrică, de magnetizaţie şi de temperatură (pentru că am considerat o transformare izotermă) :

$$\mathfrak{F} = \mathrm{f}(\tau, T, P, M) - \varphi(P, M). \tag{117}$$

Totodată mai rezultă existenţa unor *ecuaţii de stare* de forma :

$$E = \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial P} = E(\tau, P, M, T),$$
$$B = \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial M} = B(\tau, P, M, T). \tag{118}$$

Ecuațiile (118) stabilesc o dependență *de material* între mărimile de stare ale cîmpului E și B și polarizație și magnetizație, caracteristică transformărilor reversibile și deci stărilor de echilibru : acestea sînt legile polarizațiilor temporare (de ex. (21)), electrică și magnetică, sub formă implicită.

Considerînd că fluidul se polarizează și se magnetizează *liniar* — fără componente permanente —, vom admite ca formă explicită a relațiilor (118) forma uzuală :

$$D = \varepsilon_0 E + P = \varepsilon(T, \tau) E,$$
$$H = \frac{1}{\mu_0} B - M = \frac{1}{\mu(T, \tau)} B, \tag{119}$$

în care ε e permitivitatea, iar μ permeabilitatea, care, conform cu (118), pot depinde (pentru un material dat) numai de densitatea de masă și de temperatură.

Cu (119), relația (116) se poate scrie (T = const.) :

$$\mathrm{d}\psi \equiv \mathrm{d}\left(\mathcal{F} + \varphi - \frac{EP + BM}{2}\right) = \left(\frac{p^{\mathrm{K}} + \mathcal{F}}{\tau} + \frac{E^2}{2}\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}\tau} + \frac{H^2}{2}\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\tau}\right)\mathrm{d}\tau. \tag{120}$$

Funcția de stare ψ, a cărei diferențială apare în membrul drept, depinde numai de densitatea de masă și de temperatură. Există deci o astfel de funcție de stare, termen aditiv al densității de energie a corpului, *care nu depinde de starea lui de polarizare și de magnetizare.* Din (120) rezultă deci :

$$\psi(\tau, T) = \mathcal{F} + \varphi(P, M) - \frac{EP + BM}{2}; \tag{121}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \tau} = \psi_\tau(\tau, T) = \frac{1}{\tau}\left[p^{\mathrm{K}} + \mathcal{F} + \frac{E^2}{2}\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}\tau}\tau + \frac{H^2}{2}\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\tau}\tau\right]. \tag{122}$$

Ținînd seama de (114) și (110), rezultă că, pentru stări asociate unor transformări reversibile, densitatea de energie a fluidului se poate scrie sub forma :

$$w^{\mathrm{K}}(\tau, T, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{P}, \boldsymbol{M}) = Ts + \psi(\tau, T) + \tau\frac{\boldsymbol{u}^2}{2} + \frac{\boldsymbol{EP} + \boldsymbol{BM}}{2} - \varphi(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{M}), \tag{123}$$

iar — cu notația :

$$p(\tau, T) = \tau\frac{\partial \psi(\tau, T)}{\partial \tau} - \psi(\tau, T) \tag{124}$$

presiunea totală a fluidului se poate scrie sub forma :

$$p^{\mathrm{K}}(\tau, T, \boldsymbol{P}, \boldsymbol{M}) = p(\tau, T) + \varphi(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{M}) - \frac{\boldsymbol{EP} + \boldsymbol{BM}}{2} + \frac{E^2}{2}\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}\tau}\tau + \frac{H^2}{2}\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\tau}\tau. \tag{125}$$

Din examinarea relațiilor (1.23) și (1.25), se pot trage următoarele concluzii :

a) densitatea de energie a fluidului perfect se descompune aditiv în doi termeni : primul, *termomecanic* — independent de starea de polarizare și de magnetizare a fluidului —, care cuprinde densitatea energiei legate Ts, densitatea energiei libere de deformare elastică $\psi(\tau, T)$ și densitatea energiei cinetice ; al doilea, *electromagnetic*, cuprinzînd *densitatea energiei de polarizație și de magnetizație* :

$$w_p + w_M = \frac{\boldsymbol{EP}}{2} + \frac{\boldsymbol{BM}}{2} = \frac{P^2}{2(\varepsilon - \varepsilon_0)} + \frac{M^2}{2\left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\mu_0}\right)} \tag{1.26}$$

și o densitate de energie dependentă numai de $\boldsymbol{P}$ și $\boldsymbol{M}$, egală și de semn contrar cu funcția nedeterminată φ ;

b) presiunea totală a fluidului perfect se descompune aditiv în trei termeni : unul *termomecanic* — independent de starea de polarizare și de magnetizare a fluidului —, care este presiunea hidrostatică $p(\tau, T)$; al doilea *electromagnetic*, cuprinzînd o componentă egală numeric cu funcția nedeterminată φ și o componentă negativă egală numeric cu densitatea energiei de polarizație și de magnetizație ; al treilea *mixt*, cuprinzînd presiunile de electrostricțiune $\frac{\boldsymbol{E}^2}{2}\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}\tau}\tau$ și magnetostricțiune $\frac{\boldsymbol{H}^2}{2}\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\tau}\tau$;

c) oricare ar fi valoarea funcției nedeterminate $\varphi(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{M})$, starea termomecanică a fluidului nu este afectată, în acord cu cele stabilite sub 4.3. Deoarece caracterul universal al acestei funcții este o consecință a ipotezei II, care asigură independența energiei atribuite cîmpului de natura materialului cu care interacționează, putem atribui acestei funcții o astfel de valoare, încît termenii pur *electromagnetici* din energia și presiunea fluidului să se anuleze. Din (1.23) și (1.25) rezultă imediat că această situație se realizează pentru :

$$\varphi(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{M}) = \frac{\boldsymbol{P}^2}{2(\varepsilon - \varepsilon_0)} + \frac{\boldsymbol{M}^2}{2\left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\mu_0}\right)} = \frac{\boldsymbol{PE} + \boldsymbol{BM}}{2}. \tag{1.27}$$

Cu această alegere se trece de la „corp" la „cîmp" energia de polarizație și de magnetizație și fluxul de impuls asociat acestei energii. Ca urmare a acestei alegeri — care nu are nici un fel de implicație cît timp ne limităm la studiul transformărilor reversibile la materiale fără polarizație și magnetizație permanente —, cuadritensorul energie-impuls asociat cîmpului electromagnetic are componentele :

$$\begin{gathered} w^{\mathrm{M}} = \frac{\boldsymbol{DE} + \boldsymbol{BH}}{2}, \qquad \boldsymbol{S}^{\mathrm{M}} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}, \\ \boldsymbol{g}^{\mathrm{M}} = \boldsymbol{D} \times \boldsymbol{B}, \qquad \overline{\overline{\Theta}}^{\mathrm{M}} = -\boldsymbol{E}\,;\,\boldsymbol{D} - \boldsymbol{H}\,;\,\boldsymbol{B} + \overline{\overline{1}}\, w, \end{gathered} \tag{1.28}$$

adică coincide cu *cuadritensorul lui Minkowski*. În particular, pentru densitatea de forță asociată, din (74) cu (124) se obține în referențialul propriu expresia :

$$f = \rho^0 E^0 + J^0 \times B^0 - \frac{E^{02}}{2} \operatorname{grad} \varepsilon - \frac{H^{02}}{2} \operatorname{grad} \mu, \tag{129}$$

iar din (126), pentru densitatea de putere, se obține expresia :

$$p^0 = E^0 J^0 + \frac{E^{02}}{2} \frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t} + \frac{H^{02}}{2} \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}t}. \tag{130}$$

Exemplul precedent al fluidului perfect ilustrează consistența teoriei dezvoltate în această lucrare cu rezultatele cunoscute din teoria cîmpului electromagnetic în medii liniare. Calculele pot fi efectuate fără dificultăți pentru un material oarecare, anizotrop și chiar neliniar, dar cu polarizație și magnetizație reversibile, și conduce la următoarele *concluzii* :

6.1. Studiul termodinamic al corpului sub acțiunea cîmpului electromagnetic permite ca, în cazul transformărilor reversibile, să se stabilească existența legilor de material ale polarizațiilor electrică și magnetică ca legi de stare.

6.2. Cuadritensorul energie-impuls $\mathcal{T}^{\mathrm{K}}$ al corpului în prezența cîmpului electromagnetic cuprinde și termeni aditivi electromagnetici, funcții de $\boldsymbol{P}$ și $\boldsymbol{M}$ și, în particular, tensiuni (presiuni) electromagnetice și densitate de energie electromagnetică (asociată proceselor de polarizare și magnetizare a materialului). Pentru stările asociate unor transformări reversibile ale unor medii fără polarizație și magnetizație permanente, termenii electromagnetici ai acestui cuadritensor pot fi atribuiți în mod convențional cîmpului, fără să fie afectată starea termomecanică a mediului. Totodată cuadritensorul $\mathcal{T}^{\mathrm{K}}$ cuprinde și termeni micști (cum sînt presiunile de electrostricțiune și magnetostricțiune) care nu pot fi atribuiți cîmpului.

6.3. În medii cu polarizare și magnetizare reversibilă și liniară, termenii electromagnetici ai cuadritensorului $\mathcal{T}^{\mathrm{K}}$ pot fi atribuiți cîmpului prin alegerea convenabilă a funcției nedeterminate $\varphi(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{M})$ din expresia acestuia. Această alegere — valabilă numai pentru aceste medii și pentru stări de echilibru — conduce la un *cuadritensor electromagnetic echivalent* (al cîmpului și al componentelor electromagnetice ale corpului) identic cu cuadritensorul lui Minkowski.

Tema acestei lucrări a fost propusă de acad. prof. Remus Răduleț, căruia — pentru îndrumările rodnice primite — autorul îi exprimă recunoștința sa.

Primit la redacție la 10 iunie 1964

BIBLIOGRAFIE

1. M. von Laue, *Die Relativitätstheorie*. I. Band, Fr. Viewig und Sohn, Braunschweig, 1921,
2. — *Zur Minkowskischen Elektrodynamik der bewegten körper*. Zeitschrift f. Physik. **128**, 3 (1950).

3. A. Sommerfeld, F. Popp, *Zur Problem der Maxwell'schen Spannungen.* Ann. d. Physik, 6. Folge, **8**, *1—2* (1950).
4. R. Gans, *Zum Problem der Maxwell'schen Spannungen.* Ann. d. Physik, 6. Folge **9**, *6—7* (1951).
5. F. Beck, *Die Allgemeingültigkeit des Trägheitsgesetzes der Energie in der Planck'schen Fassung.* Zeitschrift f. Physik, **134** (1953).
6. H. Ott, *Zum Energie-Impuls Tensor der Maxwell'schen-Minkowskischen Elektrodynamik.* Ann. d. Physik, 6. Folge, **11**, *1* (1952).
7. G. Marx, G. Györgyi, *Über den Energie-Impuls Tensor des Elektromagnetischen Feldes in Dielectrika.* Ann. d. Physik, 6. Folge, **16**, *5—8* (1955).
8. D. Ivanenko, A. Sokolov, *Teoria clasică a cîmpului.* Edit. tehnică, București, 1955.
9. A. Timotin, *Proprietățile dinamice ale cîmpului electromagnetic macroscopic în medii oarecare.* Tipografia Învățămîntului, București, 1958.
10. A. Timotin, *Asupra definirii densității de volum a forței.* Bul. Institutului politehnic din București, **20**, *3* (1958).

TENSIUNI ELECTROMOTOARE INDUSE PRIN MIŞCARE ŞI FORŢE ELECTRODINAMICE ÎN CAZUL CONDUCTOARELOR ECRANATE MAGNETIC[1])

DE

ANDREI ŢUGULEA şi CEZAR FLUERAŞU

Institutul politehnic, Cal. Griviţei, nr. 132, Bucureşti

538.522.22 :621.3.013.70

În lucrare se arată că utilizarea formulelor cunoscute ale tensiunii electromotoare :

$$u_e = B\,l\,v$$

şi ale forţei electrodinamice :

$$F = B\,I\,l$$

poate fi extinsă şi în cazul unor conductoare filiforme ecranate magnetic total sau parţial şi situate în cîmp magnetic iniţial uniform.

Sînt indicate limite de aplicabilitate ale acestor formule, precum şi consecinţele pe care le implică în studiul maşinilor electrice. Un exemplu de calcul detaliat este prezentat în anexă.

1. INTRODUCERE

Dintre problemele care fac obiectul unei teorii electromagnetice a maşinilor electrice, sînt foarte importante determinarea tensiunii electromotoare induse în conductoare şi a acţiunilor ponderomotoare, respectiv a forţelor şi cuplurilor ce se exercită în maşină. Aceasta cu atît mai mult, cu cît majoritatea lucrărilor din acest domeniu indică rezultate verificate în practică, fără a le da însă întotdeauna o justificare teoretică riguroasă.

[1]) Articol apărut şi în „Rev. Roum. Sci. Techn.—Electrotehn. Energ.", **9**, *4* (1964).

St. cerc. energ. electr. Tom 14 Nr. 4 p. 773—791 Bucureşti 1964

În acest sens, pentru calculul tensiunii electromotoare induse unii autori [1] indică relația:

$$u_e = Blv, \tag{1}$$

determinată înlocuind mașina reală cu una cu indusul neted și cu conductoarele plasate la periferia acestuia, B fiind inducția magnetică din întrefier, iar v viteza cu care se mișcă conductorul.

Alți autori [2] utilizează în același scop relația:

$$u_e = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}, \tag{2}$$

obținînd aceleași rezultate.

Dacă cea de-a doua relație reprezintă chiar forma integrală a legii inducției electromagnetice, deci e normal să conducă la rezultatul corect, nu este tot atît de evident că relația (1) este valabilă, din următoarele considerații:

— din forma integrală dezvoltată a legii inducției electromagnetice [3],

$$u_e = -\int_{s_\Gamma} \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\,\mathrm{d}\boldsymbol{S} - \oint_\Gamma (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{v})\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}, \tag{3}$$

termenul Blv reprezintă tensiunea electromotoare de mișcare. În cazul mașinilor electrice apare însă și tensiune electromotoare indusă prin transformare, chiar dacă cîmpul magnetic inductor nu variază în timp, deoarece inducția magnetică într-un punct imobil față de inductor variază în timp ca urmare a mișcării indusului. În plus, în calculul tensiunii electromotoare de mișcare se operează cu valoarea inducției magnetice din locul în care se află conductorul, care, în cazul cînd acesta e situat în crestătura unei mașini electrice, e mult mai mică decît valoarea inducției magnetice medii din întrefier, deci numai o mică parte din tensiunea electromotoare se induce efectiv prin mișcare. Prin urmare, e necesar să se justifice riguros valabilitatea relației (1) și să se indice totodată limitele sale de aplicabilitate, cu atît mai mult, cu cît unii autori [4] încearcă explicații pur mecaniciste ale acestui fenomen, afirmînd că, deși în crestătură liniile de cîmp magnetic sînt mai rare, viteza cu care ele intersectează conductorul e mai mare, încît rezultatul final e cel cunoscut.

În privința forței exercitate asupra unui conductor dintr-o mașină electrică, se indică relația:

$$F = BIl, \tag{4}$$

dedusă în aceleași condiții ca și (1), I fiind intensitatea curentului electric ce străbate conductorul. În realitate, în orice mașină conductoarele sînt așezate în crestături, în care, după cum am subliniat și mai sus, inducția magnetică are valori mai mici decît cea din întrefier, încît forța exercitată asupra conductorului are o valoare mai mică decît cea indicată de (4). Totuși, și în acest caz, așa cum a atras atenția acad. R. Răduleț se obține

rezultatul corect, dacă se consideră că F reprezintă rezultanta forțelor exercitate asupra conductorului și miezului magnetic al indusului.

Calculul, cu anumite ipoteze simplificatoare (crestături dreptunghiulare, miez de fier cu permeabilitate infinită), efectuat în [5], conduce într-adevăr la relația (4). Este însă important de demonstrat același fapt pentru forme arbitrare de crestături, cum și în alte cazuri care prezintă interes practic. În plus, determinarea modului în care se repartizează forța rezultantă asupra conductoarelor și asupra dinților indusului este necesară în calculele de proiectare, în special pentru mașinile electrice de mare putere.

În cele ce urmează, ne propunem să discutăm aceste două probleme într-un caz mai general, să ajungem la relațiile (1) și (4), indicînd pentru fiecare în parte limitele de aplicabilitate.

2. TENSIUNEA ELECTROMOTOARE INDUSĂ PRIN MIȘCARE ÎN CONDUCTOARELE ECRANATE MAGNETIC

2.1. TENSIUNEA ELECTROMOTOARE INDUSĂ ÎNTR-UN CONDUCTOR SITUAT ÎN INTERIORUL UNUI ECRAN CILINDRIC CU CARE SE DEPLASEAZĂ ÎN CÎMP MAGNETIC UNIFORM

Se consideră un conductor rectiliniu filiform, conținut în interiorul unui ecran magnetic cilindric de secțiune oarecare, împreună cu care efectuează o mișcare de translație într-un cîmp magnetic inițial uniform $\boldsymbol{B}_0$, într-o direcție perpendiculară pe liniile de cîmp ale acestuia.

Problema consistă în a determina tensiunea electromotoare ce se induce în conturul din care face parte conductorul.

În această situație, cîmpul magnetic rezultant va fi plan paralel:

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}(x, y) = \boldsymbol{i}B_x + \boldsymbol{j}B_y;$$
$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}(x, y) = \boldsymbol{k}A_z. \qquad (5)$$

Se poate considera:

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_0 + \boldsymbol{B}',$$
$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_0 + \boldsymbol{A}', \qquad (6)$$
$$\text{în care } A_0 = -B_0 x,$$

unde mărimile notate cu (′) le vom numi inducție magnetică, respectiv potențial magnetic vector de reacție, definite ca diferența dintre mărimea respectivă rezultantă și cea corespunzătoare cîmpului magnetic uniform[2]).

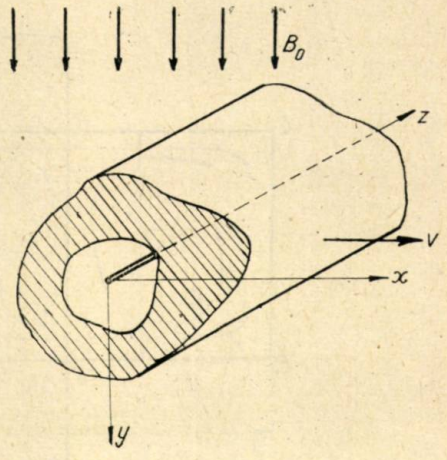


Fig. 1. — Conductor filiform situat într-un ecran magnetic aflat în translație transversală într-un cîmp magnetic inițial uniform de inducție B_0.

[2]) Această descompunere nu implică nici o considerație asupra liniarității mediului.

Se poate demonstra (vezi anexa) că inducția magnetică $\boldsymbol{B}'$ și potențialul magnetic vector $\boldsymbol{A}'$ scad suficient de repede la distanță mare de ecran, cu condiția ca acesta să aibă o secțiune transversală și o magnetizație finite.

Vom calcula tensiunea electromotoare indusă în conturul (r) (vezi fig. 2). Pentru a nu opera cu funcții discontinue, considerăm trei domenii în care inducția magnetică și potențialul magnetic vector sînt continue

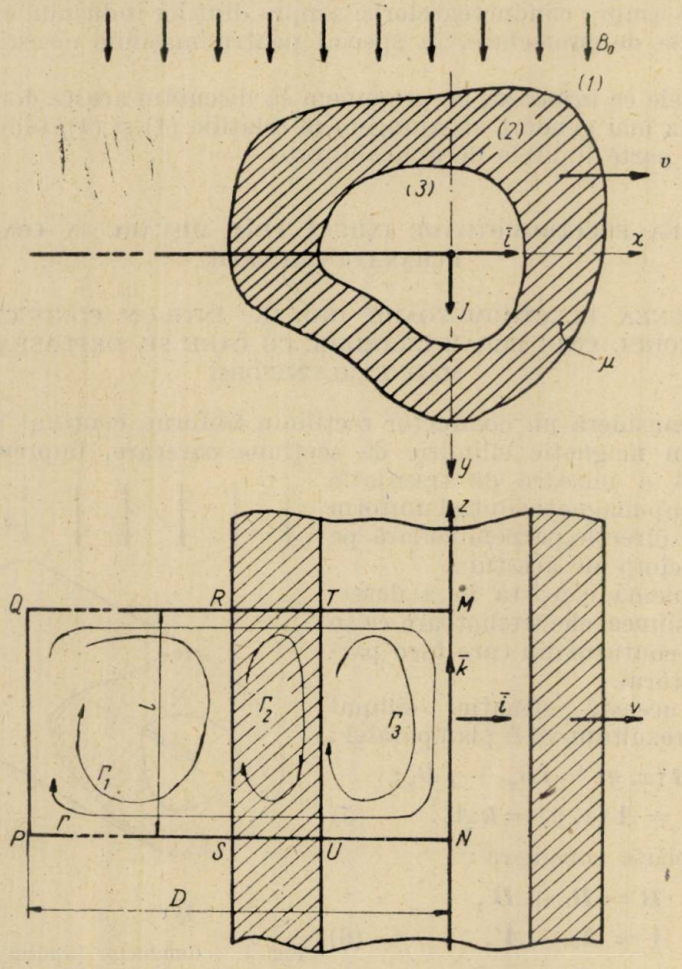


Fig. 2. — Alegerea axelor de coordonate și a curbelor de integrare pentru calculul tensiunii electromotoare în cazul din figura 1.

și vor fi notate cu $\boldsymbol{B}_1$, $\boldsymbol{B}_2$, $\boldsymbol{B}_3$, respectiv $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, $\boldsymbol{A}_3$. La trecerea prin suprafețele de discontinuitate se conservă componenta normală a inducției magnetice sau, ceea ce e echivalent, componenta tangențială a potențialului magnetic vector.

Tensiunea electromotoare indusă va fi dată de relația (3), în care curbele și suprafețele de integrare sînt considerate instantaneu imobile.

Tensiunea electromotoare de transformare va fi :

$$u_{et} = -\int_{S_\Gamma} \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\,\mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_{S_\Gamma} \boldsymbol{B}\,\mathrm{d}\boldsymbol{S} =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial t}\left[\int_{S_{\Gamma_1}} \boldsymbol{B}_1\,\mathrm{d}\boldsymbol{S} + \int_{S_{\Gamma_2}} \boldsymbol{B}_2\,\mathrm{d}\boldsymbol{S} + \int_{S_{\Gamma_3}} \boldsymbol{B}_3\,\mathrm{d}\boldsymbol{S}\right] =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial t}\left[\oint_{\Gamma_1} \boldsymbol{A}_1\,\mathrm{d}\boldsymbol{r} + \oint_{\Gamma_2} \boldsymbol{A}_2\,\mathrm{d}\boldsymbol{r} + \oint_{\Gamma_3} \boldsymbol{A}_3\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}\right] =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial t}\left[\int_P^Q \boldsymbol{A}_1\,\mathrm{d}\boldsymbol{r} + \int_M^N \boldsymbol{A}_3\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}\right] = -l\frac{\partial}{\partial t}\left[A_1|_P - A_3|_M\right],$$

în care s-a ținut seama de conservarea componentei tangențiale a potențialului magnetic vector la trecerea prin suprafețele de discontinuitate.

Dar, ținînd seama de (6) și de faptul că

$$\lim_{|x|\to\infty} A_1' = 0,$$

se obține :

$$u_{et} = -l\frac{\partial}{\partial t}\left[-B_0 D - A_3'|_M\right] = l\left.\frac{\partial A_3'}{\partial t}\right|_M =$$

$$= -lv_x\left.\frac{\partial A_3'}{\partial x}\right|_M = lv_x B_y'|_M, \tag{7}$$

în care $B_y'|_M$ reprezintă componenta după direcția axei Oy a inducției magnetice a cîmpului de reacție în punctul prin care trece conductorul [3]).

Tensiunea electromotoare de mișcare va fi :

$$u_{em} = -\oint_\Gamma (\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{v})\,d\boldsymbol{r} = -\int_M^N (\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}\boldsymbol{r} =$$

$$= -\int_M^N (\boldsymbol{B}_0\times\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}\boldsymbol{r} - \int_M^N (\boldsymbol{B}'\times\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}\boldsymbol{r} = -B_0 lv_x - B_y'|_M lv_x =$$

$$= -(B_0 + B_y')\,lv_x. \tag{8}$$

---

[3]) Avînd în vedere că cîmpul exterior e uniform, derivata substanțială a potențialului vector e nulă, deoarece într-un sistem de referință legat de conductor cîmpul e static, și deci din :

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}'}{\mathrm{d}t} = 0 = \frac{\partial \boldsymbol{A}'}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\nabla)\,\boldsymbol{A}' \qquad \text{rezultă relația}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{A}'}{\partial t} = -(\boldsymbol{v}\nabla)\,\boldsymbol{A}' = -\frac{\partial \boldsymbol{A}'}{\partial x}\cdot v_x$$

utilizată în (7).

Se observă că tensiunea electromotoare de mișcare e produsă de către cîmpul magnetic rezultant din locul în care e așezat conductorul. Tensiunea electromotoare rezultantă va fi :

$$u_{er} = u_{et} + u_{em} = lv_x B'_y|_M - (B_0 + B'_y|_M)\, lv_x = -B_0 lv_x = -B_0\, lv, \quad (9)$$

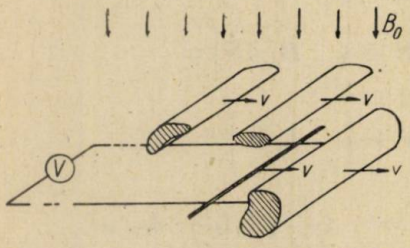


Fig. 3. — Conductor filiform rectiliniu situat în vecinătatea unor corpuri cilindrice din materiale oarecare, cu care se mișcă simultan într-un cîmp magnetic inițial uniform.

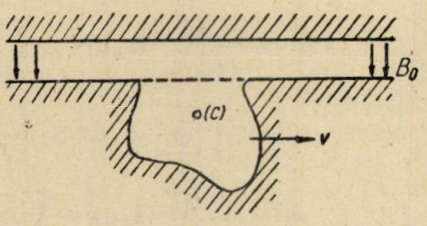


Fig. 4. — Conductor rectiliniu infinit, situat în crestătura indusului unei mașini electrice.

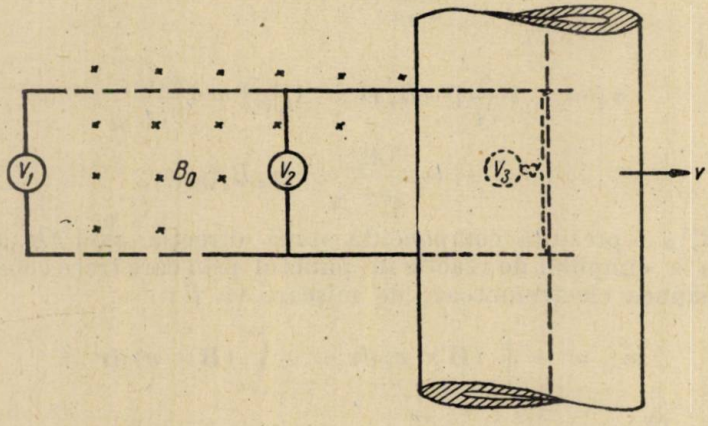


Fig. 5. — Diferite conectări ale unor voltmetre imobile pentru măsurarea tensiunii electromotoare induse.

adică chiar cea care s-ar obține în absența ecranului, semnul minus rezultînd din convenția de asociere a sensurilor de referință adoptată.

Din analiza rezultatelor obținute rezultă următoarele consecințe :

a) Se poate demonstra în mod similar că se va obține același rezultat în cazul cînd se calculează tensiunea electromotoare indusă într-un conductor situat în vecinătatea unui număr oarecare de corpuri cilindrice magnetizabile de secțiune oarecare și paralele cu el, întreg sistemul efectuînd o mișcare de translație într-un cîmp magnetic exterior uniform (vezi fig. 3).

b) Cazul idealizat rezolvat permite calculul tensiunii electromotoare induse în conductorul din crestătura unei mașini electrice. Pentru aceasta vom considera o mașină idealizată cu cîmpul magnetic uniform B_0, creat de către inductorul și indusul mașinii presupuse netede, peste care se suprapune cîmpul magnetic B' de reacție a crestăturii, situîndu-ne astfel în condițiile problemei rezolvate mai sus (fig. 4). Rezultatul obținut este cel cunoscut, însă justificat teoretic de data aceasta pentru crestături de orice formă [4]).

c) După cum rezultă din relația (7), în cazul cînd se va măsura tensiunea electromotoare cu voltmetre imobile, conectate în diferite puncte, ca în figura 5, indicațiile acestora vor fi diferite.

Astfel, voltmetrul V_3 va indica tensiunea electromotoare de mișcare, V_1 va indica tensiunea electromotoare B_0lv, iar V_2 o valoare diferită de acestea.

Acest rezultat, curios la prima vedere, e normal, deoarece, cîmpul electric nefiind potențial în acest caz, integrala de linie depinde de drum.

d) Același rezultat se va obține și în cazul cînd ecranul e străbătut în sens axial de un curent electric continuu (în acest caz comportarea lui B' la distanță foarte mare de ecran va fi aproximativ ca $\frac{1}{r}$, ceea ce e însă suficient, după cum rezultă din relația (7)).

Se poate demonstra de asemenea că se obține același rezultat și în cazul cînd firul conductor e parcurs de un curent electric continuu, această afirmație nefiind o consecință a celei precedente, deoarece în acest caz inducția magnetică ia valori infinite în locul în care e așezat conductorul.

2.2. TENSIUNEA ELECTROMOTOARE INDUSĂ ÎN CAZUL GENERAL AL UNEI SPIRE ECRANATE

Se consideră un corp solid magnetizabil neconductor de formă toroidală neregulată oarecare (C), care se mișcă arbitrar într-un cîmp magnetic exterior constant, însă neuniform, $\boldsymbol{B}_e$. Vom calcula tensiunea electromotoare ce se va induce în lungul unei curbe oarecare (r) (o spiră) cuprinsă în acest corp. S-a considerat un corp neconductor pentru a nu permite apariția unor curenți turbionari, care ar complica problema (fig. 6).

Ca și mai sus:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{B} &= \boldsymbol{B}_e + \boldsymbol{B}', \\ \boldsymbol{A} &= \boldsymbol{A}_e + \boldsymbol{A}'. \end{aligned} \tag{10}$$

[4]) Valabilitatea relației și pentru mașinile reale, în care nu se poate vorbi de un cîmp uniform la infinit, rămîne de demonstrat.

Tensiunea electromotoare de transformare va fi :

$$u_{et} = -\int_{S_\Gamma} \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_{S_\Gamma} \boldsymbol{B}\,\mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\frac{\partial}{\partial t}\left[\int_{S_\Gamma} \boldsymbol{B}_e \mathrm{d}\boldsymbol{S} + \int_{S_\Gamma} \boldsymbol{B}'\,\mathrm{d}\boldsymbol{S}\right] =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial t}\int_{S_\Gamma} \boldsymbol{B}'\,\mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\frac{\partial}{\partial t}\left[\int_{S_{\Gamma'}} \boldsymbol{B}'_1\,\mathrm{d}\boldsymbol{S} + \int_{S_{\Gamma\Gamma'}} \boldsymbol{B}'_2\,\mathrm{d}\boldsymbol{S}\right] =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial t}\left[\oint_{\Gamma'} \boldsymbol{A}'_1\,\mathrm{d}\boldsymbol{r} + \oint_{\Gamma} \boldsymbol{A}'_2\,\mathrm{d}\boldsymbol{r} - \oint_{\Gamma'} \boldsymbol{A}'_2\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}\right] =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial t}\oint_{\Gamma} \boldsymbol{A}'_2\,\mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\oint_{\Gamma} \frac{\partial \boldsymbol{A}'}{\partial t}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}, \tag{11}$$

unde s-a ținut seama de conservarea componentei tangențiale a potențialului vector la trecerea prin suprafețele de discontinuitate.

Tensiunea electromotoare de mișcare va fi :

$$u_{em} = -\oint_{\Gamma} (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{v})\,\mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\oint_{\Gamma} (\boldsymbol{B}_e \times \boldsymbol{v})\,\mathrm{d}\boldsymbol{r} - \oint_{\Gamma} (\boldsymbol{B}' \times \boldsymbol{v})\,\mathrm{d}\boldsymbol{r} =$$

$$= u_{e0} - \oint_{\Gamma} [(\nabla \times \boldsymbol{A}') \times \boldsymbol{v}]\,\mathrm{d}\boldsymbol{r} = u_{e0} - \oint_{\Gamma} [(\boldsymbol{v}\nabla)\boldsymbol{A}' - \nabla(\overset{\downarrow}{\boldsymbol{A}'}\boldsymbol{v})]\,\mathrm{d}\boldsymbol{r} =$$

$$= u_{e0} - \oint_{\Gamma} (\boldsymbol{v}\nabla)\boldsymbol{A}'\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}, \tag{12}$$

unde

$$u_{e0} = -\oint_{\Gamma} (\boldsymbol{B}_e \times \boldsymbol{v})\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

este tensiunea electromotoare care s-ar induce în lungul curbei (r) în absența corpului (C).

Tensiunea electromotoare indusă va fi deci :

$$u_{e\Gamma} = u_{et} + u_{em} = -\oint_{\Gamma} \frac{\partial \boldsymbol{A}'}{\partial t}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r} + u_{e0} - \oint_{\Gamma} (\boldsymbol{v}\nabla)\boldsymbol{A}'\,\mathrm{d}\boldsymbol{r} =$$

$$= u_{ec} - \oint_{\Gamma} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}'}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}, \tag{13}$$

unde $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}'}{\mathrm{d}t}$ reprezintă derivata substanțială a cîmpului $\boldsymbol{A}'$, adică derivata calculată într-un punct în mișcare o dată cu corpul.

Relația (13) arată deci că în cazul general nu se mai poate calcula tensiunea electromotoare indusă în spiră făcînd abstracție de prezența ecranului.

Din tratarea acestor două exemple rezultă că aplicarea relației (1) este permisă numai în cazuri particulare, printre care și cazul analizat la 2.1, care prezintă importanță la studiul mașinilor electrice. În anexă este ilustrat un alt exemplu de acest fel, pentru un conductor filiform situat în interiorul unui ecran cilindric circular.

3. FORȚELE EXERCITATE ASUPRA UNOR CONDUCTOARE ECRANATE MAGNETIC

Se consideră un conductor rectiliniu infinit lung, situat în interiorul unui ecran magnetic cilindric de secțiune oarecare, introduse într-un cîmp magnetic exterior uniform. Conductorul este parcurs de curentul continuu I.

Problema consistă în a calcula forța rezultantă — pe o lungime oarecare l —, precum și repartiția ei între ecran și conductor.

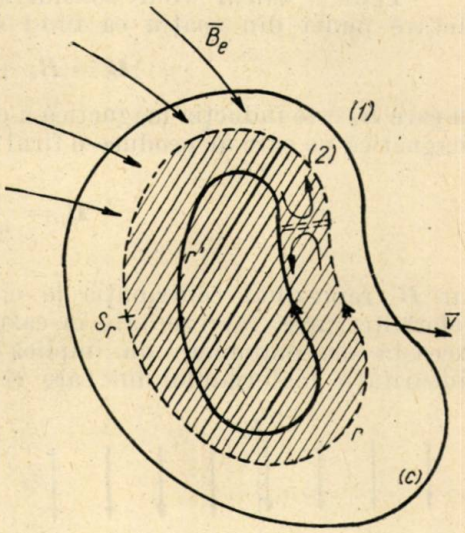


Fig. 6. — Spiră situată într-un ecran magnetic de formă oarecare, avînd o mișcare arbitrară într-un cîmp magnetic oarecare.

Calculul forței se va face utilizînd tensorul tensiunilor maxwelliene.

Pentru aceasta vom considera o lungime oarecare l a sistemului ecran-conductor, mărginită de două plane transversale. Deoarece contribuțiile tensiunilor maxwelliene pe secțiunile interceptate de aceste plane se anulează reciproc, forța rezultantă se va obține efectuînd integrarea tensiunilor maxwelliene numai pe suprafețele laterale. Aceste suprafețe trebuie să conțină în interior numai sistemul asupra căruia se calculează forța, în rest putînd fi arbitrare. În particular, una din ele poate coincide cu suprafața laterală exterioară a ecranului.

Pentru problema noastră este comod să se aleagă o suprafață cilindrică circulară, de rază arbitrară, cu centrul în punctul în care se află urma conductorului. Forța rezultantă asupra sistemului ecran-conductor va fi :

$$\boldsymbol{F} = \int_{\Sigma} \bar{\bar{T}} \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_{\Sigma} \boldsymbol{T}_n \, \mathrm{d}S, \tag{14}$$

unde $\overline{\overline{T}}$ este tensorul tensiunilor maxwelliene magnetice, iar $\boldsymbol{T}_n$ tensiunea asociată de către acesta normalei exterioare la suprafață $\boldsymbol{n}$ [3]:

$$\boldsymbol{T}_n = \frac{1}{\mu}\left[\boldsymbol{B}(\boldsymbol{Bn}) - \frac{1}{2}\,\boldsymbol{n}B^2\right]. \tag{15}$$

Pentru calcul vom considera inducția magnetică rezultantă în fiecare punct din spațiu ca fiind suma a trei componente:

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_0 + \boldsymbol{B}' + \boldsymbol{B}_f, \tag{16}$$

în care $\boldsymbol{B}_0$ este inducția magnetică a cîmpului exterior omogen, $\boldsymbol{B}_f$ inducția magnetică pe care ar produce-o firul în vid, în ipoteza că ar exista singur:

$$\boldsymbol{B}_f = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}u_\vartheta\,. \tag{17}$$

iar $\boldsymbol{B}'$ reprezintă contribuția la cîmpul magnetic rezultant al tuturor celorlalte surse, reprezentate în cazul de față de magnetizația ecranului. Această descompunere nu implică nici un fel de considerații asupra linearității materialului din care e făcut ecranul.

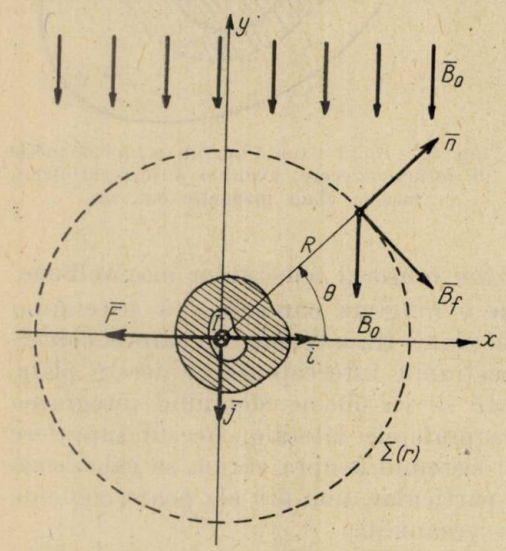


Fig. 7. — Alegerea suprafeței pentru calculul forței rezultante asupra unui sistem ecran-conductor situat în cîmp magnetic inițial uniform.

Mai observăm că la distanță mare de fir $\boldsymbol{B}'$ este un infinit mic de ordin superior în raport cu $\boldsymbol{B}_f$ (vezi anexa); de aceea, la distanță suficient de mare se poate considera întotdeauna:

$$\boldsymbol{B} \approx \boldsymbol{B}_0 + \boldsymbol{B}_f. \tag{18}$$

Considerînd că suprafața Σ are o rază R suficient de mare încît să fie valabilă relația (18) și introducînd această relație în expresia tensiunii $\boldsymbol{T}_n$, rezultă:

$$\boldsymbol{T}_n = \frac{1}{\mu_0}\Big[-\boldsymbol{B}B_0\sin\theta - \frac{1}{2}(B_0^2 + B_f^2 + 2B_0B_f\cos\theta)\,\boldsymbol{n}\Big], \tag{19}$$

unde θ este unghiul format între raza vectoare și axa Ox.

Componenta forței după direcția axei Oy va fi:

$$F_y = \int_\Sigma (\boldsymbol{T}_n\boldsymbol{j})\,\mathrm{d}S = l\oint_\Gamma (\boldsymbol{T}_n\boldsymbol{j})\,R\mathrm{d}\theta = 0, \tag{20}$$

iar componenta după direcția axei Ox :

$$F_x = \int_{\Sigma} (\boldsymbol{T}_n \boldsymbol{i})\, \mathrm{d}S = l \oint_{\Gamma} (\boldsymbol{T}_n \boldsymbol{i})\, R\, \mathrm{d}\theta = - B_0 l I. \tag{21}$$

Forța rezultantă va avea deci componentă numai după direcția axei Ox și va avea valoarea :

$$F = B_0 l I \tag{22}$$

sau, vectorial :

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{I l} \times \boldsymbol{B}_0, \tag{23}$$

unde

$$\boldsymbol{l} = \boldsymbol{k} l.$$

Observăm că această valoare a forței coincide cu aceea care s-ar obține în absența ecranului.

Pe de altă parte, prezintă interes determinarea repartiției acestei forțe între ecran și conductor.

Forța exercitată asupra firului va fi în acord cu formula lui Laplace :

$$\boldsymbol{F}_f = \boldsymbol{I l} \times (\boldsymbol{B}_0 + \boldsymbol{B}'), \tag{24}$$

unde s-a ținut seama că contribuția cîmpului propriu al firului la forță este nulă, iar $\boldsymbol{B}_0 + \boldsymbol{B}'$ reprezintă cîmpul exterior rezultant în punctele în care se află conductorul.

Forța asupra ecranului se poate calcula fie efectuînd diferența dintre forța totală și forța asupra firului, fie direct cu ajutorul tensiunilor maxwelliene, și rezultă :

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{ecr}} = \boldsymbol{F} - \boldsymbol{F}_f = \boldsymbol{I l} \times \boldsymbol{B}_0 - \boldsymbol{I l} \times (\boldsymbol{B}_0 + \boldsymbol{B}') = - \boldsymbol{I l} \times \boldsymbol{B}', \tag{25}$$

unde $\boldsymbol{B}'$ este calculat în punctul în care se află conductorul. Se poate formula deci următoarea teoremă :

Forța exercitată de către cîmpul magnetic asupra unui ecran cilindric situat într-un cîmp inițial uniform de inducție magnetică $\boldsymbol{B}_0$, în interiorul căruia se află un conductor rectiliniu parcurs de curentul I, este egală și de sens contrar cu forța ce s-ar exercita asupra acestui conductor parcurs de același curent în ipoteza că cîmpul exterior ar lipsi, dar starea de magnetizație a ecranului ar rămîne neschimbată.

Rezultatul obținut nu poate fi aplicat imediat în cazul mașinilor electrice, deoarece într-o reprezentare idealizată armăturile se întind pînă la infinit.

Demonstrația în această situație e următoarea :

Se consideră cîmpul magnetic rezultant $\boldsymbol{B}$, descompus după relația (16), în care $\boldsymbol{B}_0$ reprezintă inducția magnetică a cîmpului inductor (produsă de către înfășurarea de excitație a mașinii), în ipoteza că armăturile ar fi netede, $\boldsymbol{B}_f$ este inducția magnetică produsă de către curentul ce trece prin conductor, în prezența inductorului și indusului netede, iar $\boldsymbol{B}'$ un termen suplimentar, datorit prezenței crestăturii. În aceste

condiții, întrucît secțiunea crestăturii ocupă un domeniu mărginit, cîmpul B' scade la distanță foarte mare de crestătură ca $\frac{1}{r^2}$, așadar se va putea neglija în raport cu B_0 și B_f.

Forța rezultantă asupra indusului trebuie calculată integrînd tensiunile maxwelliene pe o suprafață $\sum_1$, care să-l cuprindă numai pe acesta, deci care se va închide prin întrefierul mașinii (fig. 8). În cazul general, acest calcul nu poate fi însă efectuat, deoarece pe porțiunea cuprinsă în întrefier a suprafeței $\sum_1$ cîmpul B' nu este peste tot neglijabil. Se observă însă următorul fapt: forța rezultantă asupra unei suprafețe $\sum_2$ care cuprinde inductorul pînă la o distanță arbitrar de mare nu are componente decît după direcția Oy. Aceasta se poate demonstra observînd că densitatea de volum a forței, dată de relația [3]:

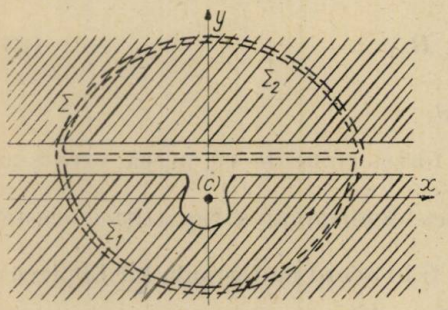


Fig. 8. — Alegerea suprafețelor pentru calculul forței rezultante asupra sistemului conductor-armătură dintr-o mașină electrică.

$$f_v = \boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B} - \frac{H^2}{2} \operatorname{grad} \mu, \quad (26)$$

are în inductor, unde nu există densitate de curent, numai componenta după direcția lui grad μ. Dacă se presupune că armăturile mașinii sînt confecționate dintr-un material omogen, izotrop și liniar, permeabilitatea magnetică va fi constantă în interiorul armăturii și va varia numai la trecerea din miezul inductorului spre întrefier, deci grad μ va fi orientat după axa Oy, încît:

$$F_{x(\Sigma_2)} = 0.$$

Vom considera o suprafață $\sum$ care înconjoară suprafețele $\sum_1$ și $\sum_2$. Componenta după direcția Ox a forței asupra acestei suprafețe va fi:

$$F_{x(\Sigma)} = F_{x(\Sigma_1)} + F_{x(\Sigma_2)} = F_{x(\Sigma_1)},$$

adică chiar forța care ne interesează.

În această situație, întrucît suprafața $\sum$ poate fi aleasă la distanță arbitrar de mare de crestătură, se va putea neglija cîmpul magnetic $\boldsymbol{B}'$ al acesteia din urmă, încît va fi valabilă relația (18). Pentru a ușura calculul, se vor integra tensiunile maxwelliene pe o suprafață $\sum$ cilindrică generată de o linie de cîmp a lui B_f, a cărei formă nu se cunoaște, dar care e simetrică față de axa Oy (fig. 9).

Expresia tensiunii maxwelliene va fi, în acest caz:

$$\boldsymbol{T}_n = \frac{1}{\mu}\left\{(\boldsymbol{B}_0 + \boldsymbol{B}_f)\,[(\boldsymbol{B}_0 + \boldsymbol{B}_f)\,\boldsymbol{n}] - \frac{1}{2}\boldsymbol{n}\,(B_0^2 + B_f^2 + 2B_0 B_f \cos\alpha)\right\} =$$

$$= \frac{1}{\mu}\left[-(\boldsymbol{B}_0 + \boldsymbol{B}_f)\,B_0 \sin\alpha - \frac{1}{2}\boldsymbol{n}\,(B_0^2 + B_f^2 + 2B_0 B_f \cos\alpha)\right]. \quad (27)$$

Componenta după direcția Ox a tensiunii va fi :

$$T_{nx} = \frac{1}{\mu}\left[B_0 B_f \sin^2\alpha - \frac{1}{2}(B_0^2 + B_f^2 + 2B_0 B_f \cos\alpha)(-\cos\alpha)\right], \quad (27\,a)$$

iar componenta corespunzătoare a forței se obține prin integrarea pe suprafața laterală :

$$F_x = l \oint_{\Gamma(\Sigma)} T_{nx}\, ds,$$

unde l reprezintă lungimea porțiunii considerate, $\Gamma(\Sigma)$ este intersecția suprafeței Σ cu un plan transversal, iar ds elementul de arc corespunzător. Înlocuind expresia lui T_{nx}, se obține :

$$F_x = l \oint_{\Gamma(\Sigma)} \frac{1}{\mu}\left[B_0 B_f \sin^2\alpha + B_0 B_f \cos^2\alpha + \frac{1}{2}(B_0^2 + B_f^2)\cos\alpha\right] ds =$$

$$= l\left[\oint_{\Gamma(\Sigma)} \frac{1}{\mu} B_0 B_f\, ds + \oint_{\Gamma(\Sigma)} \frac{1}{2\mu}(B_0^2 + B_f^2)\cos\alpha \cdot ds\right]. \quad (28)$$

Însă, după cum am arătat mai sus, curba $\Gamma(\Sigma)$ e simetrică în raport cu axa Oy, iar valorile inducției magnetice B_f în două puncte simetrice față de aceasta sînt egale, de aceea a doua integrală din relația (28) e nulă, încît rămîne :

$$F_x = l \oint_{\Gamma(\Sigma)} \frac{1}{\mu} B_0 B_f\, ds =$$

$$= B_0 l \oint_{\Gamma(\Sigma)} \frac{B_f}{\mu} ds =$$

$$= B_0 l \oint_{\Gamma(\Sigma)} H_f\, ds = B_0 l I, \quad (29)$$

unde s-a ținut seama de faptul că $\Gamma(\Sigma)$ este o linie de cîmp a lui B_f și s-a aplicat legea circuitului magnetic.

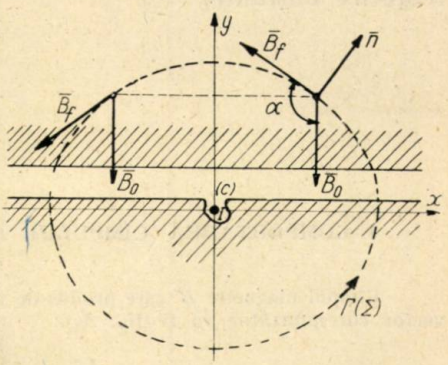


Fig. 9. — Ilustrarea calculului forței electrodinamice active în cazul unei mașini electrice.

S-a demonstrat în acest mod că, valoarea componentei active a forței asupra indusului unei mașini electrice e dată de relația cunoscută din literatura de specialitate, indiferent de forma crestăturii, în condițiile în care materialul din care sînt confecționate armăturile e omogen, izotrop și liniar.

În particular, relația (29) continuă să fie valabilă și în cazul în care armăturile sînt din material feromagnetic nesaturat.

4. CONCLUZII

Din studiul efectuat rezultă că în anumite situații, cum e aceea a cîmpului uniform, tensiunea electromotoare rezultantă și forța electrodinamică rezultantă în cazul unor conductoare ecranate magnetic se pot calcula cu ajutorul relațiilor simplificate :

$$u_e = B\,l\,v,$$

$$F = B\,I\,l.$$

Acest studiu arată clar că fenomenele în aceste cazuri sînt mult mai complicate și, deși utilizarea acestor relații pentru deducerea tensiunilor electromotoare și a cuplurilor în mașinile electrice pare comodă, ea este contraindicată din punct de vedere didactic, deoarece astfel sînt estompate fenomene esențiale.

De aceea, în prezentarea teoriei mașinilor electrice, ni se pare mai firesc să se calculeze tensiunea electromotoare utilizînd forma integrală nedezvoltată (2) a legii inducției electromagnetice, respectiv să se calculeze cuplul utilizînd teorema forțelor generalizate în cîmpul magnetic.

În ce privește repartiția forțelor, aceasta poate fi determinată pentru fiecare caz în parte cu ajutorul tensiunilor maxwelliene în situația în care se cunoaște efectiv cîmpul magnetic din mașină.

Exemplul de calcul prezentat în anexă (2) confirmă rezultatele teoretice obținute.

ANEXĂ

1. COMPORTAREA CÎMPULUI B' LA DISTANȚĂ MARE DE ECRAN

Cîmpul magnetic B' este produs de către magnetizația ecranului. Potențialul magnetic vector corespunzător va fi (fig. A_1) :

$$A'(r) = \frac{\mu_0}{2\pi}\left[\int_{S_\Gamma} J(r')\ln R\,dS + \oint_\Gamma J_s(r')\ln R\,dl\right], \qquad (I)$$

unde s-a ținut seama de faptul că cîmpul e planparalel, deci potențialul magnetic vector are componentă numai după axa z, la fel cu densitățile de volum și suprafață ale curenților amperieni J, respectiv J_s.

La distanță foarte mare de ecran, dezvoltînd $\ln R$ în serie și reținînd numai primii doi termeni :

$$\ln R = \ln r - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{r'}{r}\right)^n \cos n\varphi \approx \ln r - \frac{r'}{r}\cos\varphi, \qquad (II)$$

se obține :

$$A'(r) = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln r \left[\int_{S_\Gamma} J(r')\, dS + \oint_\Gamma J_s(r')\, dl \right] - \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{1}{r} \left[\int_{S_\Gamma} r' J(r') \cos\varphi\, dS + \right.$$

$$\left. + \oint_\Gamma r' J_s(r') \cos\varphi\, dl \right]. \qquad \text{(III)}$$

Prima paranteză din membrul drept al relației (III) e nulă. Într-adevăr, din relațiile de definiție ale densității curenților amperieni :

$$\boldsymbol{J} = \text{rot } \boldsymbol{M}, \qquad \boldsymbol{J}_s = \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{n},$$

rezultă :

$$\int_{S_\Gamma} \boldsymbol{J}\, dS + \oint_\Gamma \boldsymbol{J}_s\, dl = \oint_{S_\Gamma} \text{rot } \boldsymbol{M}\, d\boldsymbol{S} + \oint_\Gamma |\boldsymbol{M} \times \boldsymbol{n}|\, dl =$$

$$= \oint_\Gamma \boldsymbol{M}\, d\boldsymbol{l} - \oint_\Gamma M_t\, dl = \oint_\Gamma M_t\, dl - \oint_\Gamma M_t\, dl = 0,$$

unde s-a ținut seama de faptul că liniile de cîmp ale lui $\boldsymbol{M}$ sînt paralele cu planul xOy, rot $\boldsymbol{M}$ are numai componentă după Oz, iar vectorul-arie al suprafeței S_Γ este asociat cu sensul de parcurgere a curbei (Γ) după regula burghiului drept.

A doua paranteză din membrul drept al relației (III) are o valoare finită, cu condiția ca magnetizația mediului să fie finită, și o vom nota cu C. Rezultă :

$$A' \approx \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{C}{r} = \frac{K}{r},$$

deci la distanță mare de ecran potențialul magnetic vector variază ca $\frac{1}{r}$. De aici rezultă imediat că inducția magnetică B' se va comporta la distanță mare de ecran ca $\frac{1}{r^2}$, ceea ce era de demonstrat.

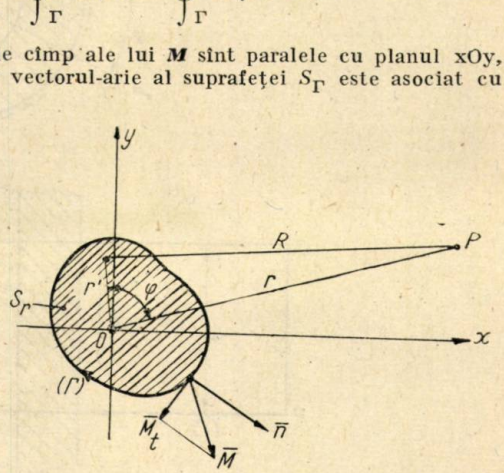


Fig. A_1. — Ilustrarea demonstrației din anexa 1.

2. EXEMPLU

Se consideră un ecran magnetic de forma unui cilindru circular, conținînd în interior un fir rectiliniu paralel cu axul cilindrului, întreg sistemul fiind introdus într-un cîmp magnetic omogen de inducție $\boldsymbol{B}_0$. Firul este parcurs de un curent electric I. Se vor calcula tensiunea electromotoare indusă în fir atunci cînd întreg sistemul efectuează o mișcare de translație cu viteza V perpendiculară pe liniile de cîmp ale cîmpului exterior, precum și forța rezultantă asupra ecranului și firului.

a) Determinarea cîmpului magnetic rezultant

Vom căuta pentru potențialul vector soluții de forma :

$$A_1 = -B_0 \rho \cos\varphi + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \rho^{-n} \cos n\varphi + M_0 \ln \rho + N_0,$$

$$A_2 = \sum_{n=1}^{\infty} [D_n \rho^n + E_n \rho^{-n}] \cos n\varphi + G_0 \ln \rho + H_0,$$

$$A_3 = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{c}{\rho}\right)^n \cos n\varphi - \ln \rho\right] + \sum_{n=1}^{\infty} F_n \rho^n \cos n\varphi, \text{ (pt. } \rho > c)$$

corespunzătoare celor trei zone.

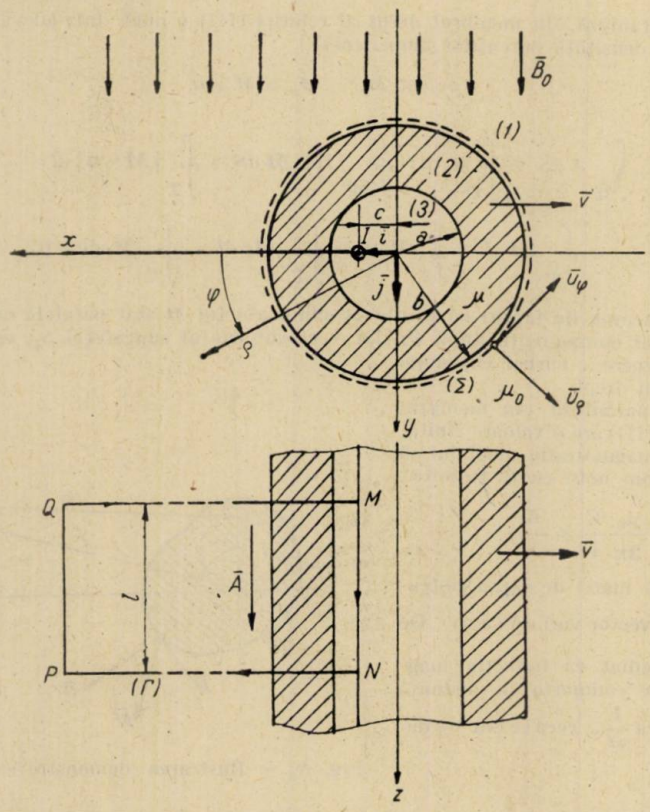


Fig. A_2. — Conductor situat în interiorul unui ecran magnetic cilindric circular de permeabilitate constantă.

Constantele de integrare se determină din condițiile pe frontieră:

$$A_2 = A_3 \text{ și } \frac{1}{\mu_0}\frac{\partial A_3}{\partial \rho} = \frac{1}{\mu}\frac{\partial A_2}{\partial \rho} \text{ pentru } \rho = a,$$

$$A_2 = A_1 \text{ și } \frac{1}{\mu_0}\frac{\partial A_1}{\partial \rho} = \frac{1}{\mu}\frac{\partial A_2}{\partial \rho} \text{ pentru } \rho = b.$$

Se obțin următoarele valori ale constantelor de integrare:

$$G_0 = -\frac{\mu I}{2\pi};\ H_0 = \frac{(\mu - \mu_0)\, I}{2\pi} \ln a;\ M_0 = -\frac{\mu_0 I}{2\pi};\ N_0 = \frac{\mu - \mu_0}{2\pi} I \ln \frac{a}{b};$$

$$C_1 = \frac{(b^2 - a^2)(\mu_0^2 - \mu^2) b^2}{\Delta_1} B_0 + \frac{2\mu\mu_0^2 c b^2}{\pi \Delta_1} I;$$

$$D_1 = -\frac{2\mu(\mu + \mu_0) b^2}{\Delta_1} B_0 - \frac{\mu\mu_0(\mu - \mu_0) c}{\pi \Delta_1} I;$$

$$E_1 = \frac{2\mu(\mu - \mu_0) a^2 b^2}{\Delta_1} B_0 + \frac{\mu\mu_0(\mu + \mu_0) c b^2}{\pi \Delta_1} I;$$

$$F_1 = -\frac{4\mu\mu_0 b^2}{\Delta_1} B_0 - \frac{\mu_0(b^2 - a^2)(\mu_0^2 - \mu^2) c}{2\pi a^2 \Delta_1} I,$$

$$C_n = \frac{2\mu \mu_0^2 c^n b^{2n}}{n\pi \Delta_n} I;$$

$$D_n = -\frac{\mu\mu_0(\mu - \mu_0) c^n}{n\pi \Delta_n} I;$$

$$E_n = \frac{\mu\mu_0(\mu + \mu_0) c^n b^{2n}}{n\pi \Delta_n} I;$$

$$F_n = -\frac{\mu_0(b^{2n} - a^{2n})(\mu_0^2 - \mu^2) c^n}{2\pi n a^{2n} \Delta_n} I;$$

în care:

$$\Delta_n = b^{2n}(\mu + \mu_0)^2 - a^{2n}(\mu - \mu_0)^2.$$

b) Calculul tensiunii electromotoare induse

Se consideră, pentru simplificare, curba (Γ) cuprinsă într-un plan perpendicular pe liniile de cîmp ale cîmpului exterior. În planul curbei (Γ), cîmpul magnetic are numai componentă normală pe acesta, care se obține din soluțiile generale pentru $\varphi = 0$.

$$\begin{cases} A_1 = -B_0 \rho + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \rho^{-n} + M_0 \ln \rho + N_0, \\ A_2 = \sum_{n=1}^{\infty} (D_n \rho^n + E_n \rho^{-n}) + G_0 \ln \rho + H_0, \\ A_3 = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{c}{\rho}\right)^n - \ln \rho\right] + \sum_{n=1}^{\infty} F_n \rho^n; \rho \geqslant c \end{cases}$$

$$\begin{cases} B_1 = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} n C_n \rho^{-(n+1)} - \frac{M_0}{\rho}, \\ B_2 = \sum_{n=1}^{\infty} n E_n \rho^{-(n+1)} - \sum_{n=1}^{\infty} n D_n \rho^{n-1} - \frac{G_0}{\rho}, \\ B_3 = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} c^n \rho^{-(n+1)} - \sum_{n=1}^{\infty} n F_n \rho^{n-1} + \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{\rho}. \end{cases}$$

Tensiunea electromotoare de transformare este:

$$u_{et} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_{S_\Gamma} \boldsymbol{B}\,\mathrm{d}\boldsymbol{A} = -\frac{\partial}{\partial t}\oint_\Gamma \boldsymbol{A}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r} = vl\frac{\partial}{\partial \rho}[A_1|_P - A_3|_M] =$$

$$= vl\left[-B_0 - \sum_{n=1}^{\infty} n C_n \rho^{-(n+1)}\Big|_{\rho\to\infty} + \frac{M_0}{\rho}\Big|_{\rho\to\infty} + \right.$$

$$\left. + \lim_{\rho\to c}\frac{\mu_0 I}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty} c^n \rho^{-(n+1)} + \frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{1}{\rho}\Big|_{\rho=c} - \sum_{n=1}^{\infty} nF_n \rho^{n-1}\Big|_{\rho=c}\right] =$$

$$= -B_0 lv + vl\left[\frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{1}{c} - \sum_{n=1}^{\infty} nF_n c^{n-1} + \lim_{\rho\to c}\frac{\mu_0 I}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty} c^n \rho^{-(n+1)}\right].$$

Tensiunea electromotoare de mișcare este:

$$u_{em} = -vlB_3|_M = -vl\left[\lim_{\rho\to c}\frac{\mu_0 I}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty} c^n \rho^{-(n+1)} - \sum_{n=1}^{\infty} nF_n c^{n-1} + \frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{1}{c}\right].$$

Tensiunea electromotoare totală rezultă:

$$u_{e\Gamma} = u_{em} + u_{et} = -B_0 lv,$$

adică rezultatul așteptat.

c) Determinarea forței asupra sistemului ecran-conductor

Se va calcula forța efectuînd integrarea tensiunilor maxwelliene pe o suprafață cilindrică situată în exteriorul ecranului, foarte aproape de acesta. Componentele normală și tangențială ale inducției magnetice vor fi:

$$B_\rho = \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_1}{\partial \varphi} = B_0 \sin\varphi - \sum_{n=1}^{\infty} n C_n \rho^{-(n+1)} \sin n\varphi,$$

$$B_\varphi = -\frac{\partial A_1}{\partial \rho} = B_0 \cos\varphi + \sum_{n=1}^{\infty} n C_n \rho^{-(n+1)} \cos n\varphi - \frac{M_0}{\rho}.$$

Rezultă următoarea expresie a tensiunii:

$$\boldsymbol{T}_n = \frac{1}{\mu_0}[\boldsymbol{u}_\rho (B_\rho^2 - B_\varphi^2) + \boldsymbol{u}_\varphi B_\rho B_\varphi].$$

Proiectînd după direcțiile celor două axe, se obține:

$$T_{nx} = \frac{1}{\mu_0}\left[\frac{1}{2}\cos\varphi (B_\rho^2 - B_\varphi^2) - \sin\varphi B_\rho B_\varphi\right],$$

$$T_{nx}\frac{1}{\mu_0}\left[\frac{1}{2}\sin\varphi (B_\rho^2 - B_\varphi^2) + \cos\varphi B_\rho B_\varphi\right].$$

Înlocuind expresiile lui B_ρ și B_φ și integrînd pe suprafață, se obține :

$$F_y = l\int_0^{2\pi} T_{ny}\, b\mathrm{d}\varphi = 0,$$

$$F_x = l\int_0^{2\pi} T_{nx}\, b\ \mathrm{d}\varphi = -\ B_0\, Il,$$

semnul minus rezultînd din regula de asociere a sensurilor de referință adoptată.

Forța rezultantă are deci numai componentă după direcția axei Ox. Vectorial, forța va fi dată de relația :

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{Il} \times \boldsymbol{B}_0,$$

adică chiar cea care s-ar exercita în absența ecranului.

Forța asupra ecranului, conform teoremei demonstrate, va fi :

$$\boldsymbol{F}_e = -\ \boldsymbol{Il} \times \boldsymbol{B}' = -\ \boldsymbol{Il} \times \left[-\sum_{n=1}^{\infty} nF_n\, \rho^{n-1}\Big|_{\rho=c} - B_0 \right] \boldsymbol{u}_\varphi =$$

$$= \boldsymbol{I}\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{B}_0 + \boldsymbol{Il} \times \boldsymbol{u}_\varphi \sum_{n=1}^{\infty} nF_n\, c^{n-1}.$$

Forța asupra firului va fi :

$$\boldsymbol{F}_f = \boldsymbol{Il} \times (\boldsymbol{B}_0 + \boldsymbol{B}') = -\ \boldsymbol{Il} \times \boldsymbol{u}_\varphi \sum_{n=1}^{\infty} nF_n\, c^{n-1}.$$

Primit la redacție la 3 septembrie 1964

BIBLIOGRAFIE

1. Г.Н. Петров, *Электрические машины. Часть вторая.* Госэнергоиздат, Москва, 1963.
2. R. Richter, *Mașini electrice.* Vol. I, Edit. tehnică, București, 1958.
3. R. Răduleț, *Bazele electrotehnicii. Probleme,* Vol. I, Edit. didactică și pedagogică, București, 1963.
4. В.А. Говорков, *Электрические и магнитные поля.* Связьиздат, 1951.
5. F. C. Williams, R. S. Мамак, *Electromagnetic forces in sloted structures.* Proceedings of the IEE, Part C, vol. 109, 15—1962 mart. 1962.

REFULAREA CURENTULUI ARMONIC DE ADUCȚIE ÎN BARE CILINDRICE DE CONDUCTIVITĂȚI ȘI PERMEABILITĂȚI DIFERITE ȘI ÎN CONTACT ÎN CAPETE[1])

DE

CONSTANTIN NEMOIANU

Institutul politehnic, Cal. Griviței, nr. 132, București

538.542 :621.3.066.6

Autorul studiază cîmpul electromagnetic din interiorul a doi cilindri confecționați din materiale diferite și în contact în capete, străbătuți de un curent armonic de aducție.

Soluțiile obținute verifică condițiile la limită ale problemei și devin egale pentru frecvența $f = 0$ cu soluțiile cunoscute în regim staționar.

Studiul refulării curentului armonic de aducție în bare cilindrice de conductivități și permeabilități diferite și în contact în capete prezintă importanță în urmărirea comportării întreruptoarelor electrice care au contactele confecționate din materiale diferite. Aceasta interesează atît din punctul de vedere al rezistenței de dispersiune necesară calculării puterii dezvoltate prin efect electrocaloric, cît și din punctul de vedere al forțelor electrodinamice de interacțiune dintre cele două contacte, care pot atinge valori comparabile cu forța de apăsare a contactelor, în special în regimul de scurtcircuit. Se știe că suprafețele care urmează să fie puse în contact prezintă proeminențe și adîncimi care fac ca trecerea curentului de la un contact la celălalt să se facă nu pe întreaga suprafață transversală, ci prin una sau mai multe zone de trecere. Desigur, este de dorit ca numărul acestor zone de trecere să fie cît mai mare și cît mai uniform distribuit,

[1]) Articol apărut și în „Rev. Roum. Sci. Techn. — Electrotechn. Energ.", **9**, *4* (1964).

pentru ca liniile de curent să întîlnească o suprafață de trecere cît mai mare și astfel rezistența de contact să fie cît mai mică.

În cazul în care forța de apăsare este ridicată, iar suprafețele contactelor sînt foarte fin prelucrate, suprafețele de trecere sînt atît de numeroase și atît de uniform distribuite în secțiune, încît se admite în primă aproximație că suprafața totală de trecere a curentului este comparabilă cu secțiunea contactelor.

În literatura de specialitate, un calcul exact al rezistenței de trecere dintre contacte electrice confecționate din materiale diferite și așezate cap la cap, în care să se țină seama și de efectul pelicular, nu a fost prezentat. Publicația *Bibliography and abstract on electrical contacts*, editată de Societatea americană pentru încercări de materiale, care rezumă principalele lucrări publicate în domeniul contactelor electrice din anul 1834 și pînă în zilele noastre, nu indică existența vreunei lucrări în această direcție. Formule care dau rezistența de trecere între contacte confecționate din același material sau din materiale diferite, cum sînt, spre exemplu, cele publicate în lucrarea *Partea electrică a centralelor și a stațiilor electrice* de I. V. Butchevici și colab., exprimate în funcție de un coeficient care are valoarea (0,9 1,4) 10^{-4} pentru contactele cupru-cupru și 3.10^{-4} pentru contactele cupru-alamă, nu au o justificare teoretică.

În lucrarea de față se prezintă teoria refulării curentului armonic cvasistaționar în contacte cilindrice de conductivități σ_1 și σ_2 și de permeabilități μ_1 și μ_2, ținîndu-se seama de efectul pelicular, prin folosirea metodei integrării ecuațiilor lui Maxwell. Se presupune că forța de apăsare a contactelor este suficient de mare pentru ca suprafața de trecere a curentului să fie comparabilă cu secțiunea πa^2 a barelor.

1. CALCULUL CÎMPURILOR MAGNETICE ÎN BARE

Din legea circuitului magnetic și din legea inducției electromagnetice, scrise în regim cvasistaționar pentru corpuri imobile,

$$\text{rot } \dot{H} = \varkappa \gamma_0 \sigma \dot{E}, \tag{1}$$

$$\text{rot } \dot{E} = -j \omega \gamma_0 \mu \dot{H}, \tag{2}$$

se obține ecuația cu derivate parțiale :

$$\Delta \dot{H} = j \varkappa \gamma_0^2 \mu \omega \sigma \dot{H}, \tag{3}$$

în care punctul pus deasupra literelor înseamnă valoarea în complex nesimplificat, $\varkappa$ este coeficientul de raționalizare, γ_0 este constanta lui Gauss, $\omega = 2\pi f$ este pulsația, σ și μ sînt conductivitatea și permeabilitatea conductorului. Notînd : $j \varkappa \gamma_0^2 \omega \sigma \mu = j\alpha^2 = \underline{\gamma}^2$, în care liniuța pusă dedesubtul literei notează mărimile complexe, ecuația cu derivate parțiale care trebuie rezolvată este următoarea :

$$\Delta \dot{H} = \underline{\gamma}^2 \dot{H}, \tag{4}$$

cu

$$\underline{\gamma} = \sqrt{j \varkappa \gamma_0^2 \omega \sigma \mu}, \tag{5}$$

o ecuație de tip Helmholtz, care se rezolvă prin metoda separării variabilelor. În coordonate cilindrice ecuația devine :

$$\frac{\partial^2 \dot{H}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{H}}{\partial r} - \left(\underline{\gamma}^2 + \frac{1}{r^2} \right) \dot{H} + \frac{\partial^2 \dot{H}}{\partial z^2} = 0, \tag{6}$$

r și z fiind variabile ale sistemului cilindric de coordonate. Schimbînd poziția unor termeni, ecuația se mai poate scrie astfel :

$$\frac{\partial^2 \dot{H}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{H}}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \dot{H} + \frac{\partial^2 \dot{H}}{\partial z^2} = \underline{\gamma}^2 \dot{H}. \tag{7}$$

Integrăm această ecuație, încercînd o separare a variabilelor, folosind integrale sub forma unor produse de cîte doi factori, unul $\dot{R}(r)$, care depinde numai de variabila r, și altul $\dot{Z}(z)$, care depinde numai de variabila z :

$$\dot{H} = \dot{R}(r) \cdot \dot{Z}(z).$$

Înlocuind în ecuația cu derivate parțiale (7) și împărțind cu produsul $\dot{R}\dot{Z}$, avem :

$$\frac{\dfrac{\partial^2 \dot{R}}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r} \dfrac{\partial \dot{R}}{\partial r} - \dfrac{1}{r^2} \dot{R}}{\dot{R}} + \frac{\dfrac{\partial^2 \dot{Z}}{\partial z^2}}{\dot{Z}} = \underline{\gamma}^2. \tag{8}$$

Egalăm termenul care depinde numai de r cu patratul k^2 al unui parametru k, care, în cazul cel mai general, poate fi un număr complex, ale cărui valori proprii urmează să fie determinate din condițiile la limită ale problemei. Pentru ca ecuația (8) să fie satisfăcută, trebuie ca cel de-al doilea termen din membrul întîi, funcție numai de variabila z, să fie egal cu $\underline{\gamma}^2 - k^2$, adică

$$\frac{\dfrac{\partial^2 \dot{R}}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r} \dfrac{\partial \dot{R}}{\partial r} - \dfrac{1}{r^2} \dot{R}}{\dot{R}} = k^2 \quad \text{și} \quad \frac{\dfrac{\partial^2 \dot{Z}}{\partial z^2}}{\dot{Z}} = \underline{\gamma}^2 - k^2$$

sau

$$\frac{\mathrm{d}^2 \dot{R}}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r} \frac{\mathrm{d}\dot{R}}{\mathrm{d}r} - \left(k^2 + \frac{1}{r^2} \right) \dot{R} = 0 \tag{9}$$

și

$$\frac{\mathrm{d}^2 \dot{Z}}{\mathrm{d}z^2} - (\underline{\gamma}^2 - k^2) \dot{Z} = 0. \tag{10}$$

Soluția cea mai generală a cîmpului magnetic din oricare din cele două bare se va putea pune sub forma unei sume de produse dintre soluția generală a ecuației diferențiale modificate a lui Bessel (9),

$$\dot{R}(r) = \dot{A}_k I_1(kr) + \dot{B}_k K_1(kr), \tag{11}$$

și soluția generală a ecuației diferențiale (10),

$$\dot{Z}(z) = \dot{C}_k e^{-\sqrt{\gamma^2 - k^2}\cdot z} + \dot{D}_k e^{\sqrt{\gamma^2 - k^2}\cdot z}. \tag{12}$$

$I_1(kr)$ și $K_1(kr)$ sînt funcțiile lui Bessel modificate, de specia întîi, de specia a doua și de ordinul unu. Deci :

$$\dot{H}(r, z) = \sum_k [\dot{A}_k I_1(kr) + \dot{B}_k K_1(kr)] \; [\dot{C}_k e^{-\sqrt{\gamma^2 - k^2}\cdot z} + \dot{D}_k e^{\sqrt{\gamma^2 - k^2}\cdot z}]. \tag{13}$$

Cîmpul magnetic în axul de simetrie al cilindrului fiind nul, trebuie să alegem constantele $\dot{B}_k$ nule, deoarece în caz contrar s-ar obține $|\lim_{r\to 0} K_1(kr)| = \infty$, iar modulul cîmpului magnetic ar tinde către infinit, atunci cînd r tinde către zero. Cu $\dot{B}_k = 0$ cîmpul magnetic va fi

$$\dot{H}(r, z) = \sum_k \dot{A}_k I_1(kr) \; [\dot{C}_k e^{-\sqrt{\gamma^2 - k^2}\cdot z} + \dot{D}_k e^{\sqrt{\gamma^2 - k^2}\cdot z}]. \tag{14}$$

Simbolul Σ se referă deocamdată la suma produselor de mai sus, calculate pentru toate valorile pe care le poate lua mărimea complexă k.

Pentru a analiza toate valorile posibile ale lui k care să satisfacă și condițiile la limită ale problemei, vom lua în considerare valorile lui k pentru care $\mathrm{Re}\sqrt{\gamma^2 - k^2}$ este mai mare, mai mică și egală cu zero. Fie $k = k_0$ valorile lui k pentru care $\mathrm{Re}\sqrt{\gamma^2 - k^2} = 0$. Factorul $\dot{Z}(z)$ va fi, notînd $\sqrt{\gamma^2 - k^2} = \pm(g_k + j\delta_k)$, de forma :

$$\dot{Z}(z) = \dot{C}_{k0} e^{-j\delta_{k0} z} + \dot{D}_{k0} e^{j\delta_{k0} z},$$

în care s-a luat $g_k = g_{k0} = 0$ și în care $\dot{C}_{k0}$, $\dot{D}_{k0}$ și δ_{k0} sînt valorile luate respectiv de $\dot{C}_k$, $\dot{D}_k$ și δ_k, cînd parametrul k ia astfel de valori, încît să anuleze pe $\mathrm{Re}\sqrt{\gamma^2 - k^2}$.

Deoarece la distanțe mari de suprafața de contact cîmpul magnetic este finit, diferit de zero și independent de z, este necesar ca și $\dot{Z}(z)$ să fie finit, diferit de zero și independent de z, atunci cînd $z \to \infty$. Acest lucru are loc numai cînd luăm $\delta_{k0} = 0$. Deci, în ipoteza $\mathrm{Re}\sqrt{\gamma^2 - k^2} = 0$, $\dot{Z}(z)$ este independent de z pentru valori mari ale lui z numai cînd atît $g_{k0} = 0$, cît și $\delta_{k0} = 0$, adică numai cînd e nul însuși numărul complex :

$$\sqrt{\gamma^2 - k^2} = 0.$$

Această ultimă condiție conduce la două valori proprii ale lui k_0, pentru care $\operatorname{Re}\sqrt{\underline{\gamma}^2 - k^2} = 0$:

$$k_0 = \pm \underline{\gamma}.$$

Cu aceste valori, cîmpul magnetic va avea următoarea formă, știind că $\dot{Z}(\infty) = \dot{C}_{k0} + \dot{D}_{k0}$:

$$\dot{H}(r, z) = \sum_{\operatorname{Re}\sqrt{\underline{\gamma}^2 - k^2} = 0} \dot{A}_{k0} (\dot{C}_{k0} + \dot{D}_{k0}) I_1 (k_0 r) + \sum_{k \neq \pm \underline{\gamma}} \dot{R}(r) \dot{Z} z). \qquad (15)$$

Notînd în prima sumă $\dot{A}_{k0}(\dot{C}_{k0} + \dot{D}_{k0}) = \dot{G}_{k0}$ și observînd că ea se referă numai la cei doi termeni corespunzători lui $k_0 = +\underline{\gamma}$ și $k_0 = -\underline{\gamma}$, expresia cîmpului magnetic se mai poate pune sub forma :

$$\dot{H}(r, z) = \dot{G}_{\underline{\gamma}} I_1 (\underline{\gamma} r) + \dot{G}_{-\underline{\gamma}} I_1 (-\underline{\gamma} r) + \sum_{k \neq \pm \underline{\gamma}} \dot{R}(r) \dot{Z}(z)$$

sau, în fine, știind că $I_1(-\underline{\gamma} r) = -I_1(\underline{\gamma} r)$ și notînd $\dot{G}_{\underline{\gamma}} - \dot{G}_{-\underline{\gamma}} = \dot{G}_0$, sub forma :

$$\dot{H}(r, z) = \dot{G}_0 I_1 (\underline{\gamma} r) + \sum_{k \neq \pm \underline{\gamma}} \dot{A}_k I_1 (kr) [\dot{C}_k e^{-\sqrt{\underline{\gamma}^2 - k^2} z} + \dot{D}_k e^{\sqrt{\underline{\gamma}^2 - k^2} z}]. \qquad (16)$$

Deoarece la distanțe mari de locul contactului cîmpul magnetic trebuie să fie :

$$\dot{H}(r, \infty) = \frac{\varkappa \gamma_0 \dot{I}}{2 \pi a} \frac{I_1 (\underline{\gamma} r)}{I_1 (\underline{\gamma} a)},$$

este necesar ca pentru $z \to \infty$ toți termenii seriei din expresia (16) să se anuleze. Deși radicalul $\sqrt{\underline{\gamma}^2 - k^2}$ e un număr complex, afectat atît de semnul plus, cît și de semnul minus, adică

$$\sqrt{\underline{\gamma}^2 - k^2} = \pm (g_k + j \delta_k),$$

dacă înlocuim această pereche de valori în $\dot{Z}(z)$ dat de formula (12), se va obține o relație echivalentă cu o expresie formată tot din doi termeni, și anume :

$$\dot{Z}(z) = \dot{C}_k e^{-(g_k + j\delta_k) z} + \dot{D}_k e^{(g_k + j\delta_k) z}.$$

Atunci cînd $k = k'$, pentru care $g_k = g_{k'} > 0$, trebuie să luăm $\dot{D}_k = \dot{D}_{k'} = 0$, pentru a evita soluții infinite atunci cînd $z \to \infty$. În acest caz :

$$\dot{Z}_1(z) = \dot{C}_{k'} e^{-(g_{k'} + j\delta_{k'}) z}.$$

Atunci cînd $k = k''$, pentru care $g_k = g_{k'} < 0$, trebuie să luăm $\dot{C}_k = \dot{C}_{k''} = 0$. În acest caz :

$$\dot{Z}_2(z) = \dot{D}_{k''} e^{(g_{k''} + j\delta_{k''}) z}.$$

Analizînd ultimele două expresii ale lui $\dot{Z}(z)$, observăm că este indiferent dacă luăm în considerare cazul $k = k'$ sau cazul $k = k''$, deoarece

ambele conduc la un $\dot{Z}(z)$ avînd partea reală a argumentului exponențialei negativă. Vom alege cazul în care

$$\dot{Z}(z) = \dot{C}_{k'} e^{-(g_{k'} + j\delta_{k'}) z} = \dot{C}_{k'} e^{-\sqrt{\underline{\gamma}^2 - k^2}\, z},$$

cu $k = k'$, pentru care $g = g_{k'} > 0$. Notînd $\dot{A}_k \dot{C}_{k'} = \dot{G}_k$, cîmpul magnetic va avea forma :

$$\dot{H}(r, z) = \dot{G}_0 I_1(\underline{\gamma} r) + \sum_{g_k = g_{k'} > 0} \dot{G}_k I_1(kr) e^{-\sqrt{\underline{\gamma}^2 - k^2}\, z}. \tag{17}$$

Punînd acum condiția la limită :

$$\lim_{z \to \infty} \dot{H}(r, z) = \frac{\varkappa \gamma_0 \dot{I}}{2 \varkappa a} \frac{I_1(\underline{\gamma} r)}{I_1(\underline{\gamma} a)},$$

vom avea :

$$\dot{G}_0 I_1(\underline{\gamma} r) = \frac{\varkappa \gamma_0 \dot{I}}{2 \pi a} \frac{I_1(\underline{\gamma} r)}{I_1(\underline{\gamma} a)},$$

de unde rezultă constanta complexă :

$$\dot{G}_0 = \frac{\varkappa \gamma_0 \dot{I}}{2 \pi a \cdot I_1(\underline{\gamma} a)}.$$

Cîmpul magnetic va fi deci :

$$\dot{H}(r, z) = \frac{\varkappa \gamma_0 \dot{I}}{2 \pi a} \frac{I_1(\underline{\gamma} r)}{I_1(\underline{\gamma} a)} + \sum_{k = k'} \dot{G}_k I_1(kr) e^{-\sqrt{\underline{\gamma}^2 - k^2}\, z}. \tag{18}$$

Pentru a determina în continuare valorile proprii ale lui k, vom folosi și condiția la limită $r = a$, pentru care știm că $\dot{H}(a, z) = \frac{\varkappa \gamma_0 \dot{I}}{2 \pi a} = \dot{H}(a)$. Pentru ca $\dot{H}(r, z)$ dat de (18) să se transforme pentru $r = a$ în expresia lui $\dot{H}(a)$ dată mai sus, este necesar ca produsele kr să fie rădăcini ale funcției Bessel modificate $I_1(kr)$, care, așa cum se știe, în afară de rădăcina banală $kr = 0$, pentru care $I_1(0) = 0$, nu are rădăcini decît atunci cînd $k = jn$ (n fiind număr real), pentru care funcția Bessel modificată se transformă în funcție Bessel de speța întîi.

Luînd $k = jn$ și deci $k^2 = -n^2$, formula (18) devine :

$$\dot{H}(r, z) = \frac{\varkappa \gamma_0 \dot{I}}{2 \pi a} \frac{I_1(\underline{\gamma} r)}{I_1(\underline{\gamma} a)} + \sum_n \dot{A}_n J_1(nr) e^{-\sqrt{\underline{\gamma}^2 + n^2}\, z}, \tag{19}$$

în care s-a ținut seamă de faptul că $I_1(jx) = jI_1(x)$ și în care s-a notat $j\dot{G}_k = \dot{A}_n$.

Cîmpurile magnetice din cele două bare vor fi deci de forma :

$$\dot{H}_1 = \frac{\varkappa\gamma_0 \dot{I}}{2\pi a}\frac{I_1(\underline{\gamma}_1 r)}{I_1(\underline{\gamma}_1 a)} + \sum_n \dot{A}_{1n} e^{-\sqrt{\underline{\gamma}_1^2+n^2}\,z} J_1(nr) \text{ pentru } z > 0; \quad (20)$$

$$\dot{H}_2 = \frac{\varkappa\gamma_0 \dot{I}}{2\pi a}\frac{I_1(\underline{\gamma}_2 r)}{I_1(\underline{\gamma}_2 a)} + \sum_n \dot{A}_{2n} e^{-\sqrt{\underline{\gamma}_2^2+n^2}\,z} J_1(nr) \text{ pentru } z < 0. \quad (21)$$

Deoarece termenii aditivi ai seriilor trebuie să se anuleze pentru $r = a$, vom lua $n = \frac{x_{1m}}{a}$, în care x_{1m} sînt zerourile funcției Bessel de speța întîi și de ordinul unu, date de relația :

$$x_{1m} = \beta_{1m} - \frac{3}{(8\beta_{1m})^3} + \frac{12}{(8\beta_{1m})^3} \ldots,$$

în care $\beta_{1m} = \frac{1}{4}\pi(4m+3) = \pi m + \frac{3\pi}{4}$, cu $m = 0, 1, 2, 3, \ldots$ (vezi Gray, *Funcțiile Bessel*, p. 348).

Cu aceste rădăcini, cîmpurile magnetice în cele două bare vor avea expresiile următoare :

$$\dot{H}_1 = \frac{\varkappa\gamma_0 \dot{I}}{2\pi a}\frac{I_1(\underline{\gamma}_1 r)}{I_1(\underline{\gamma}_1 a)} + \sum_{m=0}^{\infty} \dot{A}_{1m} e^{-\sqrt{\underline{\gamma}_1^2+\left(\frac{x_{1m}}{a}\right)^2}\,z} J_1\left(\frac{x_{1m}}{a} r\right) \text{ pentru } z > 0; \quad (22)$$

$$\dot{H}_2 = \frac{\varkappa\gamma_0 \dot{I}}{2\pi a}\frac{I_1(\underline{\gamma}_2 r)}{I_1(\underline{\gamma}_2 a)} + \sum_{m=0}^{\infty} \dot{A}_{2m} e^{\sqrt{\underline{\gamma}_2^2+\left(\frac{x_{1m}}{a}\right)^2}\,z} J_1\left(\frac{x_{1m}}{a} r\right) \text{ pentru } z < 0. \quad (23)$$

Constantele $\dot{A}_{1m}$ și $\dot{A}_{2m}$ se vor determina din condiția continuității componentei tangențiale a cîmpului magnetic și din condiția continuității componentei tangențiale a cîmpului electric.

Continuitatea componentei tangențiale a cîmpului magnetic la suprafața de contact dintre bare, conduce — punînd $z = 0$ — la relația :

$$\dot{f}(r) = \frac{\varkappa\gamma_0 \dot{I}}{2\pi a}\left[\frac{I_1(\underline{\gamma}_1 r)}{I_1(\underline{\gamma}_1 a)} - \frac{I_1(\underline{\gamma}_2 r)}{I_1(\underline{\gamma}_2 a)}\right] = \sum_{m=0}^{\infty} (\dot{A}_{2m} - \dot{A}_{1m}) J_1\left(x_{1m}\frac{r}{a}\right). \quad (24)$$

Dezvoltăm funcția $\dot{f}(r)$ în serie Bessel-Fourier în intervalul $(0 < r < a)$, (vezi Lebedev, *Funcții speciale*, p. 191). Avem :

$$\dot{f}(r) = \sum_{m=0}^{\infty} \dot{c}_m J_1\left(x_{1m}\frac{r}{a}\right) \text{ cu } m = 0, 1, 2 \ldots, \quad (25)$$

în care coeficienții $\dot{c}_m$ se calculează cu ajutorul formulei :

$$\dot{c}_m = \frac{2}{a^2 J_2^2(x_{1m})}\int_0^a \dot{f}(r) \cdot r J_1\left(x_{1m}\frac{r}{a}\right) dr. \quad (26)$$

Avem :

$$\dot{c}_m = \frac{2}{a^2 J_2^2(x_{1m})} \frac{\varkappa \gamma_0 \dot{I}}{2\pi a} \left[\frac{1}{I_1(\underline{\gamma}_1 a)} \int_0^a I_1(\underline{\gamma}_1 r) \cdot r J_1\left(x_{1m} \frac{r}{a}\right) \mathrm{d}r - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{I_1(\underline{\gamma}_2 a)} \int_0^a I_1(\underline{\gamma}_2 r) \cdot r J_1\left(x_{1m} \frac{r}{a}\right) \mathrm{d}r \right].$$

Din formula :

$$\int x Z_p(\alpha x)\, \zeta_p(\beta x)\, \mathrm{d}x = \frac{\beta x Z_p(\alpha x)\, \zeta_{p-1}(\beta x) - \alpha x Z_{p-1}(\alpha x)\, \zeta_p(\beta x)}{\alpha^2 - \beta^2},$$

în care Z şi ζ sînt funcţii Bessel (vezi Rîjii şi Gradstein, *Tabele de integrale, serii, sume şi produse*), făcînd înlocuirile :

$$\begin{array}{ll} Z \to I \ \text{(funcţia Bessel modificată)} & \alpha \to \underline{\gamma}\,; \\ \zeta \to J \ \text{(funcţia Bessel ordinară)} & x \to r\,; \\ p = 1 & \beta \to \dfrac{x_{1m}}{a}\,; \end{array}$$

avem :

$$\int_0^a r J_1(\underline{\gamma} r) J_1\left(\frac{x_{1m}}{a} r\right) \mathrm{d}r = \left| \frac{\frac{x_{1m}}{a} r I_1(\underline{\gamma} r) J_0\left(\frac{x_{1m}}{a} r\right) - \underline{\gamma} r I_0(\underline{\gamma} r) J_1\left(\frac{x_{1m}}{a} r\right)}{\underline{\gamma}^2 - \left(\frac{x_{1m}}{a}\right)^2} \right|_0^a.$$

Rezultă :

$$\dot{c}_m = \frac{\varkappa \gamma_0 \dot{I} x_{1m} J_0(x_{1m})}{\pi a^3 J_2^2(x_{1m})} \left[\frac{1}{\underline{\gamma}_1^2 - \left(\frac{x_{1m}}{a}\right)^2} - \frac{1}{\underline{\gamma}_2^2 - \left(\frac{x_{1m}}{a}\right)^2} \right] =$$

$$= \frac{x_{1m} J_0(x_{1m})\,(\underline{\gamma}_2^2 - \underline{\gamma}_1^2)}{J_2^2(x_{1m})\, \underline{\Lambda}_{1m}^2\, \underline{\Lambda}_{2m}^2} \cdot \frac{\varkappa \gamma_0 \dot{I}}{\pi a^3},$$

în care am notat : $\underline{\Lambda}_{1m}^2 = \underline{\gamma}_1^2 - \left(\frac{x_{1m}}{a}\right)^2$; $\underline{\Lambda}_{2m}^2 = \underline{\gamma}_2^2 - \left(\frac{x_{1m}}{a}\right)^2$.

Rezultă din ecuaţiile (24) şi (25) :

$$\frac{\varkappa \gamma_0 \dot{I}}{2\pi a} \left[\frac{I_1(\underline{\gamma}_1 r)}{I_1(\underline{\gamma}_1 a)} - \frac{I_1(\underline{\gamma}_2 r)}{I_1(\underline{\gamma}_2 a)} \right] = \tag{27}$$

$$= \frac{\varkappa \gamma_0 \dot{I}}{\pi a^3} (\underline{\gamma}_2^2 - \underline{\gamma}_1^2) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x_{1m} J_0(x_{1m})}{J_2^2(x_{1m})\, \underline{\Lambda}_{1m}^2\, \underline{\Lambda}_{2m}^2} J_1\left(x_{1m} \frac{r}{a}\right) = \sum_{m=0}^{\infty} (\dot{A}_{2m} - \dot{A}_{1m}) J_1\left(x_{1m} \frac{r}{a}\right).$$

Prin identificare, rezultă :

$$\dot{A}_{2m} - \dot{A}_{1m} = \frac{\varkappa \gamma_0 \dot{I}}{\pi a^3} (\underline{\Upsilon}_2^2 - \underline{\Upsilon}_1^2) \frac{x_{1m} \cdot J_0(x_{1m})}{J_2^2(x_{1m})\, \underline{\Lambda}_{1m}^2\, \underline{\Lambda}_{2m}^2}. \tag{28}$$

Din legea circuitului magnetic rot $\dot{\bar{H}} = \varkappa \gamma_0 \sigma \dot{\bar{E}}$ scrisă în coordonate cilindrice aflăm componentele longitudinale $\dot{E}_z$ și radială $\dot{E}_r$ ale cîmpului electric :

$$\dot{E}_r = -\frac{1}{\varkappa \gamma_0 \sigma} \frac{\partial \dot{H}}{\partial z} \text{ și } \dot{E}_z = \frac{1}{\varkappa \gamma_0 \sigma} \left(\frac{\dot{H}}{r} + \frac{\partial \dot{H}}{\partial r} \right). \tag{29,30}$$

Componentele tangențiale la secțiunea de contact ale cîmpurilor electrice în cele două bare se calculează, pentru a pune condiția continuității componentei tangențiale a cîmpului electric, relație care oferă încă o legătură între constantele de integrare $\dot{A}_{1m}$ și $\dot{A}_{2m}$.

Avem :

$$\dot{E}_{1r} = -\frac{1}{\varkappa \gamma_0 \sigma_1} \sum_{m=0}^{\infty} \dot{A}_{1m} \left[-\sqrt{\underline{\Upsilon}_1^2 + \left(\frac{x_{1m}}{a}\right)^2} \right] e^{-\sqrt{\underline{\Upsilon}_1^2 + \left(\frac{x_{1m}}{a}\right)^2} z} J_1\left(\frac{x_{1m}}{a} r\right)$$

pentru $z > 0$; (31)

$$\dot{E}_{2r} = -\frac{1}{\varkappa \gamma_0 \sigma_2} \sum_{m=0}^{\infty} A_{2m} \sqrt{\underline{\Upsilon}_2^2 + \left(\frac{x_{1m}}{a}\right)^2} e^{\sqrt{\underline{\Upsilon}_2^2 + \left(\frac{x_{1m}}{a}\right)^2} z} J_1\left(\frac{x_{1m}}{a} r\right)$$

pentru $z < 0$. (32)

Notînd : $\underline{\lambda}_{1m} = \sqrt{\underline{\Upsilon}_1^2 + \left(\frac{x_{1m}}{a}\right)^2}$ și $\underline{\lambda}_{2m} = \sqrt{\underline{\Upsilon}_2^2 + \left(\frac{x_{1m}}{a}\right)^2}$ și punînd condiția continuității componentei tangențiale a cîmpului electric la suprafața de contact ($z = 0$), $(\dot{E}_{1r})_{z=0} = (\dot{E}_{2r})_{z=0}$, avem :

$$\frac{1}{\sigma_1} \sum_{m=0}^{\infty} \dot{A}_{1m} \underline{\lambda}_{1m} J_1\left(\frac{x_{1m}}{a} r\right) = -\frac{1}{\sigma_2} \sum_{m=0}^{\infty} \dot{A}_{2m} \underline{\lambda}_{2m} J_1\left(\frac{x_{1m}}{a} r\right).$$

Prin identificare, rezultă :

$$\sigma_2 \underline{\lambda}_{1m} \dot{A}_{1m} = -\sigma_1 \underline{\lambda}_{2m} \dot{A}_{2m}. \tag{33}$$

Din ecuațiile (28) și (33) formăm următorul sistem de ecuații :

$$\begin{cases} \dot{A}_{2m} - \dot{A}_{1m} = \dfrac{\varkappa \gamma_0 \dot{I}}{\pi a^3} (\underline{\Upsilon}_2^2 - \underline{\Upsilon}_1^2) \dfrac{x_{1m} J_0(x_{1m})}{J_0^2(x_{1m})\, \underline{\Lambda}_{1m}^2\, \underline{\Lambda}_{2m}^2} \\ \underline{\lambda}_{1m} \sigma_2 \dot{A}_{1m} + \underline{\lambda}_{2m} \sigma_1 \dot{A}_{2m} = 0 \end{cases}$$

din care rezultă :

$$\dot{A}_{1m} = \frac{\varkappa \gamma_0 \dot{I}}{\pi a^3} \frac{\underline{\Upsilon}_1^2 - \underline{\Upsilon}_2^2}{1 + \dfrac{\underline{\lambda}_{1m}}{\underline{\lambda}_{2m}} \dfrac{\sigma_2}{\sigma_1}} \frac{x_{1m} J_0(x_{1m})}{J_2^2(x_{1m})\, \underline{\Lambda}_{1m}^2\, \underline{\Lambda}_{2m}^2}; \tag{34}$$

$$\dot{A}_{2m} = -\frac{\varkappa \gamma_0 \dot{I}}{\pi a^3} \frac{\underline{\gamma}_1^2 - \underline{\gamma}_2^2}{1 + \frac{\underline{\lambda}_{2m}}{\underline{\lambda}_{1m}} \frac{\sigma_1}{\sigma_2}} \frac{x_{1m} J_0(x_{1m})}{J_2^2(x_{1m})\, \underline{\Lambda}_{1m}^2\, \underline{\Lambda}_{2m}^2}. \tag{35}$$

Cîmpul magnetic din cele două bare cilindrice va avea expresiile :

$$\dot{H}_1 = \frac{\varkappa \gamma_0 \dot{I}}{2\pi a} \frac{I_1(\underline{\gamma}_1 r)}{I_1(\underline{\gamma}_1 a)} +$$

$$+ \frac{\varkappa \gamma_0 \dot{I}}{\pi a^3} (\underline{\gamma}_1^2 - \underline{\gamma}_2^2) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x_{1m} J_0(x_{1m})\, e^{-\underline{\lambda}_{1m} z}}{\left(1 + \frac{\underline{\lambda}_{1m}}{\underline{\lambda}_{2m}} \cdot \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right) J_2^2(x_{1m})\, \underline{\Lambda}_{1m}^2\, \Lambda_{2m}^2} J_1\left(\frac{x_{1m}}{a} r\right),$$

pentru $z > 0$ (36)

$$\dot{H}_2 = \frac{\varkappa \gamma_0 \dot{I}}{2\pi a} \frac{I_1(\underline{\gamma}_2 r)}{I_1(\underline{\gamma}_2 a)} -$$

$$- \frac{\varkappa \gamma_0 \dot{I}}{\pi a^3} (\underline{\gamma}_1^2 - \underline{\gamma}_2^2) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x_{1m} J_0(x_{1m})\, e^{-\underline{\lambda}_{2m} z}}{\left(1 + \frac{\underline{\lambda}_{2m}}{\underline{\lambda}_{1m}} \frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right) J_2^2(x_{1m})\, \underline{\Lambda}_{1m}^2\, \underline{\Lambda}_{2m}^2} J_1\left(\frac{x_{1m}}{a} r\right).$$

pentru $z < 0$ (37)

Soluțiile de mai sus verifică următoarele cazuri particulare :

Pentru $|z| \to \infty$ rezultă $\dot{H}_i = \frac{\varkappa \gamma_0 \dot{I}}{2\pi a} \frac{I_1(\underline{\gamma}_i r)}{I_1(\underline{\gamma}_i a)}$; $i = 1, 2$ (cîmpul unei singure bare) ;

Pentru $r \to a$ rezultă $\dot{H}_i = \frac{\varkappa \gamma_0 \dot{I}}{2\pi a}$; $i = 1, 2$ (cîmpul unei singure bare) ;

Pentru $\underline{\gamma}_1 = \underline{\gamma}_2 = \underline{\gamma}$ rezultă $\dot{H}_i = \frac{\varkappa \gamma_0 \dot{I}}{2\pi a} \frac{I_1(\underline{\gamma}_i r)}{I_1(\underline{\gamma}_i a)}$; $i = 1, 2$ (cîmpul unei singure bare) ;

Pentru $\omega \to 0$ rezultă $\dot{H}_i = \frac{\varkappa \gamma_0 \dot{I}}{2\pi a} \frac{r}{a}$; $i = 1, 2$ (din regimul staționar).

2. CALCULUL CÎMPURILOR ELECTRICE ÎN BARE

Dacă se introduc constantele $\dot{A}_{1m}$ și $\dot{A}_{2m}$ date de formulele (34) și (35) în formulele (31) și (32), se obțin componentele radiale ale cîmpurilor electrice. Avem :

$$\dot{E}_{1r} = \frac{\dot{I}}{\sigma_1 \pi a^3} (\underline{\gamma}_1^2 - \underline{\gamma}_2^2) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda_{1m} x_{1m} J_0(x_{1m})\, e^{-\underline{\lambda}_{1m} z}}{\left(1 + \frac{\underline{\lambda}_{1m}}{\underline{\lambda}_{2m}} \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right) J_2^2(x_{1m}) \underline{\Lambda}_{1m}^2\, \underline{\Lambda}_{2m}^2} J_1\left(\frac{x_{1m}}{a} r\right)$$

pentru $z > 0$; (38)

$$\dot{E}_{2r} = \frac{\dot{I}}{\sigma_2 \pi a^3} (\underline{\gamma}_1^2 - \underline{\gamma}_2^2) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\underline{\lambda}_{2m} x_{1m} J_0(x_{1m}) e^{\underline{\lambda}_m z}}{\left(1 + \frac{\underline{\lambda}_{2m}}{\underline{\lambda}_{1m}} \frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right) J_2^2(x_{1m}) \underline{\Lambda}_{1m}^2 \underline{\Lambda}_{2m}^2} J_1\left(\frac{x_{1m}}{a} r\right)$$

pentru $z < 0$. (39)

Observăm la aceste expresii următoarele caracteristici :

— dacă barele sînt din același material ($\underline{\gamma}_1 = \underline{\gamma}_2$), nu există componente radiale : $\dot{E}_{1r} = \dot{E}_{2r} = 0$;

— la suprafața barelor ($r = a$), componentele radiale sînt nule : $(\dot{E}_{1r})_{r=a} = (\dot{E}_{2r})_{r=a} = 0$;

— la suprafața de contact dintre cele două bare ($z = 0$) se conservă componenta tangențială la această suprafață. În adevăr,

$$\dot{E}_{1r0} = \dot{E}_{2r0} = \frac{\dot{I}(\underline{\gamma}_1^2 - \underline{\gamma}_2^2)}{\pi a^3} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\underline{\lambda}_{1m} \underline{\lambda}_{2m} x_{1m} J_0(x_{1m})}{(\underline{\lambda}_{1m} \sigma_2 + \underline{\lambda}_{2m} \sigma_1) J_2^2(x_{1m})} \frac{J_1\left(\frac{x_{1m}}{a} r\right)}{\underline{\Lambda}_{1m}^2 \underline{\Lambda}_{2m}^2}. \quad (40)$$

Componenta longitudinală a cîmpului electric se calculează astfel :

$$\dot{E}_{1z} = \frac{1}{\varkappa \gamma_0 \sigma} \left(\frac{\dot{H}_1}{r} + \frac{\partial \dot{H}_1}{\partial r}\right).$$

Ținînd seama de relațiile :

$$J_1(x) + x J_1'(x) = x J_0(x),$$
$$I_1(x) + x I_1'(x) = x I_0(x), \quad (41)$$

se obțin cele două componente longitudinale ale cîmpului electric în cele două bare :

$$\dot{E}_{1z} = \frac{\dot{I}}{2\pi a \sigma_1} \underline{\gamma}_1 \frac{I_0(\underline{\gamma}_1 r)}{I_1(\underline{\gamma}_1 a)} +$$

$$+ \frac{\dot{I}}{\pi a^4 \sigma_1} (\underline{\gamma}_1^2 - \underline{\gamma}_2^2) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x_{1m}^2 J_0(x_{1m}) e^{-\underline{\lambda}_{1m} z}}{\left(1 + \frac{\underline{\lambda}_{1m}}{\underline{\lambda}_{2m}} \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right) J_2^2(x_{1m}) \underline{\Lambda}_{1m}^2 \underline{\Lambda}_{2m}^2} J_0\left(\frac{x_{1m}}{a} r\right),$$

pentru $z > 0$; (42)

$$\dot{E}_{2z} = \frac{\dot{I}}{2\pi a \sigma_2} \underline{\gamma}_2 \frac{I_0(\underline{\gamma}_2 r)}{I_1(\underline{\gamma}_2 a)} -$$

$$- \left(\frac{\dot{I}}{\pi a^4 \sigma_2} \underline{\gamma}_1^2 - \underline{\gamma}_2^2\right) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x_{1m}^2 J_0(x_{1m}) e^{\underline{\lambda}_{2m} z}}{\left(1 + \frac{\underline{\lambda}_{2m}}{\underline{\lambda}_{1m}} \frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right) J_2^2(x_{1m}) \underline{\Lambda}_{1m}^2 \underline{\Lambda}_{2m}^2} J_0\left(\frac{x_{1m}}{a} r\right).$$

pentru $z < 0$. (43)

Pentru a verifica continuitatea componentei normale a densității de curent la suprafața de contact, se va stabili în prealabil o relație care va fi folosită în acest scop. Se adună la relația (27) ceea ce se obține din derivarea ambilor membri ai relației amintite multiplicați prin variabila r. Rezultatul acestei adunări va fi :

$$\frac{\varkappa\gamma_0 \dot{I}}{2\pi a}\left[\frac{I_1(\underline{\gamma}_1 r)+\underline{\gamma}_1 r I_1'(\underline{\gamma}_1 r)}{I_1(\underline{\gamma}_1 a)}-\frac{I_1(\underline{\gamma}_2 r)+\underline{\gamma}_2 r I_1'(\underline{\gamma}_2 r)}{I_1(\underline{\gamma}_2 a)}\right]=$$

$$=-\frac{\varkappa\gamma_0 \dot{I}}{\pi a^3}(\underline{\gamma}_1^2-\underline{\gamma}_2^2)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x_{1m}J_0(x_{1m})}{J_2^2(x_{1m})\,\underline{\Lambda}_{1m}^2\,\underline{\Lambda}_{2m}^2}\left[J_1\left(x_{1m}\frac{r}{a}\right)+x_{1m}\frac{r}{a}J_1'\left(x_{1m}\frac{r}{a}\right)\right]$$

sau, folosind relațiile (41) și simplificînd cu $\varkappa\gamma_0 r$,

$$\frac{\dot{I}}{2\pi a}\left[\frac{\underline{\gamma}_1 I_0(\underline{\gamma}_1 r)}{I_1(\underline{\gamma}_1 a)}-\frac{\underline{\gamma}_2 I_0(\underline{\gamma}_2 r)}{I_1(\underline{\gamma}_2 a)}\right]=$$

$$=-\frac{\dot{I}}{\pi a^4}(\underline{\gamma}_1^2-\underline{\gamma}_2^2)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x_{1m}^2 J_0(x_{1m})J_0\left(x_{1m}\dfrac{r}{a}\right)}{J_2^2(x_{1m})\,\underline{\Lambda}_{1m}^2\,\underline{\Lambda}_{2m}^2}. \qquad (27')$$

Vom arăta în cele ce urmează că $(\dot{J}_{1n})_{z=0}=(\dot{J}_{2n})_{z=0}$ sau

$$\sigma_1(\dot{E}_{1z})_{z=0}=\sigma_2(\dot{E}_{2z})_{z=0}.$$

Ținînd seama de expresiile (42) și (43) ale componentelor longitudinale ale cîmpurilor electrice, ultima condiție devine :

$$\frac{\dot{I}}{2\pi a}\frac{\underline{\gamma}_1 I_0(\underline{\gamma}_1 r)}{I_1(\underline{\gamma}_1 a)}+$$

$$+\frac{\dot{I}}{\pi a^4}(\underline{\gamma}_1^2-\underline{\gamma}_2^2)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x_{1m}^2 J_0(x_{1m})}{\left(1+\dfrac{\lambda_{1m}}{\underline{\lambda}_{2m}}\cdot\dfrac{\sigma_2}{\sigma_1}\right)J_2^2(x_{1m})\,\underline{\Lambda}_{1m}^2\,\underline{\Lambda}_{2m}^2}J_0\left(x_{1m}\frac{r}{a}\right)=$$

$$=\frac{\dot{I}}{2\pi a}\frac{\underline{\gamma}_2 I_0(\underline{\gamma}_2 r)}{I_1(\underline{\gamma}_2 a)}-$$

$$-\frac{\dot{I}}{\pi a^4}(\underline{\gamma}_1^2-\underline{\gamma}_2^2)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x_{1m}J_0(x_{1m})}{\left(1+\dfrac{\underline{\lambda}_{2m}}{\lambda_{1m}}\dfrac{\sigma_1}{\sigma_2}\right)J_2^2(x_{1m})\,\underline{\Lambda}_{1m}^2\,\underline{\Lambda}_{2m}^2}J_0\left(x_{1m}\frac{r}{a}\right)$$

sau, deoarece $\frac{1}{1+\frac{\underline{\lambda}_{2m}}{\underline{\lambda}_{1m}}\frac{\sigma_1}{\sigma_2}}+\frac{1}{1+\frac{\underline{\lambda}_{1m}}{\underline{\lambda}_{2m}}\frac{\sigma_2}{\sigma_1}}=1$, relația de mai sus se poate scrie mai simplu, în felul următor:

$$\frac{\dot{I}}{2\pi a}\left[\frac{\underline{\gamma}_1 I_0(\underline{\gamma}_1 r)}{I_1(\underline{\gamma}_1 a)}-\frac{\underline{\gamma}_2 I_0(\underline{\gamma}_2 r)}{I_1(\underline{\gamma}_2 a)}\right]=$$

$$=-\frac{\dot{I}}{\pi a^4}(\underline{\gamma}_1^2-\underline{\gamma}_2^2)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x_{1m}^2 J_0(x_{1m}) J_0\left(x_{1m}\frac{r}{a}\right)}{J_2^2(x_{1m})\,\underline{\Lambda}_{1m}^2\,\underline{\Lambda}_{2m}^2}$$

adică, tocmai relația (27′) stabilită anterior din condiția continuității componentei tangențiale a cîmpului magnetic. În concluzie:

$$(\dot{J}_{1n})_{z=0}=(\dot{J}_{2n})_{z=0}.$$

3. CALCULUL PUTERII

Vectorul lui Poynting la suprafața barei 1 se calculează în complex simplificat astfel:

$$\underline{S}_1=\left[\frac{1}{2\varkappa\gamma_0}\dot{E}_{1z}\,\dot{H}_1^*\right]_{r=a}=\frac{1}{2\varkappa\gamma_0}[\sqrt{2}\,\underline{E}_{1z}e^{j\omega t}\cdot\sqrt{2}\,\underline{H}_1^* e^{-j\omega t}]_{r=a}=\frac{1}{\varkappa\gamma_0}[\underline{E}_{1z}\underline{H}_1^*]_{r=a},$$

în care

$$[\underline{H}_1^*]_{r=a}=\frac{\varkappa\gamma_0\underline{I}^*}{2\pi a}.$$

Știind că $\underline{I}\underline{I}^*=I^2$, se obține următoarea valoare a vectorului lui Poynting:

$$(\underline{S}_1)_{r=a}=\frac{I^2\underline{\gamma}_1}{4\pi^2 a^2\sigma_1}\frac{I_0(\underline{\gamma}_1 a)}{I_1(\underline{\gamma}_1 a)}+$$

$$+\frac{I^2}{2\pi^2 a^5\sigma_1}(\underline{\gamma}_1^2-\underline{\gamma}_2^2)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x_{1m}^2 J_0^2(x_{1m})\,e^{-\underline{\lambda}_{1m}z}}{\left(1+\frac{\underline{\lambda}_{1m}}{\underline{\lambda}_{2m}}\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right)J_2^2(x_{1m})\,\underline{\Lambda}_{1m}^2\,\underline{\Lambda}_{2m}^2}.$$

Puterea aparentă complexă $\underline{P}_a=\int_0^l 2\pi a\,\underline{S}_1\,dz$, calculată cu ajutorul fluxului vectorului Poynting prin suprafața laterală a unui cilindru de

lungime l, va fi :

$$\underline{P}_a = \frac{\underline{\gamma}_1 l I^2}{2\pi a \sigma_1} \frac{I_0(\underline{\gamma}_1 a)}{I_1(\underline{\gamma}_1 a)} -$$

$$- \frac{I^2}{\pi a^4 \sigma_1} (\underline{\gamma}_1^2 - \underline{\gamma}_2^2) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x_{1m}^2 (e^{-\underline{\lambda}_{1m} l} - 1)}{\underline{\lambda}_{1m} \left(1 + \frac{\underline{\lambda}_{1m}}{\underline{\lambda}_{2m}} \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right) \underline{\Lambda}_{1m}^2 \underline{\Lambda}_{2m}^2} \left[\frac{J_0(x_{1m})}{J_2(x_{1m})}\right]^2,$$

iar rezistența de dispersie în regim armonic permanent, în oricare din cele două contacte cilindrice, va avea expresia :

$$R_{c\sim} = \frac{1}{I^2} \mathrm{Re}[\underline{P}_a].$$

Primit la redacție la 15 iulie 1964

CÎMPUL ELECTROMAGNETIC CUASISTAȚIONAR AL CONDUCTOARELOR RECTILINII PARCURSE DE CURENȚI ALTERNATIVI, ÎN PREZENȚA ECRANELOR ELECTROMAGNETICE CILINDRICE[1])

DE

ANDREI ȚUGULEA

Institutul politehnic, Cal. Griviței nr. 132, București

538.122 : 538.21 : 538.551

În lucrare este obținută soluția exactă a regimului cuasistaționar al cîmpului electromagnetic al unor conductoare rectilinii parcurse de curenți alternativi, paralele cu un ecran electromagnetic cilindric de grosime oarecare, firele fiind situate fie în interiorul, fie în exteriorul ecranului. Sînt calculate pierderile în ecran, coeficientul de ecranare și forțele electrodinamice. Pentru ecrane subțiri în raport cu raza lor medie se obțin mai multe soluții de aproximație și se determină domeniile lor de valabilitate. Se arată că, pentru problemele care prezintă interes în tehnica curenților tari și anume pentru cazul barelor de legătură ecranate dintre generatoarele de puteri mari și transformatoare, aproximația ecranului subțire este pe deplin acceptabilă.

1. INTRODUCERE

Tehnica actuală de producere a energiei electromagnetice tinde spre construirea unor unități generatoare de puteri unitare din ce în ce mai mari. Sînt construite sau se găsesc în stadiu de fabricație unități cu puteri cuprinse între 100 și 500 MVA [1]. Se fac studii și proiecte pentru unități pînă la 1 000 MVA. Conectarea acestor generatoare la transformatoarele ridicătoare de tensiune necesită sisteme de bare de legătură prin care

[1]) Articol apărut și în „Rev. Roum. Sci. Techn. – Electrotechn. Energ.", **9**, *4* (1964).

St. cerc. energ. electr. Tom 14 Nr. 4 p. 807–837 București 1964

circulă în regim normal de funcționare curenți de ordinul zecilor de mii de amperi și care în regim de avarie ating valori extrem de mari, condiționînd forțe electrodinamice de valori nemaiîntîlnite pînă în prezent în tehnică [2].

Dar chiar regimul normal de funcționare al acestor bare de legătură ridică probleme dificile. În afară de propriul lor regim termic, care poate

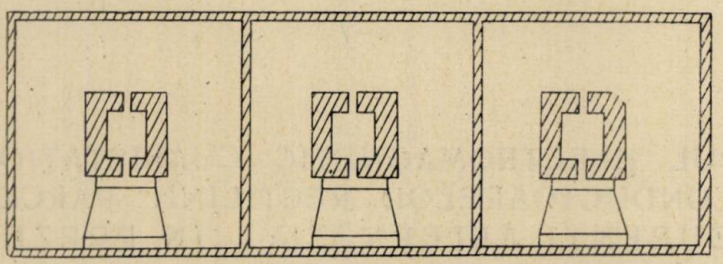


Fig. 1. — Ecrane electromagnetice dreptunghiulare.

fi evaluat abia după rezolvarea unor probleme complicate de efect pelicular și de apropiere, cîmpul magnetic alternativ al curenților foarte intenși ce parcurg barele determină pierderi prin curenți turbionari în piesele metalice masive ce alcătuiesc instalațiile înconjurătoare, încălzindu-le adesea la temperaturi inadmisibile.

O soluție utilizată tot mai frecvent în asemenea cazuri constă în utilizarea unor ecrane electromagnetice [1], [2], [3], care înconjoară sistemul de bare, de exemplu de tipul celor reprezentate în figura 1. Ele au drept scop ca reacțiunea magnetică a curenților turbionari induși în ecrane să micșoreze cîmpul magnetic în exteriorul sistemului de bare,

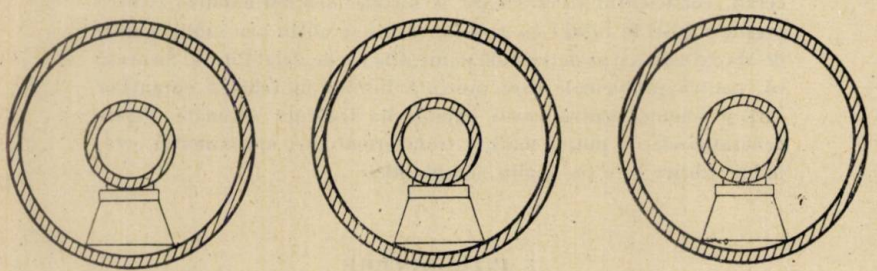


Fig. 2. — Ecrane electromagnetice circulare.

iar în unele cazuri, cînd fiecare fază se ecranează în parte, ecranele preiau și o parte din forțele electrodinamice în regim de avarie. Prin aceasta sistemul de bare se transformă, de fapt, într-un aparat complex a cărui proiectare ridică numeroase probleme teoretice și practice.

Alegerea tipului de ecran, a materialului din care se fabrică acestea, calculul pierderilor în ecran și în bare, calculul încălzirii acestora, calculul

forţelor electrodinamice, a efectului de ecran etc., constituie o înşiruire sumară a acestor probleme.

Din literatura de specialitate rezultă, că o răspîndire din ce în ce mai mare au căpătat ecranele cilindrice circulare, utilizate pentru ecranarea fiecărei faze în parte (fig. 2) [4].

Într-o primă aproximaţie se poate considera că, curenţii turbionari induşi în fiecare ecran se datoresc cîmpului magnetic al curenţilor din bare, neglijînd interacţiunea electromagnetică dintre ecrane, de care se poate ţine apoi seamă într-o aproximaţie succesivă.

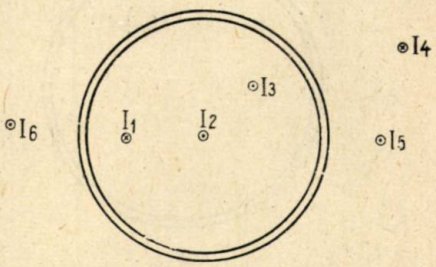


Fig. 3. — Ansamblu de fire parcurse de curenţi situate în exteriorul şi interiorul unui ecran circular.

Avînd în vedere dimensiunile transversale mari ale ecranelor în comparaţie cu dimensiunile transversale ale barelor, acestea din urmă se pot aproxima cu suficientă precizie prin nişte conductoare filiforme.

De aici rezultă că, din punctul de vedere al electrotehnicii teoretice, prezintă importanţă problema determinării cîmpului electromagnetic în ecran şi în afara ecranului, în situaţia în care avem un ecran cilindric circular situat în prezenţa unor conductoare filiforme paralele cu axa lui, parcurse de curenţi alternativi, unii aflîndu-se în interiorul ecranului, iar alţii în exteriorul lui (fig. 3).

Asemenea probleme se ivesc, de exemplu, şi în cazul cablelor ecranate de telecomunicaţii, dar soluţiile obţinute în acele cazuri [5] nu se pot aplica fără rezerve în cazul de faţă, deoarece ele sînt obţinute în ipoteza frecvenţelor pentru care efectul pelicular este net.

De aceea, în lucrarea de faţă se urmăreşte obţinerea unei soluţii generale, valabilă pentru orice frecvenţă, cum şi a unor aproximaţii care necesită calcule mai puţin laborioase. Din cercetarea literaturii de specialitate se constată că o asemenea soluţie nu a fost obţinută pînă în prezent.

Fie, prin urmare, un ecran electromagnetic cilindric foarte lung, de rază interioară a şi rază exterioară b, situat în cîmpul magnetic al unor conductoare filiforme parcurse de curenţi alternativi de aceeaşi frecvenţă. Poziţia unuia din cele N conductoare e dată prin coordonatele polare r şi ϑ ale urmei acestuia în planul figurii 3.

Materialul ecranului se presupune linear şi omogen, cu conductivitatea σ şi permeabilitatea μ constante şi independente de mărimile cîmpului. În acest caz se poate aplica superpoziţia efectelor considerînd cîmpul electromagnetic rezultant drept suprapunerea cîmpurilor electromagnetice pe care le-ar produce în prezenţa ecranului, fiecare dintre conductoare, dacă ar exista singur în aceeaşi poziţie relativă faţă de ecran şi fiind parcurs de acelaşi curent.

Prin aceasta, problema se reduce la studiul cîmpului electromagnetic condiţionat de un singur fir parcurs de curent alternativ în două situaţii

distincte : aşezat în interiorul ecranului, şi aşezat în exteriorul lui (fig. 4 *a*, *b*). Ţinînd seama de faptul că, de obicei, lungimea barelor de legătură întrece cu mult dimensiunile transversale ale sistemului de bare, vom rezolva problema în ipoteza unui cîmp magnetic plan-paralel, adică vom

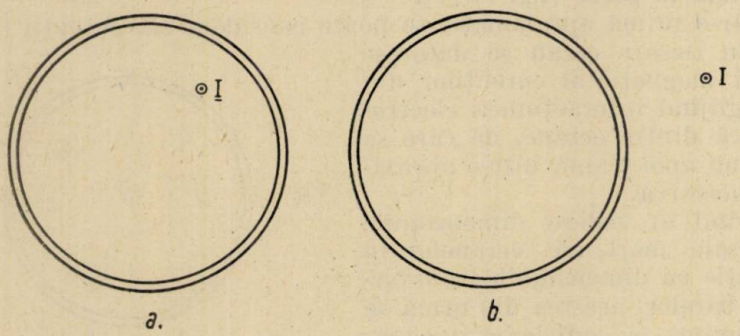


Fig. 4. — Ecran circular cu fir parcurs de curent : *a*) în interior ; *b*) în exterior.

neglija efectele capetelor. Mai ţinem seama că la frecvenţele care ne interesează, regimul cîmpului electromagnetic e cuasistaţionar atît în conductoare, cît şi în afara lor.

2. CÎMPUL ELECTROMAGNETIC AL UNUI CONDUCTOR SITUAT ÎN INTERIORUL ECRANULUI

Este evident că sistemul axelor de coordonate se poate alege ca în figura 5, unde r şi ϑ sînt coordonatele polare ale unui punct curent, $r_\alpha < a$ şi $\vartheta_\alpha = 0$ coordonatele polare ale urmei firului parcurs de curentul $i^{(\alpha)} = \sqrt{2}\, I^{(\alpha)} \sin \omega t$[2]). Ţinînd seama că ne interesează regimul armonic permanent, vom utiliza reprezentările în complex ale mărimilor electromagnetice.

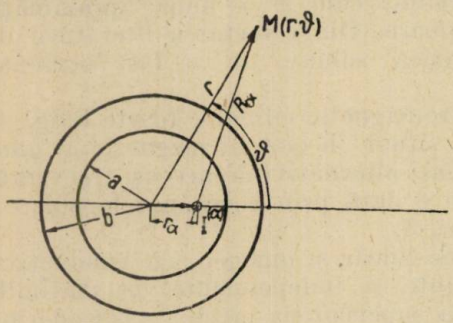


Fig. 5. — Alegerea coordonatelor pentru cazul firului situat în interiorul ecranului.

În aceste condiţii potenţialul magnetic vector $\underline{A}^{(\alpha)}$ va avea o singură componentă $\underline{A}_z^{(\alpha)}$ dirijată longitudinal în sensul de curgere a curentului [3]) şi nu va depinde de coordonata z,

$$\underline{A}^{(\alpha)}(r, \vartheta) = \boldsymbol{k}\, \underline{A}^{(\alpha)}(r, \vartheta) \qquad (1)$$

unde $\boldsymbol{k}$ e versorul axei Oz.

[2]) Indicele α se referă la curenţii şi cîmpurile conductoarelor situate în interiorul ecranului.
[3]) Se consideră cazul uzual cînd se alege $\operatorname{div} \underline{A} = 0$.

Deoarece ecranul delimitează trei domenii distincte, cavitatea interioară ($r \leqslant a$), interiorul ecranului ($a \leqslant r \leqslant b$) şi exteriorul ecranului ($b \geqslant r$), ecuaţiile cîmpului vor trebui să fie rezolvate pentru fiecare din aceste domenii. Fie $\underline{A}_i^{(\alpha)}(r, \vartheta)$ — potenţialul vector în cavitatea interioară a ecranului, $\underline{A}^{(\alpha)}(r, \vartheta)$ — potenţialul vector în masa ecranului şi $\underline{A}_e^{(\alpha)}(r, \vartheta)$ — potenţialul vector în exteriorul ecranului.

Aceste mărimi vor satisface ecuaţiile [10]:

$$\Delta \underline{A}_i^{(\alpha)} = 0 \qquad (r \leqslant a) \tag{2}$$

cu excepţia punctului în care se găseşte firul parcurs de curent, unde va apare o singularitate logaritmică specifică conductoarelor rectilinii infinite parcurse de curent;

$$\Delta \underline{A}^{(\alpha)} - j\omega\mu\sigma \underline{A}^{(\alpha)} = 0 \qquad (a \leqslant r \leqslant b) \tag{3}$$

în masa ecranului, unde ω e pulsaţia curentului alternativ, iar $j = \sqrt{-1}$;

$$\Delta \underline{A}_e^{(\alpha)} = 0 \qquad (b \leqslant r) \tag{4}$$

în exteriorul ecranului, cu o singularitate logaritmică la infinit.

Soluţiile ecuaţiilor (2), (3) şi (4), obţinute pentru fiecare domeniu în parte, vor conţine constante de integrare care se vor determina din condiţiile de trecere, cum şi din condiţiile de comportare a soluţiei pe axa ecranului şi la infinit în sens radial.

2.1. *Soluţia problemei în domeniul cavităţii interioare a ecranului* ($r \leqslant a$). Ţinînd seama de singularitatea logaritmică a potenţialului vector $\underline{A}_i^{(\alpha)}$ în punctele în care e situat conductorul filiform purtător de curent ($r = r_\alpha < a$, $\vartheta_\alpha = 0$), este natural să se caute soluţia sub forma:

$$\underline{A}_i^{(\alpha)} = \underline{A}_i^{(\alpha)'} + \underline{A}_i^{(\alpha)''} \tag{5}$$

unde $\underline{A}_i^{(\alpha)'}$ satisface ecuaţia lui Laplace fără restricţii, iar $\underline{A}_i^{(\alpha)''}$ are expresia:

$$\underline{A}_i^{(\alpha)''} = -\frac{\mu_0 \underline{I}^{(\alpha)}}{2\pi} \ln R_\alpha = -\frac{\mu_0 \underline{I}^{(\alpha)}}{2\pi} \ln [r^2 + r_\alpha^2 - 2r\, r_\alpha \cos\vartheta]^{\frac{1}{2}} \tag{6}$$

şi satisface ecuaţia lui Laplace cu excepţia punctului în care $R_\alpha = 0$.

$\underline{A}_i^{(\alpha)'}$ va satisface ecuaţia lui Laplace în coordonate cilindrice:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial \underline{A}_i^{(\alpha)'}}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \underline{A}_i^{(\alpha)'}}{\partial \vartheta^2} = 0, \tag{7}$$

care se poate integra prin metoda separării variabilelor [6], obţinîndu-se soluţia generală:

$$\underline{A}_i^{(\alpha)'} = \sum_{n=0}^{\infty} \underline{B}_n^{(\alpha)} r^n \cdot \cos n\vartheta, \tag{8}$$

în care n e număr întreg, pentru a se asigura periodicitatea soluţiei în raport cu ϑ, şi în care s-a mai ţinut seama, de simetria cîmpului în raport

cu axa $\vartheta = 0$, fapt care elimină termenii în sinus, și de faptul că soluția e finită pe axa ecranului.

Soluția generală rezultantă va fi deci :

$$\underline{A}_i^{(\alpha)} = -\frac{\mu_0 \underline{I}^{(\alpha)}}{2\pi} \ln R_\alpha + \sum_{n=0}^{\infty} \underline{B}_n^{(\alpha)} r^n \cos n\vartheta, \tag{9}$$

în care constantele $\underline{B}_n^{(\alpha)}$ urmează a fi determinate din condițiile de trecere.

2.2. *Soluția problemei în domeniul exterior ecranului* ($r \geqslant b$). Ținînd seama de faptul că, curenții turbionari induși în ecran dau o contribuție nulă la solenația totală prin orice suprafață sprijinită pe o curbă Γ oarecare ce cuprinde ecranul în interior, rezultă că acesta produce doar o redistribuire a cîmpului magnetic în exteriorul ecranului, fără a modifica tensiunea magnetomotoare în lungul curbei Γ. În particular, pentru puncte suficient de depărtate de axa ecranului efectul ecranului e neglijabil și cîmpul magnetic se poate calcula ca și cum ar fi produs numai de fir.

Se știe însă [7] că potențialul vector al unui fir rectiliniu infinit, parcurs de curent, prezintă o singularitate logaritmică și la infinit.

Vom căuta deci soluția problemei în exterior sub forma :

$$\underline{A}_e^{(\alpha)} = \underline{A}_e^{(\alpha)'} + \underline{A}_e^{(\alpha)''} \tag{10}$$

unde $\underline{A}_e^{(\alpha)'}$ satisface ecuația lui Laplace fără restricții și tinde la zero cînd $r \to \infty$, iar $\underline{A}_e^{(\alpha)''}$ are expresia :

$$\underline{A}_e^{(\alpha)''} = -\frac{\mu_0 \underline{I}^{(\alpha)}}{2\pi} \ln R_\alpha . \tag{11}$$

Integrînd ecuația lui Laplace pentru $\underline{A}_e^{(\alpha)'}$, prin metoda separării variabilelor, și ținînd seama de periodicitatea, simetria și mărginirea soluției, se obține soluția generală rezultantă :

$$\underline{A}_e^{(\alpha)} = -\frac{\mu_0 \underline{I}^{(\alpha)}}{2\pi} \ln R_\alpha + \sum_{n=0}^{\infty} r^{-n} \underline{C}_n^{(\alpha)} \cos n\vartheta \tag{12}$$

unde n e un număr întreg, iar $\underline{C}_n^{(\alpha)}$ sînt constante de integrare ce urmează a fi determinate.

2.3. *Soluția problemei în însuși ecranul* ($a \leqslant r \leqslant b$). În interiorul ecranului e satisfăcută ecuația (3), care se mai transcrie și :

$$\Delta \underline{A}^{(\alpha)} + \gamma^2 \underline{A}^{(\alpha)} = 0 \tag{13}$$

unde s-a notat ca de obicei :

$$\gamma = \sqrt{-j\omega\mu\sigma} = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} (1 - j) = \alpha (1 - j) = \frac{1}{\delta} (1 - j) \tag{14}$$

unde δ e adîncimea de pătrundere a undei plane în mediul conductor [8].

Scriind ecuația (13) în coordonate cilindrice și utilizînd metoda separării variabilelor, se obține în definitiv soluția generală :

$$\underline{A}^{(\alpha)} = \sum_{n=0}^{\infty} [\underline{L}_n^{(\alpha)} \mathrm{H}_n^{(1)}(\gamma r) + \underline{M}_n^{(\alpha)} \mathrm{H}_n^{(2)}(\gamma r)] \cos n\vartheta, \tag{15}$$

în care s-a ținut seama de periodicitatea soluției (n e număr întreg) și de simetria ei în raport cu axa $\vartheta = 0$ [$\underline{A}^{(\alpha)}(r, \vartheta) = \underline{A}^{(\alpha)}(r, -\vartheta)$]. În această soluție $\mathrm{H}_n^{(1)}(\gamma r)$ și $\mathrm{H}_n^{(2)}(\gamma r)$ sînt funcții Hankel de prima și a doua speță, de ordinul n și de argumentul complex γr.

2.4. *Determinarea constantelor de integrare.* Constantele de integrare $\underline{B}_n^{(\alpha)}$, $\underline{C}_n^{(\alpha)}$, $\underline{L}_n^{(\alpha)}$ și $\underline{M}_n^{(\alpha)}$ se determină numai din condițiile de trecere la suprafețele de discontinuitate care mărginesc ecranul, deoarece de condițiile din origine și de la infinit s-a ținut deja seama. Aceste condiții exprimă conservarea potențialului vector (sau conservarea componentei tangențiale a intensității cîmpului electric) și conservarea derivatei după normală a potențialului vector împărțită prin μ (care exprimă conservarea componentei tangențiale a intensității cîmpului magnetic.

În cazul problemei considerate, condițiile de trecere se exprimă deci :

$$\left.\begin{aligned} \underline{A}_i^{(\alpha)}(a, \vartheta) &= \underline{A}^{(\alpha)}(a, \vartheta) \\ \frac{1}{\mu_0}\left(\frac{\partial \underline{A}_i^{(\alpha)}}{\partial r}\right)_{r=a} &= \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial \underline{A}^{(\alpha)}}{\partial r}\right)_{r=a} \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

pentru suprafața interioară a ecranului ($r = a$) și

$$\left.\begin{aligned} \underline{A}^{(\alpha)}(b, \vartheta) &= \underline{A}_e^{(\alpha)}(b, \vartheta) \\ \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial \underline{A}^{(\alpha)}}{\partial r}\right)_{r=b} &= \frac{1}{\mu_0}\left(\frac{\partial \underline{A}_e^{(\alpha)}}{\partial r}\right)_{r=b} \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

pentru suprafața exterioară a ecranului ($r = b$).

În cele ce urmează vom presupune că materialul ecranului este neferomagnetic ($\mu = \mu_0$) și vom ține seama de faptul că pentru $r > r_\alpha$ e valabilă dezvoltarea în serie [7] :

$$-\ln R_\alpha = -\ln r + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{r_\alpha}{r}\right)^n \cos n\vartheta. \tag{18}$$

Ținînd seama de expresiile (9), (12), (15) și (18) și introducîndu-le în relațiile (16) și (17), se obțin următoarele ecuații care determină con-

stantele de integrare :

$$\left.\begin{aligned}
&-\frac{\mu_0 \underline{I}^{(\alpha)}}{2\pi} \ln a + \frac{\mu_0 \underline{I}^{(\alpha)}}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{r_\alpha}{a}\right)^n \cos n\vartheta + \sum_{n=0}^{\infty} \underline{B}_n^{(\alpha)} a^n \cos n\vartheta = \\
&\qquad = \sum_{n=0}^{\infty} [\underline{L}_n^{(\alpha)} \mathrm{H}_n^{(1)}(\gamma a) + \underline{M}_n^{(\alpha)} \mathrm{H}_n^{(2)}(\gamma a)] \cos n\vartheta ; \\
&-\frac{\underline{I}^{(\alpha)}}{2\pi a} - \frac{\underline{I}^{(\alpha)}}{2\pi r_\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r_\alpha}{a}\right)^{n+1} \cos n\vartheta + \frac{1}{\mu_0} \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \underline{B}_n^{(\alpha)} a^{n-1} \cos n\vartheta = \\
&\qquad = \frac{\gamma}{\mu_0} \sum_{n=0}^{\infty} [\underline{L}_n^{(\alpha)} \mathrm{H}_n^{(1)'}(\gamma a) + \underline{M}_n^{(\alpha)} \mathrm{H}_n^{(2)'}(\gamma a)] \cos n\vartheta,
\end{aligned}\right\} \quad (16')$$

respectiv :

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty} [\underline{L}_n^{(\alpha)} \mathrm{H}_n^{(1)}(\gamma b) + \underline{M}_n^{(\alpha)} \mathrm{H}_n^{(2)}(\gamma b)] \cos n\vartheta = \\
&= -\frac{\mu_0 \underline{I}^{(\alpha)}}{2\pi} \ln b + \frac{\mu_0 \underline{I}^{(\alpha)}}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{r_\alpha}{b}\right)^n \cos n\vartheta + \sum_{n=0}^{\infty} \underline{C}_n^{(\alpha)} b^{-n} \cos n\vartheta \\
&\qquad \frac{\gamma}{\mu_0} \sum_{n=0}^{\infty} [\underline{L}_n^{(\alpha)} \mathrm{H}_n^{(1)'}(\gamma b) + \underline{M}_n^{(\alpha)} \mathrm{H}_n^{(2)'}(\gamma b)] \cos n\vartheta = \\
&= -\frac{\underline{I}^{(\alpha)}}{2\pi b} - \frac{\underline{I}^{(\alpha)}}{2\pi r_\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r_\alpha}{b}\right)^{n+1} \cos n\vartheta - \frac{1}{\mu_0} \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \underline{C}_n^{(\alpha)} b^{-n-1} \cos n\vartheta.
\end{aligned}\right\} \quad (17')$$

Ecuațiile (16′) și (17′) trebuind să fie satisfăcute pentru orice valoare a unghiului ϑ, implică egalitatea coeficienților dezvoltării în $\cos n\vartheta$.

Rezultă, prin urmare, ecuațiile :

$$\left.\begin{aligned}
&-\frac{\mu_0 \underline{I}^{(\alpha)}}{2\pi} \ln a + \underline{B}_0^{(\alpha)} = \underline{L}_0^{(\alpha)} \mathrm{H}_0^{(1)}(\gamma a) + \underline{M}_0^{(\alpha)} \mathrm{H}_0^{(2)}(\gamma a) \\
&\frac{\mu_0 \underline{I}^{(\alpha)}}{2\pi n} \left(\frac{r_\alpha}{a}\right)^n + \underline{B}_n^{(\alpha)} a^n = \underline{L}_n^{(\alpha)} \mathrm{H}_n^{(1)}(\gamma a) + \underline{M}_n^{(\alpha)} \mathrm{H}_n^{(2)}(\gamma a) \qquad (n = 1, 2 \ldots) \\
&-\frac{\underline{I}^{(\alpha)}}{2\pi a} = \frac{\gamma}{\mu_0} [\underline{L}_0^{(\alpha)} \mathrm{H}_0^{(1)'}(\gamma a) + \underline{M}_0^{(\alpha)} \mathrm{H}_0^{(2)'}(\gamma a)] \\
&-\frac{\underline{I}^{(\alpha)}}{2\pi r_\alpha} \left(\frac{r_\alpha}{a}\right)^{n+1} + \frac{n \underline{B}_n^{(\alpha)}}{\mu_0} a^{n-1} = \frac{\gamma}{\mu_0} [\underline{L}_n^{(\alpha)} \mathrm{H}_n^{(1)'}(\gamma a) + \underline{M}_n^{(\alpha)} \mathrm{H}_n^{(2)'}(\gamma a)] \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (n = 1, 2 \ldots)
\end{aligned}\right\} \quad (16'')$$

respectiv :

$$\left.\begin{aligned}
-\frac{\mu_0 \underline{I}^{(\alpha)}}{2\pi}\ln b + \underline{C}_0^{(\alpha)} &= \underline{L}_0^{(\alpha)} \mathbf{H}_0^{(1)}(\gamma b) + \underline{M}_0^{(\alpha)} \mathbf{H}_0^{(2)}(\gamma b)\\
\frac{\mu_0 \underline{I}^{(\alpha)}}{2\pi n}\left(\frac{r_\alpha}{b}\right)^n + \underline{C}_n^{(\alpha)}\, b^{-n} &= \underline{L}_n^{(\alpha)} \mathbf{H}_n^{(1)}(\gamma b) + \underline{M}_n^{(\alpha)} \mathbf{H}_n^{(2)}(\gamma b)\\
-\frac{\underline{I}^{(\alpha)}}{2\pi b} &= \frac{\gamma}{\mu_0}\left[\underline{L}_0^{(\alpha)} \mathbf{H}_0^{(1)'}(\gamma b) + \underline{M}_0^{(\alpha)} \mathbf{H}_0^{(2)'}(\gamma b)\right]\\
-\frac{\underline{I}^{(\alpha)}}{2\pi r_\alpha}\left(\frac{r_\alpha}{b}\right)^{n+1} - \frac{n}{\mu_0}\underline{C}_n^{(\alpha)}\, b^{-n-1} &= \frac{\gamma}{\mu_0}\left[\underline{L}_n^{(\alpha)} \mathbf{H}_n^{(1)'}(\gamma b) + \underline{M}_n^{(\alpha)} \mathbf{H}_n^{(2)'}(\gamma b)\right].
\end{aligned}\right\} \quad (17'')$$

$$n = 1, 2 \ldots$$

Rezolvînd aceste ecuații în raport cu constantele necunoscute, se obține :

$$\left.\begin{aligned}
\underline{B}_0^{(\alpha)} &= \frac{\mu_0 \underline{I}^{(\alpha)}}{2\pi}\ln a + \underline{L}_0^{(\alpha)} \mathbf{H}_0^{(1)}(\gamma a) + \underline{M}_0^{(\alpha)} \mathbf{H}_0^{(2)}(\gamma a)\\
\underline{C}_0^{(\alpha)} &= \frac{\mu_0 \underline{I}^{(\alpha)}}{2\pi}\ln b + \underline{L}_0^{(\alpha)} \mathbf{H}_0^{(1)}(\gamma b) + \underline{M}_0^{(\alpha)} \mathbf{H}_0^{(2)}(\gamma b)
\end{aligned}\right\} \quad (19)$$

unde :

$$\left.\begin{aligned}
L_0^{(\alpha)} &= \frac{\mu_0 \underline{I}^{(\alpha)}}{2\pi\gamma\Delta_0}\left[\frac{\mathbf{H}_0^{(2)'}(\gamma a)}{b} - \frac{\mathbf{H}_0^{(2)'}(\gamma b)}{a}\right]\\
M_0^{(\alpha)} &= \frac{\mu_0 \underline{I}^{(\alpha)}}{2\pi\gamma\Delta_0}\left[\frac{\mathbf{H}_0^{(1)'}(\gamma b)}{a} - \frac{\mathbf{H}_0^{(1)'}(\gamma a)}{b}\right]
\end{aligned}\right\} \quad (19')$$

și unde

$$\Delta_0 = \mathbf{H}_0^{(1)'}(\gamma a)\,\mathbf{H}_0^{(2)'}(\gamma b) - \mathbf{H}_0^{(1)'}(\gamma b)\,\mathbf{H}_0^{(2)'}(\gamma a);$$

respectiv :

$$\left.\begin{aligned}
\underline{B}_n^{(\alpha)} &= a^{-n}\left[-\frac{\mu_0 \underline{I}^{(\alpha)}}{2\pi n}\left(\frac{r_\alpha}{a}\right)^n + \underline{L}_n^{(\alpha)} \mathbf{H}_n^{(1)}(\gamma a) + \underline{M}_n^{(\alpha)} \mathbf{H}_n^{(2)}(\gamma a)\right]\\
\underline{C}_n^{(\alpha)} &= b^n\left[-\frac{\mu_0 \underline{I}^{(\alpha)}}{2\pi n}\left(\frac{r_\alpha}{b}\right)^n + \underline{L}_n^{(\alpha)} \mathbf{H}_n^{(1)}(\gamma b) + \underline{M}_n^{(\alpha)} \mathbf{H}_n^{(2)}(\gamma b)\right]
\end{aligned}\right\} \quad (20)$$

unde :

$$\left.\begin{aligned}
L_n^{(\alpha)} &= \frac{\mu_0 \underline{I}^{(\alpha)}}{\pi n \Delta_n}\cdot\left(\frac{r_\alpha}{a}\right)^n\left[\mathbf{H}_n^{(2)}(\gamma b) + \frac{\gamma b}{n}\mathbf{H}_n^{(2)'}(\gamma b)\right],\\
M_n^{(\alpha)} &= -\frac{\mu_0 \underline{I}^{(\alpha)}}{\pi n \Delta_n}\cdot\left(\frac{r_\alpha}{a}\right)^n\left[\mathbf{H}_n^{(1)}(\gamma b) + \frac{\gamma b}{n}\mathbf{H}_n^{(1)'}(\gamma b)\right],
\end{aligned}\right\} \quad (21)$$

în care :

$$\Delta_n = \left[H_n^{(1)}(\gamma a) - \frac{\gamma a}{n} H_n^{(1)'}(\gamma a)\right]\left[H_n^{(2)}(\gamma b) + \frac{\gamma b}{n} H_n^{(2)'}(\gamma b)\right] - \\ - \left[H_n^{(2)}(\gamma a) - \frac{\gamma a}{n} H_n^{(2)'}(\gamma a)\right]\left[H_n^{(1)}(\gamma b) + \frac{\gamma b}{n} H_n^{(1)'}(\gamma b)\right]. \tag{22}$$

Ţinînd seama de relaţia [6] :

$$H_n'(x) = H_{n-1} - \frac{n}{x} H_n(x) \tag{23}$$

valabilă pentru funcţiile Hankel de orice ordin de prima şi a doua speţă, expresiile determinanţilor Δ_n devin :

$$\Delta_n = \frac{2\gamma b}{n}\left[H_n^{(1)}(\gamma a) H_{n-1}^{(2)}(\gamma b) - H_n^{(2)}(\gamma a) H_{n-1}^{(1)}(\gamma b)\right] + \\ + \frac{\gamma^2 ab}{n^2}\left[H_{n-1}^{(2)}(\gamma a) H_{n-1}^{(1)}(\gamma b) - H_{n-1}^{(2)}(\gamma b) H_{n-1}^{(1)}(\gamma a)\right] \tag{24}$$

iar pentru expresiile coeficienţilor $L_n^{(\alpha)}$ şi $M_n^{(\alpha)}$ mai rezultă în definitiv :

$$\left.\begin{aligned} \underline{L}_n^{(\alpha)} &= \frac{\mu_0 \underline{I}^{(\alpha)}}{\pi n \Delta_n}\left(\frac{r_\alpha}{a}\right)^n \cdot \frac{\gamma b}{n} H_{n-1}^{(2)}(\gamma b) \\ \underline{M}_n^{(\alpha)} &= -\frac{\mu_0 \underline{I}^{(\alpha)}}{\pi n \Delta_n}\left(\frac{r_\alpha}{a}\right)^n \cdot \frac{\gamma b}{n} H_{n-1}^{(1)}(\gamma b). \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Cu aceste expresii soluţia generală pentru potenţialul vector în masa ecranului rezultă :

$$\underline{A}^{(\alpha)}(r, \vartheta) = \\ = \frac{\mu_0 \underline{I}^{(\alpha)}}{2\pi}\left\{\frac{[b H_1^{(2)}(\gamma b) - a H_1^{(2)}(\gamma a)] H_0^{(1)}(\gamma r) + [a H_1^{(1)}(\gamma a) - b H_1^{(1)}(\gamma b)] H_0^{(2)}(\gamma r)}{\Delta_0 \gamma ab} + \right. \\ \left. + 2\gamma b \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \Delta_n}\left[\left(\frac{r_\alpha}{a}\right)^n H_{n-1}^{(2)}(\gamma b) H_n^{(1)}(\gamma r) - \left(\frac{r_\alpha}{a}\right)^n H_{n-1}^{(1)}(\gamma b) H_n^{(2)}(\gamma r)\right] \cdot \cos n\vartheta\right\}. \tag{26}$$

Ţinînd seama de dezvoltările asimptotice ale funcţiunilor Hankel, pentru valori mari ale argumentelor [6] se obţine soluţia :

$$\underline{A}^{(\alpha)} = \frac{\mu_0 \underline{I}^{(\alpha)}}{2\pi j \gamma} \frac{d}{(ab)^{3/2}} \operatorname{cotg} \gamma (d - x) + \\ + \frac{\mu_0 \underline{I}^{(\alpha)}}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \gamma (d-x) \cdot \left(\frac{r_\alpha}{a}\right)^n}{n\left(\cos \gamma d - \frac{\gamma b}{2n} \sin \gamma d\right)} \cdot \cos n\vartheta \tag{27}$$

unde s-a notat $r = a + x$ și s-a aproximat : $\frac{1}{\sqrt{1+\frac{x}{a}}} = \left(1+\frac{x}{a}\right)^{-\frac{1}{2}} =$

$= \left(1 - \frac{x}{2a}\right) + \approx 1$; $d = b - a$.

Această expresie e deosebit de comodă în aplicații, deoarece nu mai conține funcții cilindrice, iar funcțiile trigonometrice de argument complex se exprimă cu ajutorul funcțiilor hiperbolice și trigonometrice de argument real, care sînt tabelate pentru o gamă extrem de largă de valori.

În cazul particular în care conductorul e situat în centrul ecranului ($r_\alpha = 0$), se obține imediat :

$$\underline{B}_n^{(\alpha)} = \underline{C}_n^{(\alpha)} = \underline{L}_n^{(\alpha)} = \underline{M}_n^{(\alpha)} = 0 \qquad \text{pentru } n \neq 0,$$

în soluții rămînînd numai constantele $\underline{B}_0^{(\alpha)}$, $\underline{C}_0^{(\alpha)}$, $\underline{L}_0^{(\alpha)}$, $\underline{M}_0^{(\alpha)}$. Rezultă astfel soluția cunoscută în literatură :

$$\begin{aligned} \underline{A}_i^{(\alpha)} &= -\frac{\mu_0 \underline{I}^{(\alpha)}}{2\pi} \ln r + \underline{B}_0^{(\alpha)} \\ \underline{A}^{(\alpha)} &= \underline{L}_0^{(\alpha)} \mathrm{H}_0^{(1)}(\gamma r) + \underline{M}_0^{(\alpha)} \mathrm{H}_0^{(2)}(\gamma r) \\ \underline{A}_e^{(\alpha)} &= -\frac{\mu_0 \underline{I}^{(\alpha)}}{2\pi} \ln r + \underline{C}_0^{(\alpha)} \end{aligned} \tag{28}$$

unde $\underline{L}_0^{(\alpha)}$, $\underline{M}_0^{(\alpha)}$, $\underline{B}_0^{(\alpha)}$ și $\underline{C}_0^{(\alpha)}$ au valori ce rezultă din expresiile (19) și (19′).

3. CÎMPUL ELECTROMAGNETIC AL UNUI CONDUCTOR SITUAT ÎN EXTERIORUL ECRANULUI

Considerăm un conductor așezat în afara ecranului, ca în fig. 6, urma sa avînd coordonatele polare $r_\beta > b$, $\vartheta_\beta = 0$. Acest conductor e parcurs de curentul sinusoidal $i^{(\beta)} = \sqrt{2}\, I^{(\beta)} \sin \omega t$. *) Utilizînd, ca și în cazul problemei precedente, reprezentările în complex ale mărimilor armonice, vom avea de rezolvat următoarele ecuații pentru potențialul vector $\underline{A}^{(\beta)}(r, \vartheta) = \boldsymbol{k}\, \underline{A}^{(\beta)}(r, \vartheta)$:

$$\Delta \underline{A}_i^{(\beta)} = 0 \qquad (r \leqslant a) \tag{29}$$

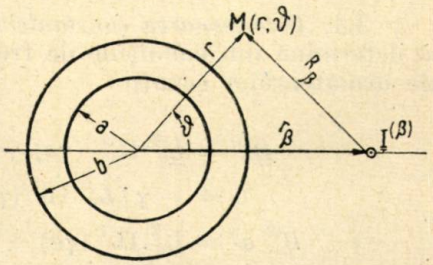


Fig. 6. — Alegerea coordonatelor pentru cazul firului situat în exteriorul ecranului.

*) Indicele β se referă la curenții și cîmpurile conductoarelor situate în exteriorul ecranului.

fără nici un fel de restricţii ;

$$\Delta \underline{A}^{(\beta)} - j\omega\mu\sigma \underline{A}^{(\beta)} = 0 \qquad (a \leqslant r \leqslant b) \tag{30}$$

în masa ecranului ;

$$\Delta \underline{A}_e^{(\beta)} = 0 \qquad (r \leqslant b) \tag{31}$$

cu excepţia punctului $r = r_\beta$, $\vartheta_\beta = 0$ şi a punctelor de la infinit, unde potenţialul vector are iarăşi singularităţi logaritmice.

3.1. *Soluţia problemei în domeniul cavităţii interioare a ecranului* ($r \leqslant a$). Utilizînd ecuaţia lui Laplace în coordonate cilindrice, ţinînd seama că soluţia e finită în origine şi simetrică în raport cu axa $\vartheta = 0$, se obţine prin metoda separării variabilelor :

$$\underline{A}_i^{(\beta)} = \sum_{n=0}^{\infty} \underline{B}_n^{(\beta)} r^n \cos n\vartheta \tag{32}$$

unde constantele urmează a fi determinate din condiţiile de trecere.

3.2. *Soluţia problemei în exteriorul ecranului* ($r \geqslant b$). Ţinînd seama de singularităţile amintite mai înainte şi procedînd la fel ca în cazul conductorului situat în interiorul ecranului, se obţine soluţia :

$$\underline{A}_e^{(\beta)}(r, \vartheta) = -\frac{\mu_0 \underline{I}^{(\beta)}}{2\pi} \ln R_\beta + \sum_{n=0}^{\infty} \underline{C}_n^{(\beta)} r^{-n} \cos n\vartheta. \tag{33}$$

3.3. *Soluţia problemei în însuşi ecranul.* Soluţia ecuaţiei în masa ecranului e aceeaşi ca şi în primul caz, adică :

$$\underline{A}^{(\beta)}(r, \vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} [\underline{L}_n^{(\beta)} \mathrm{H}_n^{(1)}(\gamma r) + \underline{M}_n^{(\beta)} \mathrm{H}_n^{(2)}(\gamma r)]. \tag{34}$$

3.4. *Determinarea constantelor de integrare.* Constantele de integrare se determină din condiţiile de trecere (16) şi (17) şi rezultă drept soluţii ale următoarelor ecuaţii :

$$\left.\begin{aligned}
\underline{B}_0^{(\beta)} &= \underline{L}_0^{(\beta)} \mathrm{H}_0^{(1)}(\gamma a) + \underline{M}_0^{(\beta)} \mathrm{H}_0^{(2)}(\gamma a) \\
0 &= -\gamma [\underline{L}_0^{(\beta)} \mathrm{H}_0^{(1)'}(\gamma a) + \underline{M}_0^{(\beta)} \mathrm{H}_0^{(2)'}(\gamma a)] \\
\underline{B}_n^{(\beta)} a^n &= \underline{L}_n^{(\beta)} \mathrm{H}_n^{(1)}(\gamma a) + \underline{M}_n^{(\beta)} \mathrm{H}_n^{(2)}(\gamma a)] \\
\frac{n}{\mu_0} \underline{B}_n^{(\beta)} a^{n-1} &= \frac{\gamma}{\mu_0} [\underline{L}_n^{(\beta)} \mathrm{H}_n^{(1)'}(\gamma a) + \underline{M}_n^{(\beta)} \mathrm{H}_n^{(2)'}(\gamma a)] \\
&\text{pentru } n = 1, 2 \ldots
\end{aligned}\right\} \tag{35}$$

$$\left.\begin{aligned}
-\frac{\mu_0 \underline{I}^{(\beta)}}{2\pi}\ln r_\beta + \underline{C}_0^{(\beta)} &= \underline{L}_0^{(\beta)} \mathrm{H}_0^{(1)}(\gamma b) + \underline{M}_0^{(\beta)} \mathrm{H}_0^{(2)'}(\gamma b) \\
0 &= \frac{\gamma}{\mu_0}\left[\underline{L}_0^{(\beta)} \mathrm{H}_0^{(1)'}(\gamma b) + \underline{M}_0^{(\beta)} \mathrm{H}_0^{(2)'}(\gamma b)\right] \\
\frac{\mu_0 \underline{I}^{(\beta)}}{2\pi n}\left(\frac{b}{r_\beta}\right)^n + \underline{C}_n b^{-n} &= \underline{L}_n^{(\beta)} \mathrm{H}_n^{(1)}(\gamma b) + \underline{M}_n^{(\beta)} \mathrm{H}_n^{(2)}(\gamma b) \\
\frac{\underline{I}^{(\beta)}}{2\pi r_\beta}\left(\frac{b}{r_\beta}\right)^{n-1} - \underline{C}_n \frac{n}{\mu_0} b^{-(n+1)} &= \frac{\gamma}{\mu_0}\left[\underline{L}_n^{(\beta)} \mathrm{H}_n^{(1)'}(\gamma b) + \underline{M}_n^{(\beta)} \mathrm{H}_n^{(2)'}(\gamma b)\right]
\end{aligned}\right\} \quad (36)$$

pentru $n = 1, 2 \ldots$

unde s-a folosit dezvoltarea [7]:

$$-\ln R_\beta = -\ln r_\beta + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{r}{r_\beta}\right)^n \cos n\vartheta.$$

Soluționînd aceste ecuații, rezultă următoarele expresii ale constantelor de integrare:

$$\left.\begin{aligned}
\underline{L}_0^{(\beta)} &= \underline{M}_0^{(\beta)} = \underline{B}_0^{(\beta)} = 0 \\
\underline{C}_0^{(\beta)} &= \frac{\mu_0 \underline{I}^{(\beta)}}{2\pi}\ln r_\beta
\end{aligned}\right\} \quad (37)$$

$$\left.\begin{aligned}
\underline{B}_n^{(\beta)} &= a^{-n}\left[\underline{L}_n^{(\beta)} \mathrm{H}_n^{(1)}(\gamma a) + \underline{M}_n^{(\beta)} \mathrm{H}_n^{(2)}(\gamma a)\right] \\
\underline{C}_n^{(\beta)} &= b^n\left[-\frac{\mu_0 \underline{I}^{(\beta)}}{2\pi n}\left(\frac{b}{r_\beta}\right)^n + \underline{L}_n^{(\beta)} \mathrm{H}_n^{(1)}(\gamma b) + \underline{M}_n^{(\beta)} \mathrm{H}_n^{(2)}(\gamma b)\right]
\end{aligned}\right\} \quad (38)$$

unde:

$$\left.\begin{aligned}
\underline{L}_n^{(\beta)} &= \frac{\mu_0 \underline{I}^{(\beta)}}{\pi n \Delta_n}\left(\frac{b}{r_\beta}\right)^n \cdot \left[\mathrm{H}_n^{(2)}(\gamma a) - \frac{\gamma a}{n}\mathrm{H}_n^{(2)'}(\gamma a)\right] \\
\underline{M}_n^{(\beta)} &= -\frac{\mu_0 \underline{I}^{(\beta)}}{\pi n \Delta_n}\left(\frac{b}{r_\beta}\right)^n \left[\mathrm{H}_n^{(1)}(\gamma a) - \frac{\gamma a}{n}\mathrm{H}_n^{(1)'}(\gamma a)\right]
\end{aligned}\right\} \quad (39)$$

și unde:

$$\begin{aligned}
\Delta_n = &\left[\mathrm{H}_n^{(1)}(\gamma b) + \frac{\gamma b}{n}\mathrm{H}_n^{(1)'}(\gamma b)\right]\left[\mathrm{H}_n^{(2)}(\gamma a) - \frac{\gamma a}{n}\mathrm{H}_n^{(2)'}(\gamma a)\right] - \\
&- \left[\mathrm{H}_n^{(2)}(\gamma b) + \frac{\gamma b}{n}\mathrm{H}_n^{(2)'}(\gamma b)\right]\left[\mathrm{H}_n^{(1)}(\gamma a) - \frac{\gamma a}{n}\mathrm{H}_n^{(1)'}(\gamma a)\right]
\end{aligned} \quad (40)$$

Ținînd seama de relația (23) rezultă următoarele expresii pentru coeficienții $\underline{L}_n^{(\beta)}$ și $\underline{M}_n^{(\beta)}$:

$$\left.\begin{aligned}
\underline{L}_n^{(\beta)} &= \frac{\mu_0 \underline{I}^{(\beta)}}{\pi n \Delta_n}\left(\frac{b}{r_\beta}\right)^n \left[2\mathrm{H}_n^{(2)}(\gamma a) - \frac{\gamma a}{n}\mathrm{H}_{n-1}^{(2)}(\gamma a)\right] \\
\underline{M}_n^{(\beta)} &= -\frac{\mu_0 \underline{I}^{(\beta)}}{\pi n \Delta_n}\left(\frac{b}{r_\beta}\right)^n \left[2\mathrm{H}_n^{(1)}(\gamma a) - \frac{\gamma a}{n}\mathrm{H}_{n-1}^{(1)}(\gamma a)\right]
\end{aligned}\right\} \quad (41)$$

unde pentru Δ_n s-a obținut:

$$\Delta_n = [H_n^{(2)}(\gamma a)\, H_{n-1}^{(1)}(\gamma b) - H_n^{(1)}(\gamma a)\, H_{n-1}^{(2)}(\gamma b)] \cdot \frac{2\gamma b}{n} + \\ + \frac{\gamma^2 ab}{n^2} [H_{n-1}^{(1)}(\gamma a)\, H_{n-1}^{(2)}(\gamma b) - H_{n-1}^{(1)}(\gamma b)\, H_{n-1}^{(2)}(\gamma a)]. \tag{42}$$

Pentru valori mari ale argumentelor γa și γb, se obține următoarea soluție asimptotică:

$$\underline{A}^{(\beta)} = \frac{\mu_0 \underline{I}^{(\beta)}}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\left(\sin \gamma x + \frac{j\gamma a}{2n} \cos \gamma x\right)}{j\gamma b \left(\cos \gamma d - \frac{\gamma a}{2n} \sin \gamma d\right)} \left(\frac{b}{r_\beta}\right)^n \cos n\vartheta \tag{42'}$$

cu notațiile $r = a + x$ și $d = b - a$.

În cazul particular al unui cilindru plin ($a = 0$) aflat în prezența conductorului parcurs de curent, se obține pentru interiorul cilindrului soluția cunoscută [9]:

$$\underline{L}_n^{(\beta)} = \underline{M}_n^{(\beta)} = \frac{\mu_0 \underline{I}^{(\beta)}}{2\pi} \left(\frac{b}{r_\beta}\right)^n \frac{1}{J_n(\gamma b) + \frac{\gamma b}{n} J_n'(\gamma b)}. \tag{43}$$

Un alt caz particular interesant se obține atunci cînd conductorul este foarte depărtat de ecran ($r_\beta \gg b$). În acest caz, reținînd numai primii termeni ai dezvoltării se obține soluția pentru un ecran situat într-un cîmp magnetic alternativ transversal pe axă.

Valorile constantelor în acest caz particular vor fi:

$$\underline{L}_1^{(\beta)} = 2\underline{B} \cdot \frac{b}{\Delta_1} [H_1^{(2)}(\gamma a) - \gamma a\, H_1^{(2)'}(\gamma a)]$$

$$\underline{M}_1^{(\beta)} = -2\,\underline{B}\,\frac{b}{\Delta_1} [H_1^{(1)}(\gamma a) - \gamma a\, H_1^{(1)'}(\gamma a)] \tag{44}$$

unde $\underline{B} = \frac{\mu_0 \underline{I}^{(\beta)}}{2\pi r_\beta}$ este cîmpul exterior în care se află ecranul, presupus omogen în toate punctele acestuia.

Potențialul vector în interiorul ecranului este:

$$\underline{A}_i = 2\underline{B} \frac{b}{a} \cdot r \cos \vartheta \frac{H_1^{(2)}(\gamma a)\, H_1^{(1)'}(\gamma a) - H_1^{(1)}(\gamma a)\, H_1^{(2)'}(\gamma a)}{\Delta_1}. \tag{45}$$

Coeficientul de ecranare va fi:

$$k_e = \left|\frac{\underline{B}_i}{\underline{B}}\right| = \left|\frac{-\frac{\partial \underline{A}_i}{\partial x}}{\underline{B}}\right| = 2\,|\gamma b|\,\frac{|H_1^{(2)}(\gamma a)\, H_1^{(1)'}(\gamma a) - H_1^{(1)}(\gamma a)\, H_1^{(2)'}(\gamma a)|}{|\Delta_1|} \tag{46}$$

unde s-a ținut seama că $x = r \cos \vartheta$.

4. CÎMPUL ELECTROMAGNETIC REZULTANT ÎN CAZUL GENERAL A N_i CONDUCTOARE SITUATE ÎN INTERIORUL ECRANULUI ŞI N_e CONDUCTOARE SITUATE ÎN EXTERIOR

Presupunem că avem N_i conductoare parcurse de curenţi alternativi, situate în interiorul ecranului şi N_e conductoare parcurse de curenţi alternativi, situate în exteriorul ecranului (fig. 7). Facem ipoteza că toţi

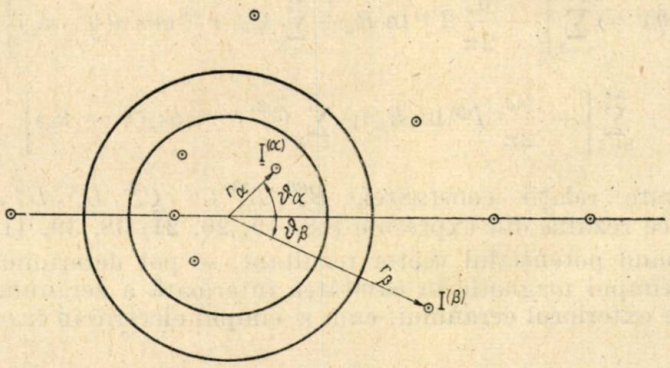


Fig. 7. — Alegerea coordonatelor pentru un ansamblu de fire situate atît în interiorul ecranului cît şi în exteriorul lui.

curenţii au aceeaşi frecvenţă, în rest putînd avea şi valori efective oarecari. Fie r_α şi ϑ_α coordonatele polare ale urmei unui conductor din interiorul ecranului şi r_β şi ϑ_β coordonatele polare ale urmei unui conductor situat în exteriorul ecranului.

Pentru a obţine soluţia generală în ipoteza că intensităţile curenţilor sînt impuse din exterior, putem aplica superpoziţia soluţiilor particulare obţinute în paragrafele precedente.

În acest scop observăm că, pentru a obţine soluţia particulară pentru conductorul situat în interiorul ecranului, sau în exteriorul lui, în ipoteza că coordonata unghiulară a urmei sale nu e nulă $\vartheta = \vartheta_\alpha \neq 0$ sau $\vartheta = \vartheta_\beta \neq 0$, e suficient să facem o rotaţie a axelor cu aceste unghiuri, ceea ce revine în a face în soluţii schimbarea de variabilă $\vartheta \to \vartheta - \vartheta_\alpha$ sau $\vartheta \to \vartheta - \vartheta_\beta$.

Ţinînd seama de această ultimă observaţie şi efectuînd adunarea soluţiilor parţiale, rezultă soluţia generală :

$$\underline{A}_i(r, \vartheta) = -\frac{\mu_0}{2\pi} \sum_{\alpha=1}^{Ni} \underline{I}^{(\alpha)} \ln R_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{Ni} \sum_{n=0}^{\infty} \underline{B}_n^{(\alpha)} r^n \cos n(\vartheta - \vartheta_\alpha) +$$

$$+ \sum_{\beta=1}^{N} \sum_{n=0}^{\infty} \underline{B}_n^{(\beta)} r^{-n} \cos n(\vartheta - \vartheta_\beta). \tag{47}$$

$$\underline{A}(r,\vartheta)=\sum_{\alpha=1}^{Ni}\sum_{n=0}^{\infty}[\underline{L}_n^{(\alpha)}\mathrm{H}_n^{(1)}(\gamma r)+\underline{M}_n^{(\alpha)}\mathrm{H}_n^{(2)}(\gamma r)]\cos n(\vartheta-\vartheta_\alpha)+$$

$$+\sum_{\beta=1}^{Ne}\sum_{n=0}^{\infty}[\underline{L}_n^{(\beta)}\mathrm{H}_n^{(1)}(\gamma r)+\underline{M}_n^{(\beta)}\mathrm{H}_n^{(2)}(\gamma r)]\cos n(\vartheta-\vartheta_\beta) \tag{48}$$

şi

$$\underline{A}_e(r,\vartheta)=\sum_{\alpha=1}^{Ni}\left[-\frac{\mu_0}{2\pi}\underline{I}^{(\alpha)}\ln R_\alpha+\sum_{n=0}^{\infty}\underline{C}_n^{(\alpha)}r^{-n}\cos n(\vartheta-\vartheta_\alpha)\right]+$$

$$+\sum_{\beta=1}^{Ne}\left[-\frac{\mu_0}{2\pi}\underline{I}^{(\beta)}\ln R_\beta+\sum_{n=0}^{\infty}C_n^{(\beta)}r^{-n}\cos_n(\vartheta-\vartheta_\beta)\right]. \tag{49}$$

În aceste relaţii constantele $\underline{B}_n^{(\alpha)}$, $\underline{B}_n^{(\beta)}$ $\underline{C}_n^{(\alpha)}$, $\underline{C}_n^{(\beta)}$, $\underline{L}_n^{(\alpha)}$, $\underline{L}_n^{(\beta)}$, $\underline{M}_n^{(\alpha)}$ şi $\underline{M}_n^{(\beta)}$ au valorile ce rezultă din expresiile (18, 19, 20, 21, 38, 39, 41).

Cunoscînd potenţialul vector rezultant, se pot determina cîmpurile şi anume : cîmpul magnetic în cavitatea interioară a ecranului, în însuşi ecranul şi în exteriorul ecranului, cum şi cîmpul electric în însuşi ecranul. Rezultă :

$$\underline{\boldsymbol{H}}_i=\frac{1}{\mu_0}\operatorname{rot}\underline{\boldsymbol{A}}_i=\frac{1}{\mu_0}\operatorname{rot}(\boldsymbol{k}\,\underline{A}_i)=$$

$$=-\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{k}\times\operatorname{grad}\underline{A}_i \tag{50}$$

şi analog în însăşi ecranul :

$$\underline{\boldsymbol{H}}=-\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{k}\times\operatorname{grad}\underline{A} \tag{51}$$

şi în exterior :

$$\underline{\boldsymbol{H}}_e=-\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{k}\times\operatorname{grad}\underline{A}_e. \tag{52}$$

Intensitatea cîmpului electric în însăşi ecranul va fi :

$$\underline{\boldsymbol{E}}=-\mathrm{j}\omega\underline{\boldsymbol{A}}=-\boldsymbol{k}\,.\,\mathrm{j}\,\omega\underline{A}. \tag{53}$$

Cîmpul electric în cavitatea interioară a ecranului şi în exteriorul său nu e complet determinat de potenţialul electrodinamic vector. Pentru determinarea sa completă e necesar să se adauge şi o componentă provenind dintr-un potenţial electrodinamic scalar. Cum această componentă nu prezintă interes pentru calculul forţelor şi pierderilor, în cele ce urmează nu o vom mai lua în consideraţie.

5. CALCULUL PIERDERILOR ACTIVE ÎN ECRAN

Evaluarea pierderilor active se face în mod obişnuit calculînd fluxul vectorului Poynting prin suprafaţa laterală a ecranului [10].

În acest scop este util să se calculeze componenta radială a vectorului Poynting, singura care intervine în calculul fluxului de energie.

Ţinînd seama de exprimarea cîmpurilor $\underline{E}$ şi $\underline{H}$ din ecran în funcţiune de potenţialul vector (51), (53), vom exprima vectorul Poynting în funcţiune de $\underline{A}$. Deci rezultă :

$$\underline{S}_r = \boldsymbol{u}_r \,.\, \underline{\boldsymbol{S}} = \boldsymbol{u}_r \,[\underline{\boldsymbol{E}} \times \underline{\boldsymbol{H}}^*] = \boldsymbol{u}_r \,[\mathrm{j}\,\omega\,\underline{A}\,\boldsymbol{k} \times (\boldsymbol{k} \times \mathrm{grad}\,\underline{A}^*)]\,\frac{1}{\mu_0} =$$

$$= -\,\mathrm{j}\,\frac{\omega}{\mu_0}\,\underline{A}\cdot\frac{\partial\,\underline{A}^*}{\partial r}\cdot \tag{54}$$

Pierderile active în ecran vor fi :

$$P = \mathrm{Re}\,l\left[\int_0^{2\pi} \underline{S}_r(a,\vartheta)\,a\,\mathrm{d}\vartheta - \int_0^{2\pi} \underline{S}_r(b,\vartheta)\,b\,\mathrm{d}\vartheta\right] \tag{55}$$

sau ţinînd seama de relaţia de mai sus :

$$P = \mathrm{Re}\left\{\frac{\mathrm{j}\omega l}{\mu_0}\left[\int_0^{2\pi}\left(\underline{A}\,\frac{\partial\,\underline{A}^*}{\partial r}\right)_{r=b} b\,\mathrm{d}\,\vartheta - \int_0^{2\pi}\left(\underline{A}\,\frac{\partial\,\underline{A}^*}{\partial\,r}\right)_{r=a} a\,\mathrm{d}\vartheta\right]\right\}. \tag{56}$$

Integralele se efectuează asupra unor produse de serii în $\cos n\vartheta$, conducînd la serii de convergenţă sporită.

6. CALCULUL FORŢELOR ELECTRODINAMICE

Pentru calculul forţelor electrodinamice se va utiliza formula lui Laplace :

$$\boldsymbol{F} = i\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{B}_{\mathrm{ext}} \tag{57}$$

unde $\boldsymbol{l}$ e un vector care are modulul egal cu lungimea conductorului şi e orientat în sensul curentului, iar $\boldsymbol{B}_{\mathrm{ext}}$ e inducţia magnetică produsă de toate sursele cîmpului în afară de curentul din conductorul asupra căruia se exercită forţa.

Dacă interesează valoarea instantanee a forţei, trebuie calculată valoarea instantanee a cîmpului, operaţie în principiu simplă, deoarece se cunoaşte expresia reprezentării în complex a acestui cîmp.

Deoarece se cunosc reprezentările în complex ale cîmpurilor, se poate calcula direct valoarea medie (pe o perioadă) a forţei :

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{med}} = \frac{1}{T}\int_0^T \boldsymbol{F}\,\mathrm{dt} = \mathrm{Re}\,[\underline{I}^*\boldsymbol{l} \times \underline{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{ext}}] \tag{58}$$

Forța medie pe unitatea de lungime va fi :

$$\boldsymbol{f}_{\text{med}} = \frac{\boldsymbol{F}_{\text{med}}}{l} = \text{Re}\,[\underline{I}^{*}\boldsymbol{k} \times \underline{\boldsymbol{B}}_{\text{ext}}] =$$

$$= \text{Re}\,\{\underline{I}^{*} \cdot \text{grad}\,(\underline{A} - \underline{A}_{I})\} \tag{59}$$

unde $\underline{A}$ e potențialul vector rezultat, din care se scade $\underline{A}_I$ potențialul vector propriu al cîmpului produs de curentul din conductorul considerat

$$\underline{A}_I = -\frac{\mu_0 \underline{I}}{2\pi} \ln R. \tag{60}$$

Se observă că prezentarea soluției sub forma în care contribuția la potențialul vector a fiecărui curent din conductoarele filiforme a fost separată încă de la început, e deosebit de utilă pentru calculul forțelor. Calculul forțelor asupra ecranului se face aplicînd principiul acțiunii și reacțiunii și ținînd seama că ecranul împreună cu conductoarele formează în regim cuasistaționar un sistem mecanic izolat.

Utilizarea soluțiilor generale obținute nu este întotdeauna ușoară, fiindcă coeficienții seriilor conțin funcțiuni Hankel de diferite ordine și argumente care n-au fost toate tabelate. Programarea unor calculatoare în vederea acestui scop pare necesară.

Avînd în vedere faptul că în instalațiile energetice ecranele sînt, de obicei, de rază mare și sînt relativ subțiri în raport cu raza lor, se impun aproximații care să țină seama de aceasta. Aceste aproximații se pot face fie direct în soluția generală obținută, utilizînd dezvoltările asimptotice pentru argumente mari ale funcțiunilor Hankel, fie a ecuațiilor de integrat.

7. APROXIMAREA SOLUȚIILOR ÎN CAZUL ECRANELOR DE GROSIME COMPARABILĂ CU ADÎNCIMEA DE PĂTRUNDERE

Presupunem că grosimea ecranului $d = b - a$ e comparabilă cu adîncimea de pătrundere $\delta = \frac{1}{\alpha}$ a undei electromagnetice în ecran, dar e mică în raport cu razele a sau b ale ecranului $\left(\frac{d}{a} \ll 1 \text{ și } \frac{d}{b} \ll 1\right)$.

În această situație, în ecuația diferențială a potențialului vector $\underline{A}$, în însuși ecranul :

$$\frac{\partial^2 \underline{A}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 \underline{A}}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \underline{A}}{\partial \vartheta^2} + \gamma^2 \underline{A} = 0 \tag{61}$$

se poate dezvolta $\frac{1}{r}$ în jurul razei medii $r_0 = \frac{a+b}{2}$, obținîndu-se

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_0} - \frac{1}{1!}\frac{1}{r_0^2}(\Delta r) + \frac{2}{2!}\frac{(\Delta r)^2}{r_0^3} - \ldots \cong \frac{1}{r_0}$$

dacă se neglijează infiniții mici superiori observînd că

$$\Delta r \leqslant d \text{ și că } \frac{d}{r_0} \ll 1.$$

Astfel se obține ecuația:

$$\frac{\partial^2 \underline{A}}{\partial r^2} + \frac{1}{r_0}\frac{\partial \underline{A}}{\partial r} + \frac{1}{r_0^2}\frac{\partial^2 \underline{A}}{\partial \vartheta^2} + \gamma^2 \underline{A} = 0 \tag{62}$$

a cărei soluție obținută prin metoda separării variabilelor — în ipoteza simetriei soluției față de axa $\vartheta = 0$ — e:

$$\underline{A}(r, \vartheta) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{r}{2r_0}} [\underline{L}_n \operatorname{ch} \lambda_n r + \underline{M}_n \operatorname{sh} \lambda_n r] \cos n\vartheta \tag{63}$$

în care

$$\lambda_n = \sqrt{\frac{4n^2+1}{4r_0^2} - \gamma^2}.$$

Soluțiile în cavitatea interioară a ecranului și în exteriorul său rămîn aceleași ca și în cazul precedent, iar determinarea constantelor de integrare se face pe baza acelorași condiții de trecere.

În mod formal se observă că soluția de aproximație se obține din soluția exactă dacă se face substituția:

$$H_n^{(1)}(\gamma r) \to e^{-\frac{r}{2r_0}} \operatorname{ch} \lambda_n r \text{ și } H_n^{(2)}(\gamma r) \to e^{-\frac{r}{2r_0}} \operatorname{sh} \lambda_n r. \tag{64}$$

În mod corespunzător, derivatele lor vor trebui să fie înlocuite cu derivatele funcțiilor hiperbolice din soluția de aproximație.

În lucrare nu vom utiliza această aproximație deoarece, așa cum s-a văzut, pentru argumente mari soluțiile de aproximație se obțin direct din soluția generală utilizînd dezvoltările asimptotice ale funcțiunilor Hankel.

APROXIMAREA SOLUȚIILOR ÎN CAZUL ECRANELOR FOARTE SUBȚIRI DAR DE CONDUCTIVITATE FINITĂ [7] [11]

O aproximație care simplifică și mai mult soluția, fără a se îndepărta mult de realitate; se obține considerînd ecranul infinit subțire, avînd o conductivitate superficială finită $\sigma_s = \sigma \cdot d$ unde d e grosimea

ecranului. În acest caz ecranul va constitui o pînză de curenți induși.

Densitatea pînzei de curent $J_s(\vartheta)$ poate fi dezvoltată în serie Fourier :

$$\underline{J}_s = \sum_{n=0}^{\infty} [\underline{a}_n \cos n\vartheta + \underline{b}_n \sin n\vartheta]. \tag{65}$$

Potențialul vector produs într-un punct oarecare de această distribuție de curenți e :

$$\underline{A}' = -\frac{\mu_0}{2\pi} \int_0^{2\pi} \underline{J}_s \ln R\, r_0\, d\vartheta + \underline{A}_0 \tag{66}$$

unde $r_0 = \frac{a+b}{2} \approx a \approx b.$

Ținînd seama de dezvoltările în serie ale funcțiunii $\ln R$ [7]:

$$\ln R = \ln r_0 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{r}{r_0}\right)^n \cos n(\vartheta - \vartheta_0) \tag{67}$$

pentru $r < r_0$ (fig. 1), și

$$\ln R = \ln r - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{r_0}{r}\right)^n \cos n(\vartheta - \vartheta_0) \tag{68}$$

pentru $r > r_0$, rezultă următoarele expresii ale potențialului vector condiționat de acești curenți :

$$\underline{A}'_i = \frac{\mu_0 r_0}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{r}{r_0}\right)^n [\underline{a}_n \cos n\vartheta + \underline{b}_n \sin n\vartheta] + \underline{A}_0 \tag{69}$$

pentru $r < r_0$, și

$$\underline{A}'_e = \frac{\mu_0 r_0}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{r_0}{r}\right)^n [\underline{a}_n \cos n\vartheta + \underline{b}_n \sin n\vartheta] + \underline{A}_0 \tag{70}$$

pentru $r > r_0$.

În aceste expresii s-a ținut seamă că intensitatea rezultantă a curenților turbionari induși în ecran e nulă $\left(\int_0^{2\pi} \underline{J}_s\, r_0\, d\vartheta = 0\right)$.

Dacă, pentru simplicitate, presupunem că în interiorul ecranului se află un singur conductor parcurs de curentul $\underline{I}^{(\alpha)}$ și avînd coordonatele r_α și ϑ_α și, respectiv, în exteriorul ecranului se află de asemenea un singur conductor parcurs de curentul $\underline{I}^{(\beta)}$ și avînd coordonatele r_β și ϑ_β, potențialul vector rezultant în interior și exterior se obține prin superpoziție.

Astfel, pentru cîmpul interior rezultă :

$$\underline{A}_i = \underline{A}'_i + \underline{A}^{(\alpha)} + \underline{A}^{(\beta)} \tag{71}$$

şi

$$\underline{A}_e = \underline{A}'_e + \underline{A}^{(\alpha)} + \underline{A}^{(\beta)} \tag{71'}$$

unde :

$$\underline{A}^{(\alpha)} = -\frac{\mu_0 \underline{I}^{(\alpha)}}{2\pi} \ln R_\alpha \text{ şi } \underline{A}^{(\beta)} = -\frac{\mu_0 \underline{I}^{(\beta)}}{2\pi} \ln R_\beta \cdot$$

Mai observăm că pe conturul ecranului $r = r_0$, $\underline{A}_i = \underline{A}_e$, deoarece $A'_i = A'_e = \underline{A}'$.

Pentru determinarea constantelor necunoscute $\underline{a}_n$ şi $\underline{b}_n$ din dezvoltarea în serie Fourier a densităţii pînzei de curent $\underline{J}_s$, se aplică legea inducţiei electromagnetice combinată cu legea lui Ohm punctelor ecranului :

$$\sigma_s \underline{E} = \underline{J}_s \text{ unde } \underline{E} = -\mathrm{j}\,\omega \underline{A}$$

sau, explicitînd, rezultă :

$$-\mathrm{j}\,\omega\,\sigma_s [\underline{A}' + \underline{A}^{(\alpha)} + \underline{A}^{(\beta)}]_{r=r_0} = \underline{J}_s . \tag{72}$$

Introducînd dezvoltările în serie ale potenţialelor şi a densităţii de curent rezultă ecuaţia :

$$-\mathrm{j}\omega\sigma_s \left[\frac{\mu_0 r_0}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\underline{a}_n \cos n\vartheta + \underline{b}_n \sin n\vartheta) + \underline{A}_0 - \frac{\mu_0 \underline{I}^{(\alpha)}}{2\pi} \ln r_0 - \right.$$

$$- \frac{\mu_0 \underline{I}^{(\beta)}}{2\pi} \ln r_\beta + \frac{\mu_0 \underline{I}^{(\alpha)}}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r_\alpha}{r_0}\right)^n \cdot \frac{1}{n} \cos n(\vartheta - \vartheta_\alpha) + \frac{\mu_0 \underline{I}^{(\beta)}}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r_0}{r_\beta}\right)^n \cdot$$

$$\left. \cdot \frac{1}{n} \cos n(\vartheta - \vartheta_\beta) \right] = \sum_{n=1}^{\infty} [\underline{a}_n \cos n\vartheta + \underline{b}_n \sin n\vartheta]. \tag{73}$$

Identificînd coeficienţii armonicilor de acelaşi ordin, rezultă :

$$\underline{A}_0 = +\frac{\mu_0}{2\pi} [\underline{I}^{(\alpha)} \ln r_0 + \underline{I}^{(\beta)} \ln r_\beta] \tag{74}$$

$$-\frac{\mathrm{j}\,\omega\sigma_s \mu_0}{2\pi n} \left[\underline{I}^{(\alpha)} \left(\frac{r_\alpha}{r_0}\right)^n \cos n\vartheta_\alpha + \underline{I}^{(\beta)} \left(\frac{r_0}{r_\beta}\right)^n \cos n\vartheta_\beta\right] = \underline{a}_n \left[1 + \frac{\mathrm{j}\omega\sigma_0 \mu_0 r_0}{2n}\right] \tag{75}$$

şi

$$-\frac{\mathrm{j}\,\omega\sigma_s \mu_0}{2\pi n} \left[\underline{I}^{(\alpha)} \left(\frac{r_\alpha}{r_0}\right)^n \sin n\vartheta_\alpha + \underline{I}^{(\beta)} \left(\frac{r_0}{r_\beta}\right)^n \cos n\vartheta_\beta\right] = \overline{b}_n \left[1 + \frac{\mathrm{j}\,\omega\sigma_s \mu_0 r_0}{2n}\right]$$

de unde rezultă :

$$\underline{a}_n = \frac{\dfrac{\gamma^2 d}{2\pi n} \left[\underline{I}^{(\alpha)} \left(\dfrac{r_\alpha}{r_0}\right)^n \cos n\vartheta_\alpha + \underline{I}^{(\beta)} \left(\dfrac{r_0}{r_\beta}\right)^n \cos n\vartheta_\beta\right]}{\left[1 - \dfrac{\gamma^2 d r_0}{2n}\right]} \tag{76}$$

şi

$$\underline{b}_n = \frac{\frac{\gamma^2 d}{2\pi n}\left[\underline{I}^{(\alpha)} \cdot \left(\frac{r_\alpha}{r_0}\right)^n \sin n\,\vartheta_\alpha + \underline{I}^{(\beta)}\left(\frac{r_0}{r_\beta}\right)^n \sin n\,\vartheta_\beta\right]}{\left[1 - \frac{\gamma^2 dr_0}{2n}\right]}$$

unde

$$\gamma^2 = -\,j\omega\mu_0\sigma.$$

Convergenţa seriei este asigurată de coeficienţii subunitari $\left(\frac{r_\alpha}{r_0}\right)^n$ şi $\left(\frac{r_0}{r_\beta}\right)^n$ de la numărător, care descresc repede.

Pentru cazul general a N_i conductoare în interior şi N_e conductoare în exterior, prin superpoziţie se obţine :

$$\underline{A}_0 = \frac{\mu_0}{2\pi}\left[\sum_{\alpha=1}^{Ni} \underline{I}^{(\alpha)} \ln r_0 + \sum_{\beta=1}^{Ne} \underline{I}^{(\beta)} \ln r_\beta\right] \tag{77}$$

şi

$$\underline{a}_n = \frac{\frac{\gamma^2 d}{2n\pi}\left[\sum_{\alpha=1}^{Ni} \underline{I}^{(\alpha)}\left(\frac{r_\alpha}{r_0}\right)^n \cos n\,\vartheta_\alpha + \sum_{\beta=1}^{Ne} \underline{I}^{(\beta)}\left(\frac{r_0}{r_\beta}\right)^n \cos n\,\vartheta_\beta\right]}{\left[1 - \frac{\gamma^2 dr_0}{2n}\right]} \tag{78}$$

$$\underline{b}_n = \frac{\frac{\gamma^2 d}{2\pi n}\left[\sum_{\alpha=1}^{Ni} \underline{I}^{(\alpha)}\left(\frac{r_\alpha}{r_0}\right)^n \sin n\,\vartheta_\alpha + \sum_{\beta=1}^{Ne} \underline{I}^{(\beta)}\left(\frac{r_0}{r_\beta}\right)^n \sin n\,\vartheta_\beta\right]}{\left[1 - \frac{\gamma^2 dr_0}{2n}\right]}.$$

Cunoaşterea acestor constante determină complet potenţialul vector atît în interiorul cît şi în exteriorul ecranului. Cu ajutorul potenţialului vector se poate determina peste tot cîmpul magnetic şi intensitatea cîmpului electric în ecran.

Forţele se calculează aşa cum s-a arătat în unul din paragrafele anterioare.

În ce priveşte calculul pierderilor din ecran, acestea se pot evalua direct, calculînd efectul Joule :

$$P = lr_0\int_0^{2\pi} \rho_s J_s^2\,d\vartheta = lr_0\int_0^{2\pi} \rho_s \underline{J}_s \underline{J}_s^*\,d\vartheta = \pi\rho_s lr_0\left[\sum_{n=1}^{\infty}\{|\underline{a}_n|^2 + |\underline{b}_n|^2\}\right] \tag{79}$$

unde $\underline{a}_n$ şi $\underline{b}_n$ au expresiile de mai sus. În această expresie $\rho_s = \frac{1}{\sigma_s} = \frac{\rho}{d}$ reprezintă rezistivitatea superficială a ecranului.

9. APROXIMAREA SOLUȚIILOR ÎN CAZUL UNOR ECRANE SUBȚIRI PERFECT CONDUCTOARE

Simplificarea extremă se obține presupunînd ecranul foarte subțire și perfect conductor. Această simplificare e utilă, fiindcă cu ajutorul ei se pot evalua relativ ușor ordinele de mărime ale efectelor studiate.

Găsirea soluțiilor se poate face fie direct utilizînd, de exemplu, anologia electrostatică a cîmpului magnetic [10], fie prin particularizare din cazul precedent, făcînd în expresiile coeficienților $\underline{a}_n$ și $\underline{b}_n$ conductivitatea σ și deci σ_s să tindă la infinit, adică punînd :

$$\sigma_s = \lim_{\substack{d\to 0\\ \sigma\to\infty}} \sigma d = \infty.$$

În acest caz expresiile (77) și (78) din paragraful precedent își conservă valabilitatea, numai că coeficienții a_n și b_n iau valorile :

$$a_n = -\frac{1}{\pi r_0}\left[\sum_{\alpha=1}^{Ni} \underline{I}^{(\alpha)}\left(\frac{r_\alpha}{r_0}\right)^n \cos n\,\vartheta_\alpha + \sum_{\beta=1}^{Ne} \underline{I}^{(\beta)}\left(\frac{r_0}{r_\beta}\right)^n \cos n\,\vartheta_\beta\right] \tag{80}$$

$$\underline{b}_n = -\frac{1}{\pi r_0}\left[\sum_{\alpha=1}^{Ni} \underline{I}^{(\alpha)}\left(\frac{r_\alpha}{r_0}\right)^n \sin n\,\vartheta_\alpha + \sum_{\beta=1}^{Ne} \underline{I}^{(\beta)}\left(\frac{r_0}{r_\beta}\right)^n \sin n\,\vartheta_\beta\right]. \tag{81}$$

În acest caz extrem, cîmpurile și forțele se pot calcula ca și în cazul precedent.

Pentru calculul pierderilor, se poate lua în considerare o anumită conductivitate superficială finită a ecranului, efectuîndu-se calculele ca și în cazul precedent, folosind însă distribuția curentului din acest caz ideal. Avantajul e că, în acest caz, expresiile coeficienților $\underline{a}_n$ și $\underline{b}_n$ sînt mai simple și calculele se efectuează mai ușor.

10. APLICAȚII

În paragrafele precedente s-a rezolvat problema generală exact și în diferite aproximații. Este util să se aplice rezultatele generale obținute la unele cazuri concrete, care prezintă interes în tehnică, verificîndu-se totodată limitele de aplicabilitate ale diferitelor aproximații.

10—1. *Cîmpul electromagnetic rezultant în cazul unui ecran cilindric așezat într-un cîmp magnetic inițial uniform.* Tratarea acestei probleme în diferitele aproximații permite obținerea unor informații utile privind domeniile lor de aplicabilitate.

Fie, prin urmare, un ecran cilindric de raze a și $b > a$, situat transversal într-un cîmp magnetic alternativ, inițial uniform, a cărui reprezentare în complex e $\underline{B}_0$ [fig. 8].

10—1—1. *Soluția exactă în cazul unui ecran oarecare.* Pentru aprecierea eficacității de ecranare vom utiliza coeficientul de ecranare. Acesta a fost calculat în paragraful anterior și e:

$$|k_e| = 2\,|\gamma b|\,\frac{|H_1^{(2)}(\gamma a)\,H_1^{(1)\prime}(\gamma a) - H_1^{(1)}(\gamma a)\,H_1^{(2)\prime}(\gamma a)|}{|\Delta_1|}. \tag{82}$$

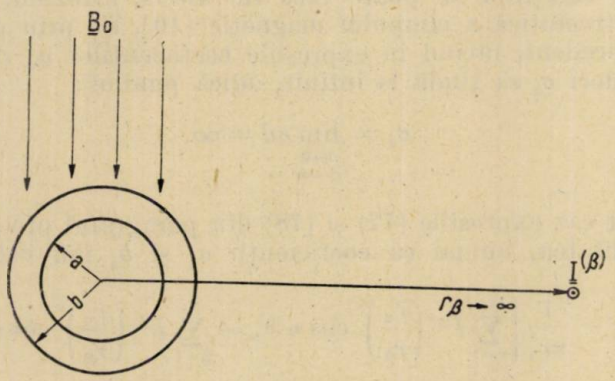


Fig. 8. — Ecran circular în cîmp uniform.

Ținînd seama de faptul că funcțiunile Bessel (Hankel) satisfac relațiile:

$$H_n'(x) = H_{n-1}(x) - \frac{n}{x} H_n(x) \tag{83}$$

unde $x = \gamma a$ sau γb, expresia coeficientului de ecranare devine:

$$k_e = \frac{[H_0^{(1)}(\gamma a)\,H_1^{(2)}(\gamma a) - H_0^{(2)}(\gamma a)\,H_1^{(1)}(\gamma a)]}{[H_0^{(1)}(\gamma b)H_1^{(2)}(\gamma a) - H_0^{(2)}(\gamma b)H_1^{(1)}(\gamma a)] - \frac{\gamma a}{2}[H_0^{(1)}(\gamma b)H_0^{(2)}(\gamma a) - H_0^{(1)}(\gamma a)H_0^{(2)}(\gamma b)]}. \tag{84}$$

Mai observăm că, în cazul ecranelor $\frac{b-a}{a} = \frac{d}{a} \ll 1$ și deci se pot dezvolta în serie funcțiile de (γb) în jurul valorii γa, ca de exemplu:

$$H_0^{(1)}(\gamma b) = H_0^{(1)}\left\{\gamma a\left[1 + \frac{d}{a}\right]\right\} = H_0^{(1)}(\gamma a) + \frac{\gamma d}{1!} H_0^{(1)\prime} + \ldots \tag{85}$$

reținîndu-se numai primii doi termeni din dezvoltare.

Efectuînd aceste operații rezultă :

$$k_e = \frac{1}{1 - \frac{\gamma^2 ad}{2}} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega\sigma\mu_0 da}{2}} \tag{86}$$

sau în modul :

$$|k_e| = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2\mu_0^2\sigma^2 a^2 d^2}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{a}{\delta}\right)^4 \cdot \left(\frac{d}{a}\right)^2}}. \tag{87}$$

10—1—2. *Soluția aproximativă în cazul unui ecran subțire.* În acest caz, din soluția generală, reținînd numai primul termen al dezvoltării, rezultă :

$$A_i = -\frac{\mu_0 \underline{I}}{2\pi} \ln R + \frac{\mu_0 r_0}{2} \left(\frac{r}{r_\beta}\right) \underline{a}_1 \cos\vartheta \tag{88}$$

unde :

$$a_1 = \frac{\frac{\gamma^2 d}{2\pi} \underline{I} \left(\frac{r_0}{r_\beta}\right)}{\left[1 - \frac{\gamma^2 a d}{2}\right]}.$$

Observînd că pentru $r_\beta \gg r_0 = a$ se poate pune $\frac{\mu_0 \underline{I}^{(\beta)}}{2\pi r_\beta} = \underline{B}_0 = \text{const.}$ și că în aceste condiții :

$$\underline{B}_i = \underline{B}_{i\vartheta}(r,0) = -\left(\frac{\partial A_i}{\partial r}\right)_{\vartheta=0} = \frac{\mu_0 \underline{I}}{2\pi(r_\beta - r)} + \frac{\mu_0 \underline{a}_1}{2} \approx$$

$$\approx \underline{B}_0 \frac{1}{1 - \frac{\gamma^2 ad}{2}} \tag{89}$$

rezultă :

$$k_e = \frac{\underline{B}_i}{\underline{B}_0} = \frac{1}{1 - \frac{\gamma^2 da}{2}} \tag{90}$$

sau în modul :

$$|k_e| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{a}{\delta}\right)^4 \cdot \left(\frac{d}{a}\right)^2}} \tag{91}$$

adică aceeași valoare ca în primul caz. În aceste relații δ e adîncimea de pătrundere.

Fără îndoială că aproximația în care intervin funcțiuni hiperbolice ar fi condus la același rezultat, cum se poate verifica ușor, deoarece ea se încadrează între soluția exactă și aproximația ecranului subțire.

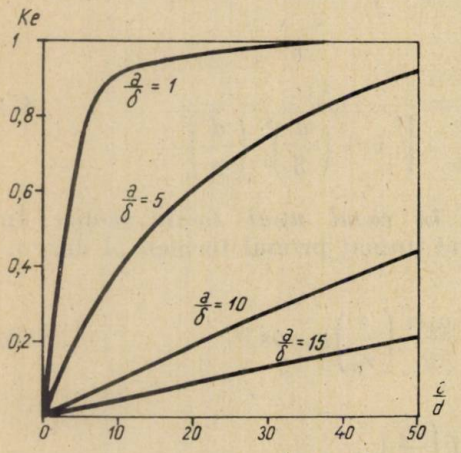


Fig. 9. — Curbele $k_e = f\left(\frac{a}{\delta}, \frac{a}{d}\right)$ pentru ecranul situat în cîmp uniform.

În sfîrșit, aproximația pentru ecranul perfect conductor conduce la ecranare perfectă, deci $k_e = 0$. Ea e admisibilă pentru valori

$$\left(\frac{a}{\delta}\right)^4 \cdot \left(\frac{d}{a}\right)^2 \gg 1.$$

În figura 9 sînt trasate familiile de curba $k_e = f\left(\frac{a}{\delta}, \frac{a}{d}\right)$.

Cum, în cazul ecranelor întotdeauna $\frac{a}{d} \gg 1$ și $\frac{\delta}{d} \approx 1$, rezultă că aproximația ecranului foarte subțire de conductivitate finită se poate aplica în general în studiul problemelor care interesează, conducînd la rezultate ce aproximează foarte bine cîmpurile.

Cum pierderile sînt determinate de cîmpuri prin intermediul vectorului Poynting, sînt temeiuri suficiente de a considera că aproximația e satisfăcătoare și din acest punct de vedere.

Calculul pierderilor în aproximația ecranului subțire. Aplicînd relația generală (79) dedusă în paragraful 8 și ținînd seama că în cazul problemei studiate seria se reduce la un singur termen, se obține :

$$P = \frac{la\pi}{\sigma d} |a_1|^2 = \frac{4\pi al}{\sigma d} \cdot \frac{B_0^2}{\mu_0^2} \cdot \left(\frac{a}{\delta}\right)^4 \cdot \left(\frac{d}{a}\right)^2 \cdot k_e^2. \tag{92}$$

Evaluarea acelorași pierderi, utilizînd distribuția curenților din cazul ecranului perfect conductor, ne conduce la relația :

$$P_0 = \frac{4\pi al}{\sigma d} \frac{B_0^2}{\mu_0^2}. \tag{93}$$

Raportul acestor pierderi e :

$$\frac{P}{P_0} = k_p = \frac{\left(\frac{a}{\delta}\right)^4 \left(\frac{d}{a}\right)^2}{1 + \frac{a^4}{\delta^4} \cdot \left(\frac{d}{a}\right)^2}. \tag{94}$$

Se observă că acest raport e foarte apropiat de unitate, deoarece în cazul ecranelor $d \approx \delta$ iar $\frac{a}{\delta} \gg 1$.

În figura 10 sînt reprezentate familiile de curbe $k_p = f\left(\frac{a}{\delta}, \frac{d}{a}\right)$.

Concluzia esențială care se desprinde din acest studiu e că, pentru calculul pierderilor în ecrane în anumite cazuri, e suficient să se ia în considerare distribuția curenților din cazul ideal al ecranului perfect conductor. Curbele din figura de mai sus arată și limitele de la care o astfel de aproximație e valabilă. Dacă ținem seama, de exemplu, că în cazul ecranelor uzuale de curenți tari care se fac din aluminiu, raza a e de ordinul zecilor de centimetri, iar la frecvența industrială (50 Hz) adîncimea de pătrundere e $\delta = 1{,}23$ cm și mai presupunem că $d \approx \delta$, obținem, considerînd pentru simplicitate că $\frac{a}{d} = 10$, adică $a = 12{,}3$ cm (o valoare sub limita inferioară a dimensiunilor uzuale) rezultă:

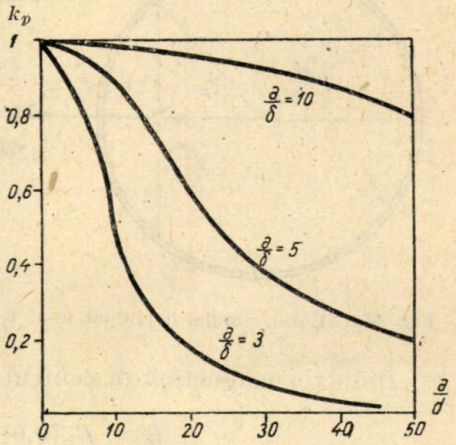


Fig. 10. — Curbele $k_p = f\left(\frac{a}{\delta}, \frac{a}{d}\right)$ pentru ecranul situat în cîmp uniform.

$$k_p = \frac{100}{1 + 100} \approx 1.$$

Prin urmare, practic, întotdeauna se poate opera cu soluția de la ecranul perfect conductor.

10—2. *Cîmpul electromagnetic rezultant și pierderile în cazul unui fir parcurs de curent alternativ situat în prezența unui ecran subțire.* Considerăm un ecran cilindric de rază a și grosimea d, în exteriorul căruia se află un fir parcurs de curent alternativ, avînd coordonatele $r = r_\beta$, $\vartheta_\beta = 0$, [fig. 11].

Ne interesează să calculăm efectul de ecran și pierderile active în acesta.

Avînd în vedere concluziile aplicației anterioare, vom studia problema numai în aproximația ecranului subțire de conductivitate finită și în aproximația ecranului perfect conductor, pentru a vedea dacă concluziile din paragraful precedent se mențin și în acest caz. Aceasta se poate arăta și direct dezvoltînd în serie funcțiile Hankel în jurul argumentului γa și ținînd seama că ecranul e subțire.

10—2—1. *Aproximația ecranului subțire de conductivitate finită.* Potențialul vector rezultant în interior va fi :

$$\underline{A}_i = -\frac{\mu_0 \underline{I}}{2\pi} ln\, R_\beta + \frac{\mu_0 a}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{r}{a}\right)^n \underline{a}_n \cos n\vartheta. \tag{95}$$

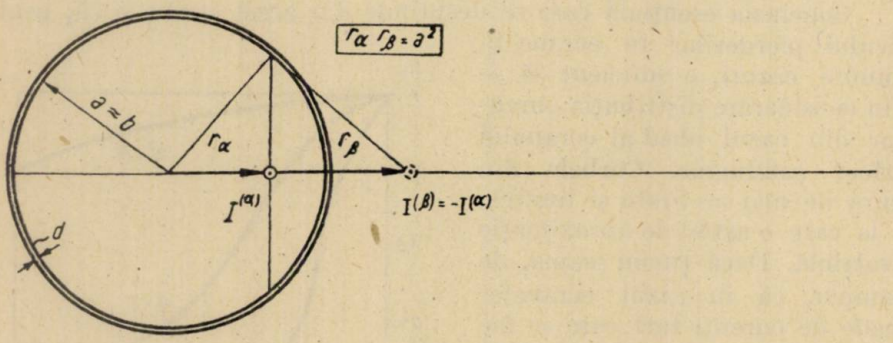


Fig. 11. — Ecran circular în cîmpul unui fir excentric așezat fie în interior fie în exterior.

Inducția magnetică în centrul ecranului va fi :

$$\underline{B}_i = \underline{B}_\vartheta(0,0) = -\left(\frac{\partial \underline{A}_i}{\partial r}\right)_{\substack{r=0 \\ \vartheta=0}} \tag{96}$$

sau, efectuînd derivarea și limita, obținem :

$$\underline{B}_i = \underline{B}_0 \frac{1}{1 - \frac{\gamma^2 a d}{2}}. \tag{97}$$

Coeficientul de ecranare va fi :

$$k_e = \frac{\underline{B}_i}{\underline{B}_0} = \frac{1}{1 - \frac{\gamma^2 a d}{2}} \tag{98}$$

adică același ca și în cazul cîmpului uniform.

Considerarea unui ecran perfect conductor ar fi condus la un coeficient de ecranare nul.

Pierderile din ecran vor fi :

$$P = \frac{\pi a l}{\sigma d} \sum_{n=1}^{\infty} |\, a_n|^2 =$$

$$= \frac{l}{\pi \sigma d \cdot a} I^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{a}{r_\beta}\right)^{2n} \frac{1}{n^2} \left(\frac{a}{\delta}\right)^4 \left(\frac{d}{a}\right)^2}{1 + \frac{1}{n^2}\left(\frac{a}{\delta}\right)^4 \left(\frac{d}{a}\right)^2}. \tag{99}$$

Considerînd distribuţia curenţilor de la ecranul perfect conductor, se obţin Pierderile :

$$P_0 = \frac{l I^2}{\pi\sigma d a} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{r_\beta}\right)^{2n} = \frac{l I^2}{\pi\sigma d a} \frac{\left(\frac{a}{r_\beta}\right)^2}{1 - \left(\frac{a}{r_\beta}\right)^2} \qquad (100)$$

deoarece seria s-a redus la o progresie geometrică de raţie subunitară $\left(\frac{a}{r_\beta}\right)^2 \ll 1$.

Calculăm diferenţa relativă procentuală :

$$\varepsilon_p = \frac{P_0 - P}{P_0} 100 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{a}{r_\beta}\right)^{2n}}{1 + \frac{1}{n^2}\left(\frac{a}{\delta}\right)^4 \left(\frac{d}{a}\right)^2} \cdot 100\,(\%). \qquad (101)$$

Vom calcula această diferenţă pentru cazul $\delta \approx d$ şi $\frac{a}{b} = 10$ la diferite valori $\frac{a}{r_\beta}$.

Se observă că pentru $\frac{a}{r_\beta} = 0$ eroarea procentuală e nulă în acord cu concluzia din aplicaţia precedentă.

Pentru $\frac{a}{r_\beta} \to 1$ eroarea e infinită, deoarece seria nu mai e convergentă. Rezultă, prin urmare, că pentru valori $\frac{a}{r_\beta}$ apropiate de unitate nu se mai poate utiliza aproximaţia ecranului perfect conductor. Din curba trasată se observă că pentru $\frac{a}{r_\beta} = 0{,}5$ eroarea e de ordinul procentului, pentru ca pentru $\frac{a}{r_\beta} = 0{,}7$ să fie de ordinul zecilor de procente.

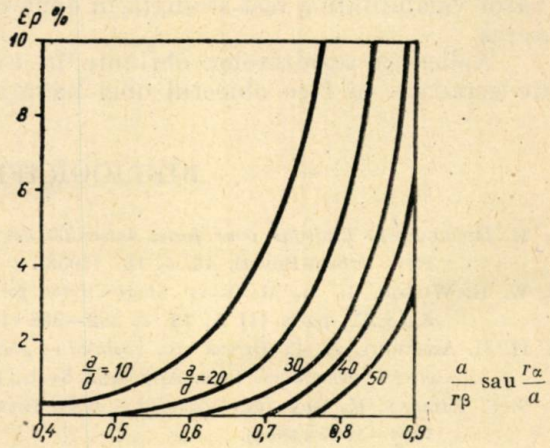


Fig. 12. — Curbele $\varepsilon_p = f\left(\frac{a}{d}, \frac{a}{r_\beta} \text{ sau } \frac{r_\alpha}{a}\right)$ pentru cazul ecranului din figura 11.

Pentru rapoarte $\frac{a}{d}$ mai mari, erorile sînt mai mici, aşa cum se observă din familia de curbe trasată în fig. 12.

Este interesant de relevat că aceleaşi pierderi rezultă şi în cazul cînd conductorul este aşezat în interiorul ecranului, dacă e satisfăcută condiţia $\frac{a}{r_\beta} = \frac{r_\alpha}{a}$ sau $r_\alpha r_\beta = a^2$, (fig. 11).

Se poate enunţa deci următoarea teoremă referitoare la ecranele subţiri :

Pierderile prin efect Joule produse într-un ecran subţire de curenţii turbionari induşi de un fir rectiliniu paralel cu ecranul, parcurs de curent alternativ, sînt aceleaşi dacă se înlocuieşte firul cu imaginea sa magnetică în raport cu ecranul, în ipoteza că acesta ar fi perfect conductor. De aceea concluziile de mai sus referitoare la firul aşezat exterior ecranului sînt extensibile şi pentru fire aşezate în interiorul ecranului. Din această cauză în abscisa diagramelor din fig. 12 se măsoară fie $\frac{a}{r_\beta}$, fie $\frac{r_\alpha}{a}$.

CONCLUZII

În lucrare s-a obţinut soluţia exactă a regimului cuasistaţionar al cîmpului electromagnetic al unui sistem de fire rectilinii parcurse de curenţi alternativi în prezenţa unui ecran electromagnetic cilindric oarecare.

Soluţia obţinută permite calculul în cele mai generale cazuri a coeficientului de ecranare, a pierderilor în ecran şi a forţelor electrodinamice asupra firelor şi ecranului.

Pentru ecrane subţiri s-au obţinut mai multe soluţii de aproximaţie, a căror valabilitate a fost studiată în două cazuri particulare care prezintă interes.

Aplicarea rezultatelor obţinute în cazul sistemelor de bare trifazate ecranate va face obiectul unei lucrări viitoare.

BIBLIOGRAFIE

1. H. Ruckstuhl, *Liaisons pour fortes intensités des courants dans les centrales électriques.* Rev. Brown-Boveri, **45**, *5*, 187 (1958).
2. W. R. Wilson, L. L. Mankoff *Short-Circuit forces in isolated — phase busses.* Trans. A.I.E.E., part. III A, **73**, *4*, 382—396 (1954).
3. H. H. Albright, A. C. Butes etc. *Isolated — phase meta — enclosed conductors for large electric generators.* Pow. App. and Syst., **64**, 1067—1072 (1963).
4. S. C. Killian, K. Boyajian, *Isolated — phase telescoping. Bus. Buct.* El. Engng. **75**, *12*, 1094—1097 (1956).
5. H. Kaden, *Ecrane electromagnetice.* Traducere în limba rusă. Gosenergoizdat, 1957.
6. A. N. Tihonov, A. A. Samarski, *Ecuaţiile fizicii matematice.* Traducere din limba rusă. Edit. tehn. Bucureşti.

7. W. R. SMYTHE, *Static and dynamic electricity*. New York — Toronto — London. 1950.
8. L. R. NEIMAN, P. L. KALANTAROV, *Bazele teoretice ale electrotehnicii*. Vol. III. Edit. Tehn. Bucureşti.
9. A. ŢUGULEA, *Efectul de proximitate dintre un fir rectiliniu parcurs de curent alternativ şi un cilindru conductor, paralel cu firul*. St. cerc. energ. şi electrotehn., **14** *1*, 63—70 (1964).
10. R. RĂDULEŢ, *Bazele teoretice ale electrotehnicii*. Curs litografiat. Vol. I, II, IV.
11. H. B. DWIGHT, *Proximity — effect in wires and thin tubes*. Trans. A.I.E.E., **42**, *6*, 850—859 (1923).

CALCULUL PIERDERILOR DE PUTERE ÎN ECRANE ELECTROMAGNETICE IDEALE[1])

DE

C. I. MOCANU

Institutul politehnic, Cal. Griviței nr. 132, București

538.541 : 621.3.017.7

În ecranarea instalațiilor la frecvență industrială, interesează factorul de ecranare, definit ca raport al intensităților exterioare H_e și interioară H_i a cîmpului magnetic și pierderile de putere în ecran prin curenți turbionari. În literatură sînt calculate pierderile de putere numai în ecranele dreptunghiulare de lățime infinită, în ecranele cilindrice și sferice. În lucrare, se calculează — la refulare netă a curenților turbionari induși — pierderile de putere în ecrane cu secțiune eliptică, poligon regulat și cu secțiune dreptunghiulară.

Ecranele electromagnetice utilizate în tehnica curenților slabi, fie pentru protecția aparatelor față de perturbațiile produse de cîmpul electromagnetic din exteriorul acestora, fie pentru suprimarea sau atenuarea perturbațiilor produse de aceste aparate în exteriorul lor, se caracterizează prin factorul de ecranare S, egal cu raportul intensităților $\underline{H}_i$ și $\underline{H}_e$ ale cîmpului magnetic, sinusoidal în timp, din interiorul — respectiv din exteriorul — ecranului (fig. 1), [1]:

$$\underline{S} = \underline{H}_i / H_e. \tag{1}$$

Problemele ecranelor electromagnetice utilizate în tehnica curenților tari la aparate, transformatoare, bare colectoare din centralele elec-

[1]) Articol apărut și în „Rev. Roum. Sci. Techn. — Electrotechn. Eenerg.", **9**, *4* (1964).

trice etc. sînt în parte diferite de problemele ecranelor utilizate la frecvenţe mari în radiotehnică, telecomunicaţii etc. În ecranele funcţionînd la frecvenţe mari interesează mai puţin pierderile de putere şi forţele care se exercită asupra ecranului sau aparatelor ecranate. La ecranarea unor aparate sau instalaţii parcurse de curenţi de intensitate mare, la frecvenţa de 50 Hz — cum este cazul barelor colectoare din centrale — este important să se cunoască, pe lîngă pierderile de putere în ecrane, şi forţele magnetice dintre bare şi ecrane, dintre ecrane, influenţa ecranării asupra repartiţiei densităţii de curent în bare, comportarea ecranelor la scurtcircuit etc. De obicei, ecranarea barelor colectoare se poate face în trei moduri [2]: ecranul închide toate conductoarele (fig. 2*a*); acelaşi ecran, prevăzut cu pereţi despărţitori (fig. 2*b*), şi cîte un ecran pentru fiecare conductor de fază (fig. 2*c*). Cele mai răspîndite sînt ecranele separate pentru fiecare conductor. În ecranul primului conductor de fază (fig. 2*c*) se induc curenţi turbionari de curentul $\underline{I}_1$, prin conductorul situat în interior, şi de curenţii $\underline{I}_2$ şi $\underline{I}_3$, care trec prin conductoarele din exteriorul ecranului. Dacă se consideră ecranele foarte lungi, curenţii turbionari induşi în ecranele celorlalte faze nu influenţează repartiţia densităţii de curent în primul ecran. Cîmpul magnetic stabilit de celelalte conductoare de fază este un cîmp exterior $\underline{H}_e$, orientat transversal pe ecran (cîmp plan-paralel) şi atenuat prin ecranare la o intensitate interioară $|\underline{H}_i| < |\underline{H}_e|$.

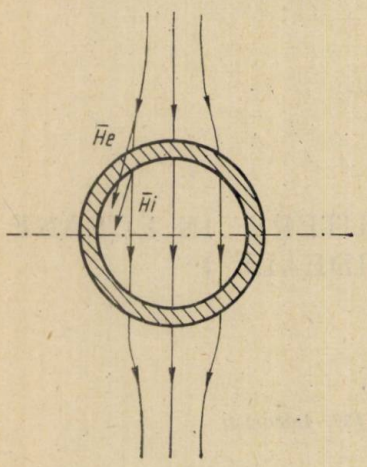


Fig. 1. — Ecran cilindric.

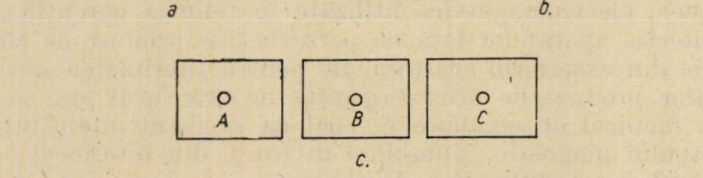


Fig. 2. — Ecrane pentru barele colectoare: *a* — ecran comun; *b* — ecran comun cu pereţi despărţitori; *c* — ecrane separate.

Calculul factorului de ecranare S şi al puterii absorbite P într-un ecran drept, situat într-un cîmp magnetic armonic în timp $\underline{H}_e$ nu pot fi efectuate pentru orice formă a secţiunii transversale a ecranului. Se cunosc soluţii la orice frecvenţă a cîmpului magnetic pentru ecranul cilin-

dric circular, sferic şi ecranul cu secţiune dreptunghiulară infinit de lat [1]. Menţionăm soluţia lui M. J. O. Strutt [3] pentru secţiunea eliptică şi la refulare netă a curenţilor turbionari, care însă nu este valabilă decît pentru o anumită orientare a cîmpului magnetic $\underline{H}_e$.

Calculul puterii dezvoltate în ecranele barelor colectoare necesită rezolvarea ecuaţiei de tip Helmholtz [4] pentru domeniul triplu conex al celor trei ecrane, cu singularităţile conductoarelor de fază :

$$\Delta\left(\frac{\overline{\underline{H}}}{\overline{\underline{E}}}\right) = k^2\left(\frac{\overline{\underline{H}}}{\overline{\underline{E}}}\right); \quad k = (1+\mathrm{j})\,\alpha, \tag{2}$$

în care α este valoarea reciprocă a adîncimii de pătrundere în semispaţiul conductor. Dacă pentru calculul cîmpului magnetic şi deci şi pentru factorul de ecranare $\underline{S}$ se poate aplica teorema superpoziţiei, determinînd intensităţile $\underline{H}_1$, $\underline{H}_2$ şi $\underline{H}_3$, care se stabilesc cînd numai cîte unul din conductoarele de fază sînt parcurse de curenţi I_1, I_2 şi I_3, pentru calculul pierderilor de putere P nu se poate aplica teorema superpoziţiei, densitatea de volum a puterii fiind proporţională cu pătratul intensităţii cîmpului magnetic.

În principiu, chiar şi la frecvenţa de 50 Hz este posibilă o ecranare perfectă ($\underline{S} = 0$), dacă grosimea ecranului este de 2—3 ori mai mare decît adîncimea de pătrundere l/α. Acest caz corespunde refulării nete a curenţilor turbionari în ecrane, conturul secţiunii transversale a fiecărui ecran fiind linie de cîmp magnetic. S-a demonstrat în lucrarea [6] că la refulare netă a curentului în conductorul care prezintă două axe de simetrie se poate aplica teorema superpoziţiei pentru calculul afluxului de putere : puterea dezvoltată într-o bară dreaptă parcursă de curent alternativ şi situată transversal într-un cîmp magnetic armonic în timp şi omogen în lipsa barei este egală cu suma celor trei puteri active pe care bara le-ar absorbi dacă numai ea ar fi parcursă de curent de aducţie, respectiv dacă bara nu ar fi parcursă de curent de aducţie şi s-ar găsi o dată în componenţa $\underline{H}'$ a intensităţii cîmpului magnetic exterior după una din axe, iar o dată în componenta $\underline{H}''$ a cîmpului magnetic exterior după a doua axă :

$$P = \frac{\alpha l}{\varkappa^2\,\sigma}\left[\int \underline{H}^2\,\mathrm{d}A + \int \underline{H}'^2\,\mathrm{d}A + \int \underline{H}''^2\,\mathrm{d}A\right], \tag{3}$$

în care s-a notat cu $\underline{H}$ intensitatea cîmpului magnetic pe suprafaţa conductorului cînd acesta e parcurs numai de curent de aducţie, şi cu l lungimea barei. În conformitate cu această teoremă, afluxul de putere P în primul ecran din figura 2*c* este egal cu suma celor două puteri dezvoltate de curentul $\underline{I}_1$ şi de cîmpul $\underline{H}_e$ stabilit din exterior de curenţii $\underline{I}_2$ şi $\underline{I}_3$, aproximat omogen. În lucrare se calculează pierderile de putere în ecranele drepte situate în cîmp magnetic armonic în timp şi omogen în lipsa acestora.

Calculul pierderii de putere într-un ecran drept, ideal. Ecranul drept avînd un contur Γ_z al secţiunii transversale şi o grosime g mai mare

decît adîncimea de pătrundere l/α, o conductivitate σ, este situat într-un cîmp magnetic armonic în timp și omogen $\underline{H}_0$ în lipsa ecranului (fig. 3*a*). La refulare netă a curentului în ecran, conturul Γ_z este linie de cîmp magnetic și deci se poate reprezenta spectrul liniilor de cîmp magnetic

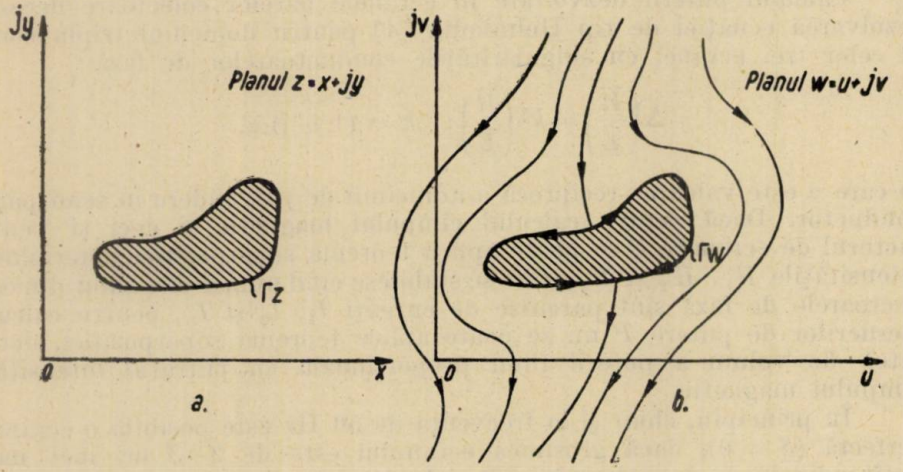


Fig. 3. — Ecran drept.

pe modelul liniilor echipotențiale ale unui cîmp electrostatic, ceea ce permite aplicarea metodei transformărilor conforme. Fie, în planul complex $w = u + jv$, un cîmp magnetic H_w nenul la infinit, al cărui potențial complex este $V_m(w)$:

$$H_w = -\,\mathrm{j}\,\frac{\mathrm{d}V_m^*}{\mathrm{d}w}\cdot \tag{4}$$

Dacă se introduce în cîmp un cilindru conductor circular Γ_w avînd raza unitate $|w| = 1$, cîmpul magnetic se modifică în vecinătatea cilindrului, iar potențialul complex V_{1m} este ;

$$V_{1m} = V_m(w) + w_m\left(\frac{1}{w}\right)\cdot \tag{5}$$

În adevăr, la mare depărtare de cilindrul conductor, termenul $V_m\left(\frac{1}{w}\right)$ se anulează și, fiindcă $im\left[V_m(w) + V_m\left(\frac{1}{w}\right)\right]_{\Gamma_w} = 0$, cercul Γ_w este o linie de cîmp. Fie acum, în planul $z = x + jy$, conturul exterior Γ_z al secțiunii transversale a ecranului drept (fig. 3*b*) și funcția $z = F(w)$, care transformă conform cîmpul magnetic H_w, nenul la infinit, plan-paralel și modificat de conductorul circular, Γ_w, din planul $w = u + jv$ în cîmpul magnetic H_z, nenul la infinit, plan-paralel și modificat de ecranul Γ_z.

Intensitatea H_z a cîmpului magnetic are expresia (4):

$$H_z = -\mathrm{j}\frac{\mathrm{d}V_m^*(z)}{\mathrm{d}z} = -\mathrm{j}\left[\frac{\mathrm{d}V_{1m}(w)}{dw}\right]^*\left[\frac{dw}{\mathrm{d}z}\right]^* = \\ = -\mathrm{j}\,V_{1m}'^*(w)\frac{1}{F'^*(w)}. \tag{6}$$

Dacă în planul complex w cîmpul e uniform (fig. 3*c*), de intensitate H_{0w} şi orientat după axa reală u, potenţialul complex V_m are expresia:

$$V_m(w) = \mathrm{j}H_{0w}w, \tag{7}$$

iar potenţialul $V_{1m}(w)$, modificat de cilindrul Γ_w, rezultă din (5) şi (7):

$$V_{1m}(w) = \mathrm{j}H_{0w}\left(w + \frac{1}{w}\right). \tag{8}$$

Introducînd valoarea lui $V_{1m}(w)$ din (8) în (6), se obţine

$$H_z = H_{0w}\left(1 - \frac{1}{w^{*2}}\right)\frac{1}{F'^*(w)}. \tag{9}$$

Vectorul $\underline{S}_z$ al lui Poynting într-un punct de pe suprafaţa ecranului are însă expresia:

$$\underline{S}_z = \frac{(1+\mathrm{j})}{\varkappa^2\sigma}\underline{H}_z\underline{H}_z^* = \frac{(1+\mathrm{j})\alpha}{\varkappa^2\sigma}H_{0w}^2\left(1 - \frac{1}{w^2}\right)\left(1 - \frac{1}{w^{*2}}\right)\times \\ \times\frac{1}{F'(w)}\cdot\frac{1}{F'^*(w)}, \tag{10}$$

în care $\varkappa$ este un coeficient egal cu 4π pentru sistemele de unităţi neraţionalizate şi egal cu 1 pentru sistemele de unităţi raţionalizate.

Afluxul de putere aparentă P_{ap} calculat pe unitatea de lungime a ecranului este:

$$\underline{P}_{ap} = \oint_{\Gamma_z}\underline{S}_z\,\mathrm{d}z = \frac{(1+\mathrm{j})\alpha}{\varkappa^2\sigma}H_{0w}^2\int_{\Gamma_z}\left(1 - \frac{1}{w^2}\right)\left(1 - \frac{1}{w^{*2}}\right)\times \\ \times\frac{1}{F'^*(w)}\cdot\frac{1}{F'(w)}\mathrm{d}z = \frac{(1+\mathrm{j})\alpha}{\varkappa^2\sigma}H_{0w}^2\oint_{\Gamma_w}\left(1 - \frac{1}{w^2}\right)\left(1 - \frac{1}{w^{*2}}\right)\times \\ \times\frac{1}{F'^*(w)}\mathrm{d}w. \tag{11}$$

La mare depărtare de ecran, intensitatea $\underline{H}_z$ a cîmpului magnetic este egală cu $\underline{H}_0$:

$$\lim_{z\to\infty}H_z = H_0, \tag{12}$$

iar în planul w intensitatea H_{0w} este de asemenea constantă la mare depărtare de cilindrul circular Γ_w și egală cu $C_1 \underline{H}_0$, în care C_1 este o constantă în general complexă:

$$\lim_{w\to\infty} H_{0w} = C_1 \underline{H}_0. \tag{13}$$

Din relațiile (13) și (1) rezultă constanta C_1:

$$C_1 = \lim_{w\to\infty} F'^*(w). \tag{14}$$

Introducînd în (11) valoarea din (14) a constantei C_1, se obține următoarea expresie a lui $\underline{P}_{ap}$:

$$\underline{P}_{ap} = \frac{\alpha H_0^2}{\varkappa^2 \sigma}(1+\mathrm{j})\, C_1^2 \oint_{\Gamma_w} \left(1-\frac{1}{w^2}\right)\left(1-\frac{1}{w'^{*2}}\right)\frac{1}{F'^*(w)}\,\mathrm{d}w = \frac{\alpha H_0}{\varkappa^2 \sigma}\underline{M}_w, \tag{15}$$

în care s-a notat cu M_w funcționala complexă:

$$M_w = (1+\mathrm{j})\, C_1^2 \oint_{\Gamma_w} \left(1-\frac{1}{w^2}\right)\left(1-\frac{1}{w'^{*2}}\right)\frac{1}{F'^*(w)}\,\mathrm{d}w. \tag{16}$$

Deoarece integrala din expresia operatorului M_w se efectuează pe cercul Γ_w de rază unitate $w = e^{j\varphi}$, φ fiind unghiul polar, formula (16) se transformă astfel:

$$M_w = 4(1+\mathrm{j})\, C_1^2 \oint_{\Gamma_w} \sin^2\varphi \frac{\mathrm{d}\varphi}{F'^*(w)}. \tag{17}$$

Dacă intensitatea H_{0w} a cîmpului din planul w formează unghiul cu axa reală u, funcționala M_w are următoarea expresie:

$$M_w = 4(1+\mathrm{j})\, C_1^2 \oint_{\Gamma_w} \sin^2(\varphi-\gamma)\frac{\mathrm{d}\varphi}{F'^*(w)}. \tag{18}$$

Pentru a caracteriza pierderile de putere în ecran printr-o mărime adimensională, se definește factorul k_p egal cu raportul puterii active P_t absorbite pe unitatea de lungime a ecranului situat transversal în cîmp, prin puterea activă P_e absorbită pe unitatea de lungime a ecranului, cînd acesta este situat axial în cîmpul omogen cu aceeași intensitate $\underline{H}_0$:

$$k_p = \frac{P_t}{P_e} = \frac{\mathrm{re}\,\underline{P}_{ap}}{P_l}. \tag{19}$$

În formula (19), P_e are expresia :

$$P_e = \frac{\alpha H_0^2}{\varkappa^2 \sigma} p_0, \tag{20}$$

iar p_0 este perimetrul secțiunii transversale a ecranului. Între factorul de poziție k_p al pierderilor de putere în ecran și funcționala complexă $\underline{M}_w$ există relația :

$$k_p = \frac{1}{p_0} \operatorname{re} \underline{M}_w. \tag{21}$$

a) *Ecranul cilindric circular ideal.* Funcția $z = F(w)$ are pentru cilindrul circular de rază R expresia :

$$F(w) = \mathrm{j} R \ln w, \tag{22}$$

iar funcționala $M(w)$ rezultă din (17) și (22) :

$$M(w) = 4\pi(1 + \mathrm{j}) R. \tag{23}$$

Factorul de poziție k_p al pierderilor de putere în ecranul cilindric circular ideal se obține din (19), (20) și (23),

$$k_p = 2, \tag{24}$$

adică rezultatul cunoscut, că puterea activă absorbită la refulare netă a curentului pe unitatea de lungime a unui conductor cilindric circular introdus transversal într-un cîmp omogen și armonic în timp este egală cu dublul puterii absorbite pe unitatea de lungime a conductorului, introdus axial în același cîmp magnetic [3].

b) *Ecranul eliptic* (fig. 4). Pentru conductorul cilindric cu secțiune eliptică situat într-un cîmp magnetic transversal, omogen la infinit și formînd în lipsa acestuia unghiul $-\gamma$ cu semiaxa mare a elipsei, $H_0 e^{-\mathrm{j}\gamma}$, funcția $F(w)$ este :

$$z = \frac{a+b}{2} w + \frac{h^2}{2(a+b)w}, \tag{25}$$

în care a, b și h sînt semiaxa mare, semiaxa mică și semidistanța dintre focarele elipsei. Notînd :

$$a + b = h e^{u_0}; \quad a - b = h e^{-u_0}, \tag{26}$$

în care $u = u_0$ este ecuația elipsei cu semiaxele a și b, funcționala $\underline{M}_w$ are pentru ecranul eliptic următoarea expresie :

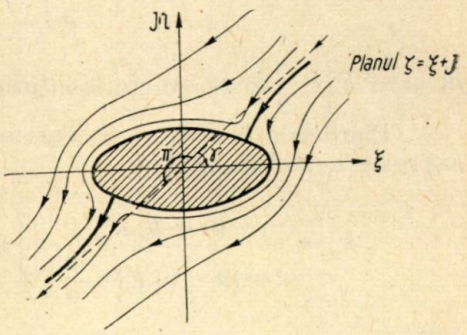


Fig. 4. — Ecran drept cu secțiune eliptică (zona ecranată este haşurată).

$$\underline{M}_w = 4(1 + \mathrm{j}) C_1^2 \oint_{\Gamma_w} \sin^2(\varphi - \gamma) \frac{\mathrm{d}\varphi}{F'^*(w)} = 4(1 + \mathrm{j}) \frac{C_1^2}{h} \oint_{\Gamma_w} \frac{\sin^2(\varphi - \gamma)}{\sin(u_0 - \mathrm{j}\varphi)} \mathrm{d}\varphi, \tag{27}$$

iar constanta C_1 are din (14) valoarea:

$$C_1 = \lim_{w^* \to \infty} F'^*(w) = \frac{a+b}{2}.$$

Factorul de poziție k_p al pierderilor de putere activă în ecranul eliptic se calculează cu formulele (21) și (27):

$$k_p = \frac{1}{p_0} \operatorname{re} M_w = \frac{(a+b)^2}{2h p_0} \operatorname{re}\left\{(1+j)\int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 2(\gamma-\varphi)}{\sin(u_0-\varphi)}\,\mathrm{d}\varphi\right\} = \\ = \frac{(a+b)\,h^2}{2a^2(a-b)\,E(e,\pi/2)}\int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos 2\,(\varphi-\gamma)}{1-e^2\cos^2\varphi}\,\mathrm{d}\varphi, \tag{28}$$

în care s-a înlocuit perimetrul p_0 cu valoarea sa, $4\,a\,E\left(e,\frac{\pi}{2}\right)$, e fiind excentricitatea, iar $E\left(e,\frac{\pi}{2}\right)$ integrala eliptică completă de speța a doua. Integrala I care intervine în membrul al doilea al ecuației (28) se calculează astfel:

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\varphi}{1-e^2\cos^2\varphi} - \int_0^{\pi/2} \frac{\cos 2(\varphi-\gamma)}{1-e^2\cos^2} \mathrm{d}\varphi = \left[1+\left(1-\frac{2}{e^2}\right)\cos 2\gamma\right] \times \\ \times F\left(e,\frac{\pi}{2}\right) + \frac{2\cos^2\gamma}{e^2} E\left(e,\frac{\pi}{2}\right), \tag{29}$$

în care $F\left(e,\frac{\pi}{2}\right)$ este integrala eliptică completă de prima speță.

Pierderile de putere în ecranul eliptic se calculează cu următoarea expresie a factorului k_p:

$$k_p = \frac{(a+b)\,h^2}{2a^2(a-b)\,E\left(e,\frac{\pi}{2}\right)}\left\{\left[1+\left(1-\frac{2}{e^2}\right)\cos 2\gamma\right]F\left(e,\frac{\pi}{2}\right) + \right. \\ \left. + \frac{2\cos 2\gamma}{e^2} \times E\left(e,\frac{\pi}{2}\right)\right\}. \tag{30}$$

Problema cilindrului eliptic conductor în cîmp magnetic transversal, la refulare netă a curentului a fost abordată de M. J. O. Strutt [3], însă, din cauza unei erori în calculul integralei I, se ajungea la concluzia greșită că afluxul de putere absorbit de bară nu depinde de unghiul γ de înclinare a intensității $\underline{H}_0$ a cîmpului magnetic față de axa mare a elipsei.

c) *Ecranul drept având secțiunea un poligon regulat cu n laturi* (fig. 5). Funcția $F(w)$ care transformă cîmpul din exteriorul unui poligon regulat

cu n laturi pe exteriorul unui cerc este determinată în [5], [6] şi are expresia

$$z = \frac{n\,a\,\Gamma^2\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\pi j\,\Gamma\left(1+\frac{2}{n}\right)} \oint_{\Gamma_w} w^{-2}(w^n+1)^{\frac{2}{n}}\,\mathrm{d}w + R\cos\frac{\pi}{n}, \qquad (31)$$

în care $\Gamma\,(1+x)$ este funcţia gamma a lui Legendre, iar R este raza cercului circumscris poligonului. Funcţionala $\underline{M}_w$ are pentru ecranul poligonal expresia :

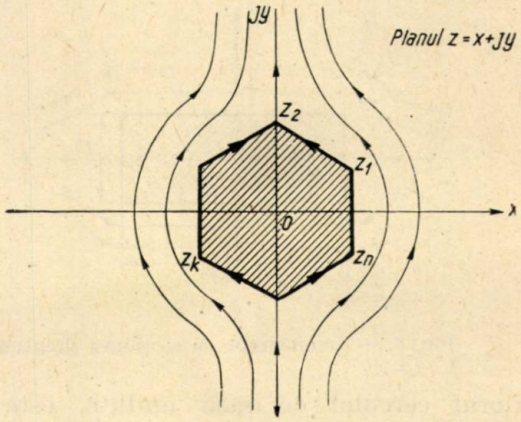


Fig. 5. — Ecran drept cu secţiunea poligon regulat (zona ecranată este haşurată).

$$\underline{M}_w = 4(1+j)\frac{n\,a\,\Gamma^2\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\pi\,\Gamma\left(1+\frac{2}{n}\right)} \int_0^{2\pi} \sin^2\varphi\left[\cos\frac{n\varphi}{2}\right]^{-\frac{2}{n}}\mathrm{d}\varphi. \qquad (32)$$

O verificare a formulei (32) se poate obţine cînd prisma cu n feţe trece în conductorul cilindric circular de rază $R = \dfrac{a}{\sin\frac{\pi}{n}}$:

$$\lim_{n\to\infty} \underline{M}_w = 4\,(1+j)\,R \lim \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} \frac{\Gamma^2\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{2}{n}\right)} \times$$

$$\times \int \sin^2\varphi\left[\cos\frac{n\,\varphi}{2}\right]^{-\frac{2}{n}}\mathrm{d}\,\varphi = 4\,\pi\,(1+j)\,R,$$

adică acelaşi rezultat cu cel obţinut la ecranul cilindric circular (23).

Pentru ecranul cu secţiunea un pătrat cu latura $l = 2a$, integrala I' din (32) se calculează astfel :

$$I' = \int_0^{2\pi} \sin^2\varphi[\cos 2\varphi]^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}\,\varphi = 2\left[F\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{2}\right) - E\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right],$$

iar pierderile de putere se determină în următoarea expresie a factorului k_p :

$$k_p = \frac{1}{p_0} \operatorname{re} \underline{M}_w = \sim 2{,}1884162. \tag{33}$$

d) *Ecranul dreptunghiular* (fig. 6). Funcția $F(w)$, care transformă cîmpul din exteriorul unui dreptunghi cu laturile $2a$ și $2b$, pe exte-

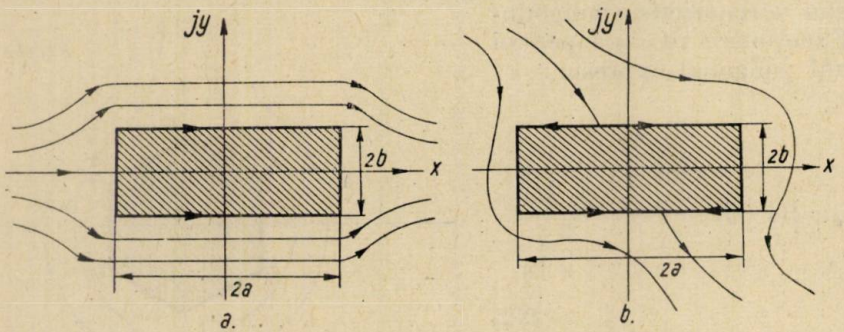


Fig. 6. — Ecran drept cu secțiunea dreptunghi (zona ecranată este haşurată).

riorul cercului cu rază unitate, este determinată în [5], [6] și are expresia :

$$z = j\,b\,\frac{E(k_1\,\varphi)}{E(k_1,\,\varphi_0)} + a\,;\; k_1 = \frac{1}{\sin\varphi_0} = \frac{1}{k}, \tag{34}$$

în care modulul k și unghiul φ_0 se calculează din ecuația :

$$\frac{a}{b} = \frac{E'\left(k, \frac{\pi}{2}\right) - k^2 F'\left(k, \frac{\pi}{2}\right)}{E\left(k, \frac{\pi}{2}\right) - k'^2 F\left(k, \frac{\pi}{2}\right)}\;;\; k'^2 = 1 - k^2, \tag{35}$$

în care E' și F' sînt integralele eliptice de modul complimentar k' și $E(k') = E'(k)$.

Dacă intensitatea omogenă $\underline{H}_0$ a cîmpului magnetic este orientată după latura $2a$, funcționala $\underline{M}_w$ are pentru ecranul dreptunghiular o expresie ce se obține din (17) și (34) :

$$\underline{M}_w = 4\,(1-j)\,b\,\frac{F + E' - E}{E - k'^2 F}. \tag{36}$$

Pierderile de putere prin curenți turbionari într-un ecran ideal drept cu secțiunea dreptunghiulară, situat în cîmpul magnetic orientat după

latura $2a$, se calculează cu factorul k_p :

$$k_p = \frac{1}{p_0} \operatorname{re} M_w = \frac{b}{a+b} \frac{F + E' - E}{E - k'^2 F} = \frac{b}{a+b} \Psi_1(k); \tag{37}$$

$$\Psi_1(k) = \frac{F + E' - E}{E - k'^2 F}. \tag{38}$$

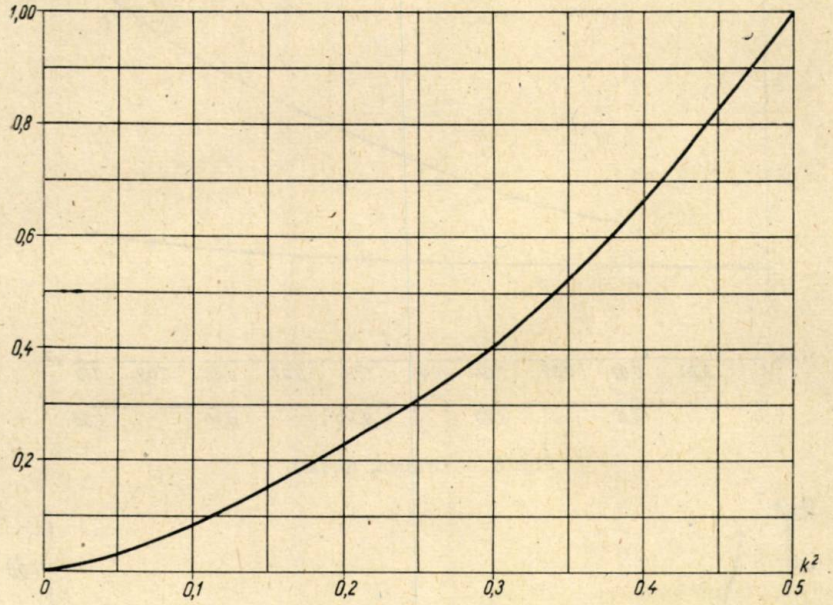


Fig. 7. — Graficul $b/a = f(k^2)$.

Dacă intensitatea $\underline{H}_0$ a cîmpului magnetic este înclinată cu unghiul γ faţă de latura $2a$ a ecranului, funcţionala M_w se calculează cu expresiile (17) şi (34) şi se obţine pentru factorul k_p următoarea expresie :

$$k_p = A \cos 2\gamma + B \sin^2 \gamma = \frac{B}{2} + \left(A - \frac{B}{2}\right) \cos 2\gamma, \tag{39}$$

în care s-a notat :

$$A = \frac{b}{a+b} \frac{F + E' - E}{E - k'^2 F}; \; B = \frac{F' + F}{E - k'^2 F}. \tag{40}$$

Dacă H_0 este orientat după latura $2b$, factorul k_p se obţine din (37) şi (38), înlocuind funcţiunile E, E' şi F, F' cu complimentarele lor, pe a cu b şi pe b cu a :

$$k_p = \frac{a}{a+b} \frac{F' + E - E'}{E' - k^2 F'} = \frac{b}{a+b} \frac{F' + E - E'}{E - k'^2 F} = \frac{b}{a+b} \Psi_2(k). \tag{41}$$

În figurile 7, 8 şi 9 s-au reprezentat curbele $k = k\left(\frac{a}{b}\right)$ din ecuaţia (35) şi $\Psi_1(k)$ şi $\Psi_2(k)$, iar în tabelele 1, 2 şi 3 din anexă s-au calculat aceste

funcții pentru diferite valori ale raportului $\frac{a}{b}$ și ale modulului subunitar k. Experiențele efectuate cu bare cu secțiune dreptunghiulară și pătrată la

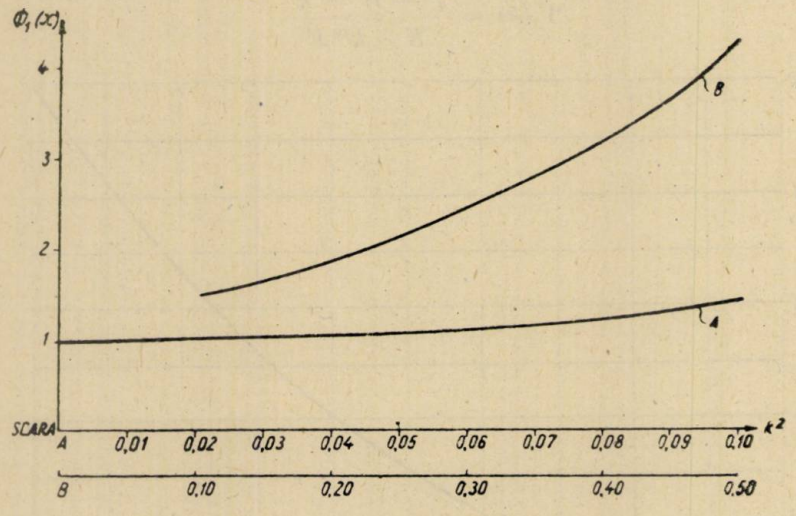


Fig. 8. — Graficul $\Phi_1(k^2)$.

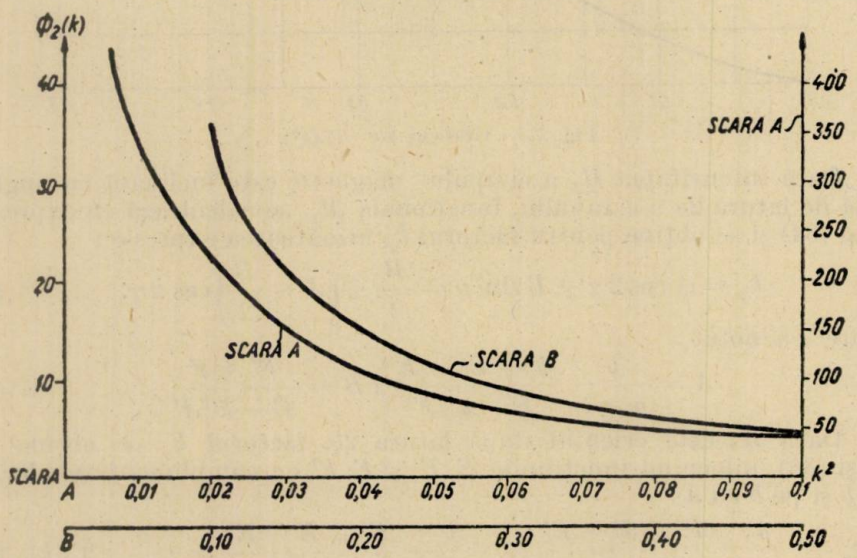


Fig. 9. — Graficul $\Phi_2(k^2)$.

refulare netă a curentului [5] sînt în bună concordanță cu formulele de calcul ale pierderilor de putere în ecrane.

Primit la redacție la 16 septembrie 1964

ANEXA

Tabela 1

cu valorile rapoartelor b/a în funcție de modelul subunitar k

k^2	k'^2	$E - k'^2F$	$E' - k^2F'$	b/a
0,00	1,00	0,000000	1,000000	0,00000
0,01	0,99	0,007952	0,979038	0,00877
0,02	0,98	0,015748	0,961513	0,01638
0,03	0,97	0,023652	0,945283	0,02565
0,04	0,96	0,031556	0,929858	0,03394
0,05	0,95	0,039521	0,914958	0,04319
0,06	0,94	0,047487	0,900741	0,05272
0,07	0,93	0,055473	0,887226	0,06252
0,08	0,92	0,063480	0,873254	0,07269
0,09	0,91	0,071509	0,859979	0,08315
0,10	0,90	0,079562	0,846966	0,09394
0,15	0,85	0,120154	0,785044	0,15305
0,20	0,80	0,161346	0,727049	0,22192
0,25	0,75	0,203150	0,671927	0,30234
0,30	0,70	0,245641	0,619063	0,39679
0,35	0,65	0,288569	0,568048	0,50801
0,40	0,60	0,332881	0,518601	0,64188
0,45	0,55	0,377766	0,470508	0,80291
0,50	0,50	0,423607	0,423607	1,00000

Tabela 2

cu valorile $\Psi_1(k)$ în funcție de modulul subunitar k

k^2	k'^2	$F + E' - E$	$E' - k^2F'$	$\Psi_1(k) = (F + E' - E)/(E' - k^2F')$
0,00	1,00	1,000000	1,000000	1,000 000
0,01	0,99	1,023878	0,979038	1,0457999
0,02	0,98	1,044422	0,961513	1,0862289
0,03	0,97	1,063779	0,946471	1,1239447
0,04	0,96	1,082401	0,929858	1,1640462
0,05	0,95	1,100504	0,915057	1,2026533
0,06	0,94	1,118211	0,900743	1,2414348
0,07	0,93	1,135608	0,886170	1,2814809
0,08	0,92	1,152755	0,873254	1,3200687
0,09	0,91	1,169694	0,859979	1,3601520
0,10	0,90	1,186458	0,846966	1,4008335
0,15	0,85	1,268531	0,785044	1,6158794
0,20	0,80	1,349079	0,727049	1,8555650
0,25	0,75	1,429344	0,671927	2,1272472
0,30	0,70	1,510197	0,619063	2,4394889
0,35	0,65	1,592367	0,568048	2,8032532
0,40	0,60	1,700545	0,518601	3,2790975
0,45	0,55	1,763506	0,470508	3,7481402
0,50	0,50	1,854075	0,423606	4,3768324

Tabela 3

cu valorile $\Psi_2(k)$ în funcție de modulul subunitar k

k^2	k'^2	$F' + E - E'$	$E - k'^2 F$	$\Psi_2(k) = (F' + E - E')/(E - k'^2 F)$
0,00	1,00		0	
0,01	0,99	4,246505	0,011797	359,96524
0,02	0,98	3,888459	0,015748	246,91770
0,03	0,97	3,674876	0,023651	155,37947
0,04	0,96	3,520579	0,031576	111,49543
0,05	0,95	3,398836	0,039520	86,003036
0,06	0,94	3,297729	0,047486	69,446363
0,07	0,93	3,210888	0,055473	57,881852
0,08	0,92	3,134506	0,063480	49,377914
0,09	0,91	3,066128	0,071507	43,083379
0,10	0,90	3,004075	0,079561	37,758198
0,15	0,85	2,755742	0,120154	22,935066
0,20	0,80	2,567750	0,161336	15,915542
0,25	0,75	2,412922	0,203149	11,877587
0,30	0,70	2,279055	0,245661	9,2772938
0,35	0,65	2,159582	0,288863	7,4762168
0,40	0,60	2,050532	0,332881	6,1599675
0,45	0,55	1,959303	0,377747	5,1867637
0,50	0,50	1,854075	0,423606	4,3768324

BIBLIOGRAFIE

1. H. KADEN, *Elektromagnetische Ekranen* (trad. în l. rusă).
2. M. J. O. STRUTT, *Hydrodynamische Behandlung der hochfrequenz-elektromagnetischen Aufgaben.* Arch. für Elek., 1929.
3. C. I. MOCANU, *Calculul rezistenței în alternativ a barelor cu secțiune poligonală la refulare netă a curentului electric.* St. cerc. energ., **14**, *2* (1964).
4. C. I. MOCANU, *Lucrare de disertație pentru obținerea titlului de candidat în științe tehnice.* București, 1964.
5. R. RĂDULEȚ și C. I. MOCANU, *Approximations des phénomènes de refoulement net du courant électrique alternatif dans les conducteurs prismatiques.* Revue d'Electr. et d'Energ., **8**, *1* (1964).

ASUPRA TRANSMISIUNII ENERGIEI ELECTROMAGNETICE PE O LINIE ELECTRICĂ LUNGA MULTIFILARĂ [1])

DE

C. I. MOCANU

Institutul politehnic, Cal. Griviței, nr. 132, București

538.566:621.372.21.011

În lucrare se studiază transmisiunea energiei electromagnetice pe o linie lungă cu n fire utilizînd calculul matricial. După ce se stabilesc ecuațiile matriciale ale telegrafiștilor, se analizează regimul tranzitoriu și regimul permanent, ambele cazuri conducînd la probleme de valori proprii. Transmisia energiei în regim permanent este caracterizată de o matrice zy care depinde de parametrii liniei și de frecvență, iar numărul și forma undelor de tensiune și de curent depinde de structura matricei Γ_{zy}. Influența pămîntului asupra transmisiei pe o linie aeriană se manifestă prin apariția a două perechi de unde suplimentare de tensiune și de curent — una fiind directă, iar cealaltă inversă. Se analizează apoi linia dublu conductor-pămînt și linia trifazată aeriană.

Studiul transmisiunii energiei electromagnetice pe o linie electrică lungă cu n fire este cu atît mai complicat, cu cît numărul firelor liniei este mai mare. Prezentarea ecuațiilor de propagare sub forma unui sistem de ecuații cu derivate parțiale cu $2n$ funcții necunoscute nu dă posibilitatea unei vederi de ansamblu asupra fenomenelor transmisiunii. Cu ajutorul calculului matricial, ecuațiile de propagare se pun sub o formă restrînsă, operațiile cu matrice se urmăresc cu claritate, iar programele calculatoa-

[1]) Articol apărut și în „Rev. Roum. Sci. Techn. — Electrotechn. Energ.", **9**, *4* (1964).

St. cerc. energ. electr. Tom 14 Nr. 4 p. 853—868 București 1964

relor numerice sînt simple : adunări și scăderi, multiplicări și inversiuni de matrice, determinări de structuri normale etc.

În lucrare, după ce se stabilesc ecuațiile matriciale ale telegrafiștilor pentru linia electrică lungă multifilară, se studiază în prima parte regimul tranzitoriu al liniei, iar în partea a doua regimul permanent. Aceste pro-

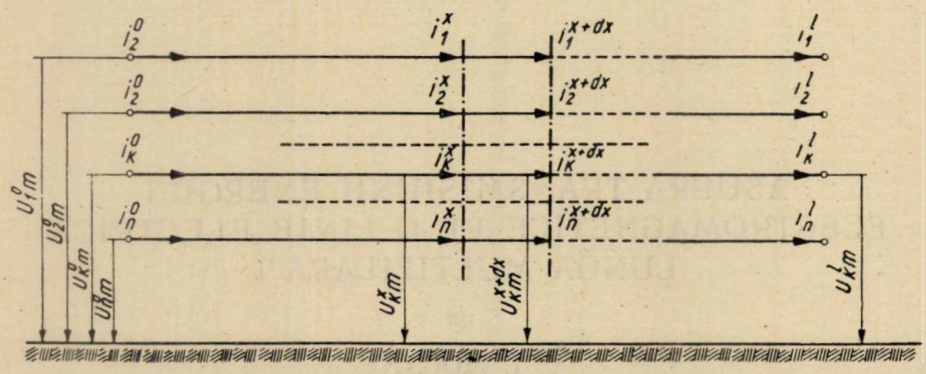


Fig. 1. — Linie electrică lungă multifilară.

bleme nu sînt studiate în literatură pentru linia multifilară și în lucrare se arată că ambele cazuri conduc la probleme de valori proprii.

1. *Stabilirea ecuațiilor telegrafiștilor pentru o linie electrică lungă multifilară.* Fie o linie electrică lungă cu n fire paralele și cu aceeași lungime l (fig. 1). Notînd cu u^0_{km} tensiunea electrică instantanee dintre firul k și pămînt la extremitatea sursă și cu i^0_k intensitatea curentului electric prin fir la aceeași extremitate, problema transmisiunii energiei în lungul firului k consistă în determinarea tensiunii electrice u^x_{km} și a curentului i^x_k în punctul situat pe conductorul k la distanța x, măsurată de la sursă.

Dacă se notează cu $[u^x]$ și $[i^x]$ matricele coloană ale tensiunilor u^x_{km} și curenților i^x_{km}, matricele $[u^{x+\mathrm{d}x}]$ și $[i^{x+\mathrm{d}x}]$ ale tensiunilor și curenților în punctele situate pe fire la distanța $x + \mathrm{d}x$ au valorile,

$$[u^{x+\mathrm{d}x}] = [u^x] + \frac{\partial}{\partial x}[u^x]\,\mathrm{d}x\,;\quad [i^{x+\mathrm{d}x}] = [i^x] + \frac{\partial}{\partial x}[i^x]\,\mathrm{d}x. \tag{1}$$

Din legile inducției electromagnetice și ale conservării sarcinii electrice, aplicate porțiunii de linie de lungime $\mathrm{d}x$, se obține :

$$-\frac{\partial}{\partial x}[u^x] = [R]\,[i^x] + [L]\frac{\partial}{\partial t}[i^x], \tag{2}$$

$$-\frac{\partial}{\partial x}[i^x] = [G]\,[u^x] + [C]\frac{\partial}{\partial t}[u^x], \tag{3}$$

în care : $[R]$ este matricea pătratică și nesingulară de ordin și rang n a rezistențelor lineice ale firelor, avînd termenii R_{kk} și R_{kj},

$$R_{kk} = R_{ck} + \left(\frac{\pi}{2} - 4\sqrt{2}\,\frac{\alpha h_k}{3}\right)\omega.10^{-4}\ \Omega/\text{km}, \tag{4}$$

$$R_{kj} = \left(\frac{\pi}{2} - 4\sqrt{2}\,\frac{\alpha\sqrt{h_k h_j}}{3}\right)\omega.10^{-4}\ \Omega/\text{km}, \tag{5}$$

$[L]$ este matricea pătratică și nesingulară de ordin și rang n a inductivităților lineice proprii și mutuale ale firelor, avînd termenii L_{kk} și L_{kj},

$$L_{kk} = \left(\frac{4\sqrt{2}\,\alpha h_k}{3} + 4{,}6\log\frac{3{,}3}{\alpha\gamma r_k}\right)10^{-4}\text{H/km}, \tag{6}$$

$$L_{kj} = \left(\frac{4\sqrt{2}\,\alpha\sqrt{h_k h_j}}{3} + 4{,}6\log\frac{3{,}3}{\alpha\gamma d_{kj}}\right)10^{-4}\text{H/km}, \tag{7}$$

$[C]$ este matricea pătratică și nesingulară de ordin și rang n a capacităților firelor :

$$[C] = 242.10^{-4}\,[P]^{-1}, \tag{8}$$

matricea $[P]$ avînd termenii P_{kk} și P_{kj} :

$$P_{kk} = \log\frac{2h_k}{r_k}\ ;\quad P_{kj} = \log\frac{d_{kj'}}{d_{kj}}\,. \tag{9}$$

În expresiile (4)—(9) s-a notat cu d_{kj} distanța dintre firele k și j, în cm ; $d_{kj'}$ — distanța între firul k și simetricul firului j față de pămînt, în cm ; h_k — înălțimea firului k deasupra pămîntului, în cm ; r_k — raza firului k, în cm ; ω — pulsația curentului sinusoidal ; $\gamma = 1{,}781$ este constanta lui Bessel ; $\alpha = \sqrt{4\pi\omega\sigma}$.

Eliminînd $[u^x]$ și $[i^x]$ între ecuațiile (2) și (3), se obțin *ecuațiile matriciale în mărimi instantanee ale telegrafiștilor* :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}[u^x] = [L][C]\frac{\partial^2}{\partial t^2}[u^x] + ([R][C] + [L][G])\frac{\partial}{\partial t}[u^x] + [R][G][u^x], \tag{10}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}[i^x] = [L][C]\frac{\partial^2}{\partial t^2}[i^x] + ([R][C] + [L][G])\frac{\partial}{\partial t}[i^x] + [R][G][i^x]. \tag{11}$$

2. *Regimul tranzitoriu al unei linii multifilare cu condiții inițiale și la limită. Prima problemă de valori proprii.* Soluțiile ecuațiilor (10) și (11) depind de condițiile inițiale și de condițiile la extremități. Se va soluționa cazul în care linia are firele scurtcircuitate și puse la pămînt la ambele extremități, adică :

$$[u^0] = [u^l] = [0]. \tag{12}$$

La momentul $t = 0$, matricele $[u(0, x)]$ și $[u_t'(0, x)]$ au valorile cunoscute :

$$[u(0, x)] = [\Phi(x)]; \; [u_t'(0, x)] = [\psi(x)]. \tag{13}$$

Aplicînd metoda separării variabilelor, soluția $[u(t, x)]$ a ecuației (10) este de forma :

$$[u(t, x)] = [T(t)][X(x)][1c], \tag{14}$$

în care matricele patratice și nesingulare de ordin n, $[T]$ și $[X]$ depind numai de t, respectiv numai de x, iar $[1\,c]$ este o matrice coloană cu termeni egali cu unitatea.

Cu o matrice $[\lambda]$ a constantelor de separare, ecuația (10) se separă în două ecuații matriciale diferențiale ordinare :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}[X] = [\lambda][X]; \tag{15}$$

$$[L][C]\frac{\partial^2}{\partial t^2}[T] + ([R][C] + [L][G])\frac{\partial}{\partial t}[T] + [R][G][T] = [\lambda][T]. \tag{16}$$

Deoarece $[T] \neq 0$, soluția $[u(t,x)]$ satisface condițiile (12) numai dacă

$$[X(0)] = [X(l)] = [0]. \tag{17}$$

Soluția nebanală $[u(t, x)]$ a ecuației (10) se obține numai pentru anumite valori ale matricei $[\lambda]$, denumite valori proprii. Se demonstrează că, pentru următoarea valoare a lui $[\lambda]$:

$$[\lambda] = -\frac{\pi^2}{l^2}[K]^2, \tag{18}$$

ecuația (10) are soluții nebanale (în care $[K]$ este o matrice pătratică cu toți termenii numere întregi, pozitivi și diferiți de zero).

Soluția $[X_j]$ a ecuației (15) corespunzînd unei valori proprii $[\lambda_j]$ (18) este *o funcție matricială proprie* :

$$[X_j] = [C_j] \sin\frac{\pi}{l}[K_j]\, x, \tag{19}$$

$[C_j]$ fiind o matrice constantă. Dacă se normează la unitate funcțiile $[X_j]$,

$$\int_0^l [X_j][X_k]\,dx = \begin{cases} [1], & j = k \\ [0], & j \neq k, \end{cases} \tag{20}$$

se obține pentru constanta $[C_j]$ valoarea :

$$[C_j] = \sqrt{\frac{l}{2}}\,[l], \tag{21}$$

[1] fiind o matrice unitate. Cu valoarea (18) a constantei de separare $[\lambda]$, ecuația (16) are următoarea formă:

$$[L][C]\frac{\partial^2}{\partial t^2}[T]+([R][C]+[L][G])\frac{\partial}{\partial t}[T]= \\ =-\left(\frac{\pi^2}{l^2}[K_j]^2+[R][G]\right)[T]. \tag{22}$$

Soluția ecuației (22) pentru linia fără pierderi ($[R]=[G]=[0]$) este:

$$[T_j]=[A_j]\cos[V][K_j]\frac{\pi}{l}t+[B_j]\sin[V][K_j]\frac{\pi}{l}t, \tag{23}$$

unde $[A_j]$ și $[B_j]$ sînt constante, și

$$[V]=[C]^{-1}[L]^{-1}. \tag{24}$$

Cu valorile (19) și (23), soluția $[u(t, x)]$ a ecuației (10) este:

$$[u(t,x)]=\sqrt{\frac{l}{2}}\sum_{j=1}\left([A_j]\cos[V][K_j]\frac{\pi}{l}t+ \right. \\ \left.+[B_j]\sin[V][K_j]\frac{\pi}{l}t\right)\sin\frac{\pi}{l}[K_j]\times[1c]. \tag{25}$$

Constantele $[A_j]$ și $[B_j]$ se determină punînd condițiile (13):

$$[\Phi(x)]=\sqrt{\frac{l}{2}}\sum_{j=1}[A_j]\sin\frac{\pi}{l}[K_j]\times[1c], \tag{26}$$

$$[\psi(x)]=\frac{\pi}{\sqrt{21}}\sum[B_j][V][K_j]\sin\frac{\pi}{l}[K_j]\times[1c]. \tag{27}$$

Dezvoltările în serie Fourier ale funcțiilor $[\Phi(x)]$ și $[\Psi(x)]$ sînt:

$$[\Phi(x)]=\sum_j[\Phi_j]\sin\frac{\pi}{l}[K_j]\times[1c], \tag{28}$$

$$[\psi(x)]=\sum_j[\psi_j]\sin\frac{\pi}{l}[K_j]\times[1c], \tag{29}$$

în care coeficienții $[\Phi_j]$ și $[\psi_j]$ au valorile:

$$[\Phi_j]=\frac{2}{l}\int_0^l[\Phi(\nu)]\sin\frac{\pi}{l}[K_j][1c]\,\nu\,d\nu, \tag{30}$$

$$[\psi_j]=\frac{2}{l}\int_0^l[\psi(\nu)]\sin\frac{\pi}{l}[K_j][1c]\,\nu\,d\nu. \tag{31}$$

Identificînd seriile (26) cu (28) și (27) cu (29), se obțin coeficienții $[A_j]$ și $[B_j]$:

$$[A_j] = [\Phi_j]\sqrt{\frac{2}{1}}; \quad [B_j] = [\psi_j]\sqrt{\frac{2}{l}}. \tag{32}$$

Spectrul frecvențelor de oscilație proprie se obține egalînd factorul $\sin [V]\ [K_j]\frac{\pi}{l}t$ cu funcția trigonometrică matricială a pulsațiilor $[\Omega]$:

$$\sin [\Omega]\ [K_j]\frac{\pi}{l}t = \sin [\Omega]t; \quad [\Omega] = \frac{\pi}{l}[V]\ [K_j]. \tag{33}$$

În teoria matricelor, se demonstrează că factorul constant $[K_j]$ nu modifică structura matricei $[V]$ și deci spectrele frecvențelor fundamentale ale matricelor $[V]$ și $[\Omega]$ sînt identice. Factorul $[K_j]$ din expresia (33) a lui $[\Omega]$ arată că spectrul frecvențelor unui fir al liniei cuprinde toate fundamentalele și armonicele acestora. Pulsațiile fundamentale ω_j sînt:

$$\omega_j = \frac{\pi}{l}v_{jj}; \quad j = 1, 2, \ldots, n \ldots, \tag{34}$$

în care v_{jj} sînt rădăcinile ecuației caracteristice:

$$|\lambda [1] - [V]| = 0. \tag{35}$$

3. *Regimul permanent. A doua problemă de valori proprii.* Dacă tensiunile și curenții sînt sinusoidali, în timp, de pulsație ω, formele în complex ale ecuațiilor telegrafiștilor (10) și (11) sînt:

$$\frac{\partial 2}{\partial x^2}[U^x] = [Z]\,[Y]\,[U^x] = [\Gamma_{zy}]^2\,[U^x]; \quad [\Gamma_{zy}]^2 = [Z]\,[Y], \tag{36}$$

$$\frac{\partial 2}{\partial x^2}[I^x] = [Y]\,[Z]\,[I^x] = [\Gamma_{yz}]^2\,[I^x]; \quad [\Gamma_{yz}]^2 = [Y]\,[Z], \tag{37}$$

în care $[Z] = [R] + j\omega\,[L]$ este matricea impedanțelor lineice longitudinale; $[Y] = [G] + j\omega[C]$ este matricea admitanțelor lineice transversale, iar matricele $[\Gamma_{zy}]$ și $[\Gamma_{yz}]$ sînt una transpusă celeilalte. Soluțiile ecuațiilor matriciale, diferențiale ordinare cu coeficienți constanți (36) și (37) sînt:

$$[U^x] = (\mathrm{ch}\,[\Gamma_{zy}]x)\,[U^0] - (\mathrm{sh}\,[\Gamma_{yz}]\,x)\,[\Gamma_{zy}]^{-1}\,[Z]\,[I^0], \tag{38}$$

$$[I^x] = -\,[Z]^{-1}\,[\Gamma_{zy}](\mathrm{sh}\,[\Gamma_{zy}]\,x)\,[U^0] + [Z]^{-1}(\mathrm{ch}\,[\Gamma_{zy}]\,x)\cdot[Z]\,[I^0], \tag{39}$$

în care $[U^0]$ și $[I^0]$ sînt matricele tensiunilor și curenților la extremitatea sursă. Soluțiile (38) și (39) au aceeași formă cu soluțiile liniei bifilare, în care însă termenii corespunzători sînt matrice. Spre deosebire de regimul permanent al unei linii bifilare descris direct de soluțiile (38) și (39), pentru

o linie multifilară este necesară analiza matricei $[\Gamma_{zv}]$. Fie $[T]$ matricea transformării unitare care aduce matricea $[\Gamma_{zv}]$ la forma sa normală (sau cvasinormală). Dacă ecuația caracteristică

$$|\lambda [1] - [\Gamma_{zv}]| = 0 \tag{40}$$

are toate rădăcinile λ_j distincte, matricea $[\Gamma_{zv}]$ se transformă prin transformarea $[T]$ într-o matrice diagonală $[\Lambda]$:

$$[\Lambda] = [T]^{-1} [\Gamma_{zv}] [T]. \tag{41}$$

Cu aceeași transformare $[T]$, matricea $[U^x]$ se transformă în $[v^x]$; $[U^x] = [T]^{-1} [v^x]$, iar ecuația (36) devine

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} [v^x] = [\Lambda]^2 [v^x]. \tag{42}$$

Datorită formei diagonale a matricei $[\Lambda]$ (cu termenul general λ_j), ecuația matricială (42) este un sistem de ecuații cu cîte o necunoscută v_j^x:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} v_j^x = \lambda_j^2 v_j^x. \tag{43}$$

Sistemul (43) reprezintă însă forma în complex a ecuației telegrafiștilor pentru n fire fictive izolate electric și magnetic, avînd constanta lineică λ_j egală cu:

$$\lambda_j = \sqrt{z_j y_j}, \tag{44}$$

z_j și y_j fiind impedanța longitudinală și admitanța transversală a firului fictiv j.

Soluția sistemului (43) este:

$$v_x^j = C_{1j} e^{\lambda_j x} + C_{2j} e^{-\lambda_j x}, \tag{45}$$

în care constantele C_{1j} și C_{2j} se determină din condițiile de la extremitățile firelor. Soluția $[U^x]$ are forma

$$[U^x] = [T]^{-1} [v^x]. \tag{46}$$

Din ecuația (45) rezultă că, pe firul fictiv, transmisiunea energiei se face printr-o undă directă $e^{\lambda_j x}$ de tensiune și curent și o undă inversă $e^{-\lambda_j x}$ de tensiune și curent. Din ecuația (46) rezultă că pe un fir al liniei multifilare transmisiunea se face prin n unde directe $e^{\lambda_j x}$ și n unde inverse $e^{-\lambda_j x}$.

Problema regimului permanent al unei linii multifilare este deci tot o problemă de valori proprii, deosebită însă de problema regimului tranzitoriu. Valorile proprii λ_j ale matricei $[\Gamma_{zv}]$ intervin ca urmare a proprietăților de structură a lui $[\Gamma_{zv}]$ și nu datorită condițiilor la extremitățile liniei. Spre deosebire de valorile și funcțiile proprii ale problemei regimului tranzitoriu, care alcătuiesc un șir infinit, în problema regimului permanent, numărul acestora este egal cel mult cu numărul n al firelor.

Dacă ecuația caracteristică $|\lambda[1] - [\Gamma_{zy}]| = 0$ are rădăcini multiple, matricea $[\Gamma_{zy}]$ se transformă într-o matrice $[\Lambda']$ cvasinormală :

$$[\Lambda'] = \begin{bmatrix} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \Lambda_j & \\ & & & \ddots \end{bmatrix}; \quad [\Lambda_j] = \begin{bmatrix} \lambda_j, & 1, & 0, & \ldots\ldots & 0 \\ 0, & \lambda_j, & 1, & 0 \ldots & 0 \\ & & \ldots\ldots\ldots & & \\ & & \ldots\ldots\ldots & & 1 \\ 0, & & \ldots\ldots\ldots & & \lambda_j \end{bmatrix} \tag{47}$$

în care celula λ_j are ordinul gradului de multiplicitate al rădăcinii λ_j. Datorită formei cvasidiagonale a matricelor $[\Lambda]$, $[\Lambda_j]$ (47), sistemul de ecuații (43) are forma :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} v_j^x = \lambda_j v_j^x + v_{j+1}^x. \tag{48}$$

Deși numărul valorilor proprii λ_j este în acest caz mai mic decît n, numărul funcțiilor proprii X_j soluții ale sistemului (48) este tot n. Dacă s este ordinul de multiplicitate al rădăcinii λ_j, atunci funcțiile proprii directe sînt :

$$X_{1j} = C_{1_j} e^{\lambda_j x}; \quad X_{2j} = C_{2j}\, x\, e^{\lambda_j x}; \quad \ldots\ldots X_{sj} = C_{sj}\, x^{s-1} e^{\lambda_j x}. \tag{49}$$

Partea reală $[\alpha]$ a matricei $[\Lambda]$ reprezintă matricea constantelor de atenuare, iar partea imaginară $[\beta]$ reprezintă matricea constantelor lungimilor de undă. Matricea $[v]$ a vitezelor de propagare este :

$$[v] = \pm\, \omega\, [\beta]^{-1},$$

cu semnul plus pentru undele directe și cu semnul minus pentru undele inverse.

4. *Aplicații.* a) *Pentru sistemul două fire — pămînt*, conductoarele din cupru avînd o secțiune circulară de rază r la distanța d_{12} și la înălțimile h_1, respectiv h_2, deasupra pămîntului, matricele $[R]$, $[L]$, $[G]$, $[C]$ sînt :

$$[R] = \begin{bmatrix} R_{11}, & R_{12} \\ R_{21}, & R_{22} \end{bmatrix}, \quad [L] = \begin{bmatrix} L_{11}, & L_{12} \\ L_{21}, & L_{22} \end{bmatrix}, \quad [G] = \begin{bmatrix} G_{11}, & G_{12} \\ G_{21}, & G_{22} \end{bmatrix},$$
$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11}, & C_{12} \\ C_{21}, & C_{22} \end{bmatrix}, \tag{50}$$

în care :

$$R_{11} = R_c + \left(\frac{\pi}{2} - 4\sqrt{2}\,\frac{\alpha h_1}{3}\right)\omega.10^{-4}\,\Omega/\text{km},$$

$$R_{22} = R_c + \left(\frac{\pi}{2} - 4\sqrt{2}\,\frac{\alpha h_2}{3}\right)\omega.10^{-4}\,\Omega/\text{km},$$

$$R_{12} = R_{21} = \left(\frac{\pi}{2} - 4\sqrt{2}\,\frac{\alpha\sqrt{h_1 h_2}}{3}\right)\Omega/\text{km};$$

R_c este rezistența firului în curent continuu,

$$L_{11} = \left(\frac{4\sqrt{2}\,\alpha h_1}{3} + 4{,}6\log_{10}\frac{3{,}3}{\alpha\gamma r}\right)10^{-4}\,\text{H/km},$$

$$L_{22} = \left(\frac{4\sqrt{2}\,\alpha h_2}{3} + 4{,}6\log_{10}\frac{3{,}3}{\alpha\gamma r}\right)10^{-4}\,\text{H/km},$$

$$L_{12} = L_{21} = \left(\frac{4\sqrt{2}\,\alpha\sqrt{h_1 h_2}}{3} + 4{,}6\log_{10}\frac{3{,}3}{\alpha\gamma d_{12}}\right)10^{-4}/\text{km},$$

$$C_{11} = 2{,}42\,\frac{\log_{10} 2h_2/r}{\Delta}\,10^{-2}\,\mu\text{F/km},$$

$$C_{22} = 2{,}42\,\frac{\log_{10} 2h_1/r}{\Delta}\,10^{-2}\,\mu\text{F/km},$$

$$C_{12} = 2{,}42\,\frac{\log_{10}\dfrac{d_{12'}}{d_{12}}}{\Delta}\,10^{-2}\,\mu\text{F/km},$$

$$C_{21} = 2{,}42\,\frac{\log_{10}\dfrac{d'_{12}}{d_{12}}}{\Delta}\,10^{-2}\,\mu\text{F/km}$$

$$\Delta = \left(\log_{10}\frac{2h_1}{r}\right)\left(\log_{10}\frac{2h_2}{r}\right) - \left(\log_{10}\frac{d'_{12}}{d_{12}}\right)\left(\log_{10}\frac{d_{12'}}{d_{12}}\right).$$

Presupunem linia scurtcircuitată și pusă la pământ. Spectrul frecvențelor va fi dat de formula :

$$[\Omega] = \frac{\pi}{l}\,[V]\,[K_j], \tag{51}$$

în care :

$$[V]^2 = [C]^{-1}\,[L]^{-1}. \tag{52}$$

Deoarece frecvențele fundamentale sînt proporționale cu valorile proprii v_{jj} ale matricei $[V]$ și totodată egale cu inversurile rădăcinilor pătrate ale valorilor proprii ale matricei $[V]^{-2}$, rezultă :

$$[V]^{-2} = [L][C] = \begin{bmatrix} L_{11}C_{11} - L_{12}C_{21}, & L_{12}C_{22} - L_{11}C_{12} \\ L_{21}C_{11} - L_{12}C_{21}, & L_{22}C_{22} - L_{21}C_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_{11}, & \gamma_{12} \\ \gamma_{21}, & \gamma_{22} \end{bmatrix}. \tag{53}$$

Valorile proprii δ_1 și δ_2 ale matricei $[V]^{-2}$ sînt date de rădăcinile ecuației caracteristice

$$\delta^2 - (\gamma_{11} + \gamma_{22})\,\delta - \gamma_{12}\gamma_{21} = 0, \tag{54}$$

adică

$$\delta_1 = \frac{1}{2}(L_{11}C_{11} + L_{22}C_{22} - L_{12}C_{21} - L_{21}C_{12}) + \\ + (L_{11}C_{11} + L_{22}C_{22} - L_{12}C_{21} - L_{21}C_{12})^2 - 4(L_{12}C_{22} - \\ - L_{11}C_{12})(L_{21}C_{11} - L_{22}C_{21}); \tag{55}$$

$$\delta_2 = \frac{1}{2}(L_{11}C_{11} + L_{22}C_{22} - L_{12}C_{21} - L_{21}C_{12}) - \\ - (L_{11}C_{11} + L_{22}C_{22} - L_{12}C_{21} - L_{21}C_{12})^2 - 4(L_{12}C_{22} - \\ - L_{11}C_{12})(L_{21}C_{11} - L_{22}C_{21}). \tag{56}$$

Pulsațiile fundamentale ω_1 și ω_2 vor avea valorile :

$$\omega_1 = \frac{\pi}{l}\frac{1}{\sqrt{\gamma_1}}, \quad \omega_2 = \frac{\pi}{l}\frac{1}{\sqrt{\gamma_2}}, \tag{57}$$

iar armonicele corespunzătoare sînt :

$$k_1\omega_1 = \frac{k_1\pi}{l}\frac{1}{\sqrt{\gamma_1}}, \quad k_2\omega_2 = \frac{k_2\pi}{l}\frac{1}{\sqrt{\gamma_2}}; \; k_1, k_2 = 1, 2 \ldots n. \tag{58}$$

Matricea pulsațiilor fundamentale are forma diagonală

$$\begin{bmatrix} \omega_1, & 0 \\ 0, & \omega_2 \end{bmatrix}. \tag{59}$$

Pe fiecare fir se vor găsi unde staționare avînd pulsații $k_1\omega_1$ și $k_2\omega_2$. Nu se poate determina o lungime de linie l pentru care cel puțin unul din fire să oscileze în sfert de undă, semiundă etc.

Dacă firele liniei se găsesc la aceeași înălțime $h_1 = h_2 = h$ față de pămînt, atunci :

$$R_{11} = R_{22} = R, \quad L_{11} = L_{22} = L, \quad C_{11} = C_{22} = C, \\ R_{12} = R_{21} = R_m, \; L_{12} = L_{21} = L_m, \; C_{12} = C_{21} = C_m, \tag{60}$$

iar valorile proprii δ_1 și δ_2 sînt egale cu :

$$\delta_1 = (L + L_m)(C - C_m), \tag{61}$$

$$\delta_2 = (L - L_m)(C + C_m). \tag{62}$$

Pulsațiile fundamentale ω_1 și ω_2 vor fi date de relațiile

$$\omega_1 = \frac{\pi}{l} \frac{1}{\sqrt{(L + L_m)(C - C_m)}}, \quad \omega_2 = \frac{\pi}{l} \frac{1}{\sqrt{(L - L_m)(C + C_m)}}, \tag{63}$$

iar matricea pulsațiilor va fi tot diagonală :

$$\begin{bmatrix} \omega_1, & 0 \\ 0, & \omega_2 \end{bmatrix}. \tag{64}$$

Deși firele liniei ocupă aceeași poziție față de pămînt, totuși undele staționare au pulsații diferite.

Pulsațiile ω_1 și ω_2 sînt egale :

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega,$$

cînd $\delta_1 = \delta_2$, adică e îndeplinită condiția :

$$\frac{L}{L_m} = \frac{C}{C_m}. \tag{65}$$

În acest caz, forma normală a matricei pulsațiilor este :

$$\begin{bmatrix} \omega, & 1 \\ 0, & \omega \end{bmatrix}. \tag{66}$$

Linia oscilează numai cu o frecvență fundamentală dacă $\delta_1 = 0$' adică :

$$C = C_m, \tag{67}$$

sau $\delta_2 = 0$, adică :

$$L = L_m, \tag{68}$$

iar matricele pulsațiilor au următoarea formă :

$$\begin{bmatrix} 0, & 0 \\ 0, & \omega \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \omega, & 0 \\ 0, & 0 \end{bmatrix}. \tag{69}$$

Condiția (67) este realizată cînd

$$\frac{2h}{r} = \sim \frac{d_{12'}}{d_{12}}, \tag{70}$$

deci fie pentru linia situată la înălțime mare de pămînt, astfel ca influența acestuia să fie neglijabilă, fie pentru linia cu conductoare apropiate.

Condiția (68) este realizată cînd

$$r = \sim d_{12}, \tag{71}$$

adică linia are conductoarele apropiate.

Pentru determinarea constantelor lineice de propagare ale firelor liniei, trebuie calculate valorile proprii ale matricei

$$[\Gamma_{zy}] = \begin{bmatrix} R_{11}+j\omega L_{11}, & R_{12}+j\omega L_{12} \\ R_{21}+j\omega L_{21}, & R_{22}+j\omega L_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_{11}+j\omega C_{11}, & G_{12}+j\omega C_{12} \\ G_{21}-j\omega C_{21}, & G_{22}+j\omega C_{22} \end{bmatrix} = \sim$$
$$\begin{bmatrix} R_{11}+j\omega L_{11}, & R_{12}+j\omega L_{12} \\ R_{21}+j\omega L_{21}, & R_{22}+j\omega L_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j\omega C_{11}, & -j\omega C_{12} \\ -j\omega C_{21}, & j\omega C_{22} \end{bmatrix}, \tag{72}$$

în care s-au neglijat perditanțele G_{jk}. Dacă în (72) se face $R_{jk} = 0$, matricea $[\Gamma_{zy}]$ se reduce la :

$$[\Gamma_{zy}] = -\omega^2 [L][C] = -\omega^2 [V]^{-2}. \tag{73}$$

Procedînd la fel ca la rezolvarea primei probleme de valori proprii, se constată :

În general, matricea $[\Gamma_{zy}]$ are două valori proprii distincte, γ_{11} și γ_{22}, iar rădăcinile lor pătrate, $\lambda_1 = \sqrt{\gamma_{11}}$ și $\lambda_2 = \sqrt{\gamma_{22}}$, sînt constantele lineice cărora le corespunde matricea

$$\begin{bmatrix} \lambda_1, & 0 \\ 0, & \lambda_2 \end{bmatrix}. \tag{74}$$

Pe fiecare fir al liniei, energia se transmite prin două unde directe de tensiune și curent, de forma $C_1 e^{\lambda_1 x}$, $C_2 e^{\lambda_2 x}$, și prin două unde inverse de tensiune și de curent, de forma $C_1' e^{-\lambda_1 x}$, $C_2' e^{-\lambda_2 x}$.

Dacă se calculează valorile proprii ale matricei $[\Gamma_{zy}]$, se obțin constantele lineice de propagare λ_1 și λ_2 :

$$\lambda_1^2 = \frac{j\omega}{2}\Big[(R_{11}+j\omega L_{11})C_{11} + (R_{22}+j\omega L_{22})C_{22} - (R_{12}+j\omega L_{12})C_{21} -$$
$$- (R_{21}+j\omega L_{21})C_{21} + \sqrt{((R_{11}+j\omega L_{11})C_{11} + (R_{22}+j\omega L_{22})C_{22} -}$$
$$\sqrt{-(R_{12}+j\omega L_{12})C_{21} - (R_{21}+j\omega L_{21})C_{21})^2 - 4((R_{21}+} \tag{75}$$
$$\sqrt{+j\omega L_{21})C_{11} - (R_{22}+j\omega L_{22})C_{21})\cdot}$$
$$\sqrt{\times((R_{12}+j\omega L_{12})C_{22} - (R_{11}+j\omega L_{11})C_{12})}\Big],$$

$$\lambda_2^2 = \frac{j\omega}{2}[(R_{11}+j\omega L_{11})C_{11} + (R_{22}+j\omega L_{22})C_{22} - (R_{12}+$$
$$+j\omega L_{12})C_{21} - (R_{21}+j\omega L_{21})C_{12}) - \sqrt{(R_{11}+j\omega L_{11})C_{11} +}$$
$$\sqrt{+(R_{22}+j\omega L_{22})C_{22} - (R_{12}+j\omega L_{12})C_{21} - (R_{21}+} \tag{76}$$
$$\sqrt{+j\omega L_{21})C_{12})^2 - 4[(R_{21}+j\omega L_{21})C_{11} - (R_{22}+j\omega L_{22})C_{21}]}$$
$$\sqrt{[(R_{21}+j\omega L_{21})C_{11} - (R_{22}+j\omega L_{22})C_{21}]}.$$

Dacă firele liniei se găsesc la aceeaşi înălţime h deasupra pămîntului, păstrînd notaţiile (60), constantele lineice λ_1 şi λ_2 au valorile :

$$\lambda_1^2 = j\omega[(R + j\omega L) + (R_m + j\omega L_m)][C - C_m] \tag{77}$$

$$\lambda_2^2 = j\omega[(R + j\omega L) - (R_m + j\omega L_m)][C + C_m]. \tag{78}$$

Matricea constantelor lineice de propagare are forma diagonală :

$$\begin{bmatrix} \lambda_1, & 0 \\ 0, & \lambda_2 \end{bmatrix}. \tag{79}$$

Deşi firele liniei ocupă aceeaşi poziţie faţă de pămînt, totuşi pe fiecare fir, transmisiunea energiei se face tot prin două unde directe şi două unde inverse de tensiune şi de curent.

Dacă $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, adică e îndeplinită condiţia :

$$\frac{R + j\omega L}{R_m + j\omega L_m} = \frac{C}{C_m}; \frac{R}{R_m} = \frac{L}{L_m} = \frac{C}{C_m}, \tag{80}$$

forma normală a matricei constantelor lineice e cvasidiagonală :

$$\begin{bmatrix} \lambda, & 1 \\ 0, & \lambda \end{bmatrix}. \tag{81}$$

Linia are numai o constantă lineică λ, şi anume $\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 \neq 0$, cînd

$$C = C_m, \tag{82}$$

şi $\lambda_1 \neq 0$ şi $\lambda_2 = 0$, cînd

$$R = R_m, \tag{83}$$

$$L = L_m. \tag{84}$$

Matricea constantelor lineice de propagare are una din formele :

$$\begin{bmatrix} \lambda, & 0 \\ 0, & 0 \end{bmatrix} \text{ sau } \begin{bmatrix} 0, & 0 \\ 0, & \lambda \end{bmatrix}.$$

Condiţiile (82) şi (83) coincid cu (67) şi (68), iar condiţia (83) poate fi realizată dacă rezistenţa electrică R_c în curent continuu a firului este neglijabilă. Transmisiunea energiei electromagnetice se face numai printr-o undă directă şi o undă inversă de tensiune, respectiv de curent :

$$C_1 e^{\lambda x} \quad ; \quad C_1' e^{-\lambda x}. \tag{85}$$

Deşi şi în cazul în care matricea constantelor lineice are forma cvasidiagonală (83) există o singură valoare a constantei lineice, totuşi pe fiecare fir se vor găsi în fiecare moment cîte două unde directe şi două unde inverse de tensiune, respectiv de curent :

$$C_1 e^{\lambda x}, \quad C_2 x e^{\lambda x} \text{ şi } C_1' e^{-\lambda x}, \quad C_2' x e^{-\lambda x}. \tag{86}$$

Împrejurarea că cele două valori proprii coincid în cazul matricei cvasidiagonale (81) nu reduce numărul undelor, ci schimbă numai forma acestora.

b) *Pentru sistemul trei fire-pământ*, matricea $[\Gamma_{zy}]$ are forma :

$$[\Gamma_{zy}] = \begin{bmatrix} \gamma_{11}, & \gamma_{12}, & \gamma_{13} \\ \gamma_{21}, & \gamma_{22}, & \gamma_{23} \\ \gamma_{31}, & \gamma_{32}, & \gamma_{33} \end{bmatrix}, \tag{87}$$

iar ecuația caracteristică va fi :

$$(\gamma - \gamma_1)(\gamma - \gamma_2)(\gamma - \gamma_3) = 0, \tag{88}$$

în care γ_1, γ_2, γ_3 sînt rădăcinile ecuației (40).

Se disting următoarele cazuri :

α) $\gamma_1 \neq \gamma_2 \neq \gamma_3$, căruia îi corespunde $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$. Constantele lineice λ_1, λ_2 și λ_3 fiind distincte, pe fiecare fir energia se transmite prin cîte trei perechi de unde directe :

$$C_1 e^{\lambda_1 x}, \quad C_2 e^{\lambda_2 x}, \quad C_3 e^{\lambda_3 x},$$

și trei perechi de unde inverse :

$$C_1' e^{-\lambda_1 x}, \quad C_2' e^{-\lambda_2 x}, \quad C_3' e^{-\lambda_3 x}.$$

Matricea $[\Lambda]$ are forma :

$$\begin{bmatrix} \lambda_1, & 0, & 0 \\ 0, & \lambda_2, & 0 \\ 0, & 0, & \lambda_3 \end{bmatrix}. \tag{89}$$

β) $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma$, căruia îi corespunde $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$. Constantele lineice fiind egale, pe fiecare fir energia electrică se transmite prin cîte trei perechi de unde directe :

$$C_1 e^{\lambda x}, \quad C_2 x e^{\lambda x}, \quad C_3 x^2 e^{\lambda x},$$

și trei perechi de unde inverse :

$$C_1' e^{-\lambda x}, \quad C_2' x e^{-\lambda x}, \quad C_3' x^2 e^{-\lambda x}.$$

Matricea $[\Lambda]$ are forma cvasidiagonală :

$$\begin{bmatrix} \lambda, & 1, & 0 \\ 0, & \lambda, & 1 \\ 0, & 0, & \lambda \end{bmatrix}. \tag{90}$$

γ) $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$, $\gamma_3 \neq \gamma$, căruia îi corespunde $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, $\lambda_3 \neq \lambda$. Energia se transmite prin două perechi de unde directe :

$$C_1 e^{\lambda x}, \quad C_2 x e^{\lambda x}, \quad C_3 e^{\lambda_3 x},$$

şi două perechi de unde inverse:

$$C_1' e^{-\lambda x}, \quad C_2' x e^{-\lambda x}, C_3' e^{-\lambda_3 x},$$

iar matricea constantelor lineice este:

$$\begin{bmatrix} \lambda, & 1, & 0 \\ 0, & \lambda, & 0 \\ 0, & 0, & \lambda_3 \end{bmatrix}. \tag{91}$$

δ) $\gamma_1 \neq \gamma_2$, $\gamma_3 = 0$, căruia îi corespunde $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_3 = 0$, iar matricea $[\Lambda]$ are forma:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1, & 0, & 0 \\ 0, & \lambda_2, & 0 \\ 0, & 0, & 0 \end{bmatrix}. \tag{92}$$

Energia se transmite prin două perechi de unde directe:

$$C_1 e^{\lambda_1 x}, \quad C_2 e^{\lambda_2 x},$$

şi două perechi de unde inverse:

$$C_1' e^{-\lambda_1 x}, \quad C_2' e^{-\lambda_2 x}.$$

ε) $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma, \gamma_3 = 0$, căruia îi corespunde $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda, \lambda_3 = 0$, iar matricea $[\Lambda]$ are forma:

$$\begin{bmatrix} \lambda, & 1, & 0 \\ 0, & \lambda, & 0 \\ 0, & 0, & 0 \end{bmatrix}. \tag{93}$$

Energia se transmite prin două perechi de unde directe:

$$C_1 e^{\lambda x}, \quad C_2 x e^{\lambda x},$$

şi două perechi de unde inverse:

$$C_1' e^{-\lambda x}, \quad C_2' x e^{-\lambda x}.$$

μ) $\gamma_1 = \gamma$, $\gamma_2 = \gamma_3 = 0$, căruia îi corespunde $\lambda_1 = \lambda, \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, iar matricea $[\Lambda]$ are forma:

$$\begin{bmatrix} \lambda, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0 \end{bmatrix}. \tag{94}$$

Energia se transmite printr-o pereche de unde directe, $C_1 e^{\lambda x}$, şi o pereche de unde inverse, $C_1' e^{-\lambda x}$, adică la fel ca la linia bifilară.

Fiecărui caz în parte îi corespunde o anumită configuraţie a firelor liniei. Astfel ultimul caz corespunde liniei trifazate simetrice situate departe de pământ.

Analog se determină și spectrul frecvențelor de oscilație liberă a liniei.

5. *Concluzii.* Aplicarea calculului matricial la studiul transmisiunii energiei electromagnetice pe o linie electrică lungă multifilară conduce la rezultate remarcabile :

— ecuațiile care descriu propagarea tensiunii și curentului sînt similare ca formă ecuațiilor telegrafiștilor pentru linia bifilară, cu deosebirea că termenii care intervin în ecuații sînt matrice.

— comportarea liniei în regim permanent este caracterizată de matricea $[\Gamma_{zy}]$. Numărul și forma undelor de tensiune și de curent depind de structura matricei $[\Gamma_{zy}]$.

— studiul regimului tranzitoriu conduce de asemenea la o problemă de valori proprii, spectrul frecvențelor fiind dat de matricele $[L]$, $[C]$ în cazul pierderilor nule.

— influența pămîntului asupra propagării pe linie se manifestă prin introducerea a două perechi de unde suplimentare de tensiune și de curent, dintre care una e directă iar cealaltă e inversă.

Primit la redacție la 16 septembrie 1964

TIPIZAREA TOTALĂ A STUDIULUI REȚELELOR CU AJUTORUL „ANALIZEI NODALE“[1)]

DE

PAUL DIMO

MEMBRU CORESPONDENT AL ACADEMIEI R.P.R.

Institutul de energetică al Academiei R.P.R., șos. Vitan 236, București

621. 316.11 :621.372.21

Se arată posibilitatea de tipizare totală a studiilor rețelelor electrice, cu ajutorul analizei nodale pe echivalenți radiali (REI). Acest lucru permite o automatizare totală a calculului care poate fi astfel urmărit pe 3 căi paralele : calea analitică utilizînd generalizat matricea [Y], calea topologică, utilizînd generalizat schema radială ca structură tip, și calea imaginilor grafice, utilizînd generalizat graficul tip al curenților de scurtcircuit care permite analiza simplă a fenomenelor fizice.

INTRODUCERE

În cele ce urmează ne propunem a sintetiza experiența cîștigată prin aplicarea generalizată a *analizei nodale* pe echivalenți radiali (REI) la toate problemele specifice sistemelor electroenergetice, așa cum s-a făcut în ultimii ani în R.P.R. [1], [2], [3], [4].

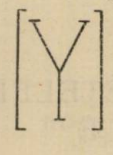
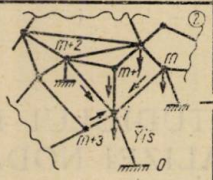
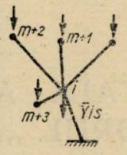
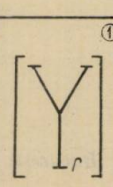
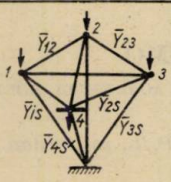
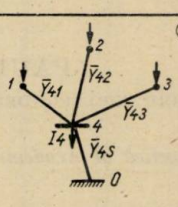
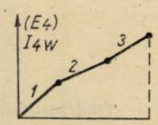
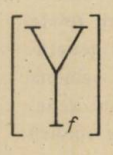
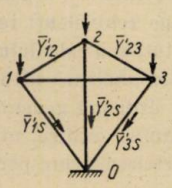
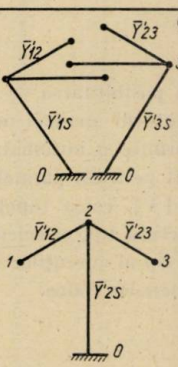
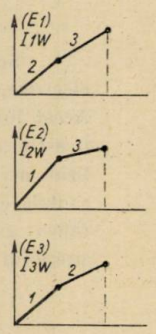
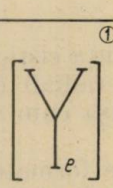
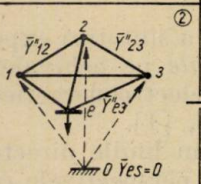
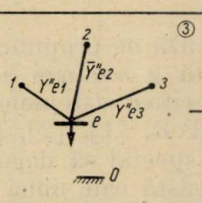
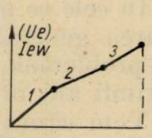
Vom căuta în special să degajăm liniile directoare formate în studiile ce se fac pe această cale nouă și perspectivele ce apar ca indicate și posibile din rezultatele obținute pînă acum.

S-a ajuns la studiul simultan al problemelor pe 3 căi de cercetare diferite — cea analitică, cea topologică și cea grafică sau a imaginilor

[1)] Articol apărut și în „Rev. Roum. Sci. Techn. — Electrotechn. Energ.“, **9**, *4* (1964).

St. cerc. energ. electr. Tom 14 Nr. 4 p. 869—875 București 1964

TABLOU REPREZENTATIV AL STUDIULUI PE CELE TREI CĂI PARALELE: ANALITIC, TOPOLOGIC, GRAFIC.

SISTEMUL		ANALITIC — 1 — TRANSFORMAREA [Y]	ECHIVALENȚI REI — 2 — ECHIVALENȚI REI — SISTEM —	ECHIVALENȚI REI — 3 — SCHEMA REI PENTRU UN NOD	IMAGINI NODALE — 4 — DIAGRAMA TIPA CURENȚILOR DE SCURT CIRCUIT
I	SISTEMUL REAL	① 	② 	③ 	④ —
II	SISTEME ECHIVALENTE DE DIVERSE TIPURI	① 	② 	③ 	④ 
III		① 	② 	③ 	④ 
IV		① 	② 	③ 	④ 

OBSERVAȚIE : Toți curenții injectați pleacă (sosesc) din nodul comun 0 (pământ neutru)

nodale — fiecare cu importanţa ei. Pe scurt, fiecare din aceste 3 căi se rezumă la :

1. *Calea analitică* utilizează în mod generalizat ecuaţiile matriciale ale injecţiilor de curenţi în noduri în funcţie de potenţialele acestora. Matricele de admitanţe $[Y]$ ce rezultă în diversele transformări ale sistemelor cu diferite valori pentru admitanţele corespunzătoare coeficienţilor y, pot fi considerate ca adevărate matrice „topologice", căci din coeficienţii tabulaţi (y) rezultă admitanţele ramurilor schemelor echivalente.

2. *Calea topologică* se bazează pe transformarea într-o structură topologică tip, aceea a schemei radiale (REI). Indiferent de complexitatea schemei reale ea este întotdeauna transformată într-o schemă echivalentă pentru un nod. Aceste scheme echivalente pot fi considerate ca detaşate din diverse „echivalente" de sistem. „Echivalentele de sistem" sînt de fapt corpuri poligonale, şi au fost denumite „echivalente REI" ale sistemului.

3. *Calea grafică sau a imaginilor nodale* se bazează pe întocmirea diagramei tip, reprezentînd curenţii de scurtcircuit ai nodului cercetat, din care rezultă evoluţia fenomenelor din sistem „văzute" dinspre nodul respectiv.

Tabloul de mai jos redă schematic corespondenţa dintre aceste 3 căi.

O etapă de cercetare dintr-un anumit studiu este caracterizată în primul rînd de matricea $[Y]$ corespunzătoare structurii respective a reţelei, matrice care reprezintă unitar echivalentul REI al sistemului şi care figurează în coloana 1.

I. CALEA ANALITICĂ. TRANSFORMĂRILE SUCCESIVE ALE MATRICEI [Y]

Calea generală utilizată pleacă totdeauna de la matricea $[Y]$ care ne scrie simplu pe baza tabulării admitanţelor reale ale laturilor sistemului, anumită matricea admitanţelor reţelei reale. Ea cuprinde coeficienţii y ce figurează în ecuaţiile matriciale ale injecţiilor de curenţi în noduri $I = \sum y E$, ecuaţii din care poate fi determinat regimul pe căi iterative cunoscute. Regimul este considerat determinat la un moment dat de valorile curenţilor şi tensiunilor din matricele $[I]$ şi $[E]$ referitoare la nodurile sistemului (I = curenţi injectaţi ; E = tensiuni nodale).

Este întotdeauna posibil să se reducă ecuaţia matricială a curenţilor injectaţi la ecuaţia pentru un număr anumit de noduri ; pentru aceasta este necesar ca pentru fiecare nod ce trebuie eliminat, să se considere o relaţie în plus între curentul injectat şi tensiune. Se consideră deci că în jurul unui regim determinat există o relaţie liniară între tensiunea nodală (nod-pămînt) E_s şi curentul injectat I_s. În acest caz ecuaţia generală

$$[I] = [Y] \cdot [E], \tag{1}$$

poate fi redusă [2] cu numărul de noduri pentru care se consideră că există relația de dependență între curent și tensiune

$$I_s = y_s E_s. \tag{2}$$

Se poate observa că relația (2) este întotdeauna împlinită deci curentul I_s ar proveni din aplicarea tensiunii E_s unei admitanțe. Dacă nu, ea poate fi considerată ca o ipoteză de variație în jurul regimului determinat și cunoscut, din care s-a stabilit valoarea lui y_s pentru nodul s.

Se obțin astfel diverse tipuri de matrice $[Y]$ care toate corespund unui echivalent de sistem, cum se observă în coloana a 2-a a tabloului. Tabloul cuprinde următoarele figurări):

Rîndul I: matricea $[Y]$ a sistemului real;

„ II: matricea $[Y_r]$ a sistemului în care s-au redus toate nodurile cu sarcini mai puțin unul singur (notat cu 4 în schema din coloana a doua);

„ III: matricea $[Y_f]$ a sistemului în care s-au redus toate nodurile cu sarcini și în care figurează deci numai noduri generatoare. Ea corespunde ECHIVALENTULUI FINAL AL SISTEMULUI;

„ IV: matricea $[Y_e]$ a unui sistem în care figurează și un nod fictiv echivalent e, în care s-a introdus întreaga sarcină a rețelei și care se deduce prin o transformare simplă a matricei echivalentului final, arătată în referința [2].

II. CALEA TOPOLOGICĂ

Schimbările de structură ce apar în coloana a 2-a a tabloului, în diverșii echivalenți de sistem tipizați, valorile admitanțelor de legături respective, care pot fi pozitive, negative sau nule, se pretează în mod deosebit la studiul structurii rețelei reale. Un exemplu este studiul pierderilor care poate fi întreprins pe echivalentul reținut în rîndul 4 din tablou, așa cum s-a arătat în studiul din referința [4].

Examinînd valorile reale ce apar într-un asemenea echivalent pentru admitanțe și circulațiile respective de curenți, cu pierderile determinate de ei pentru o serie limitată de regimuri, *se poate deduce o schemă topologică și mai simplă reținînd de exemplu numai ramurile radiale ale anumitor noduri* valabilă bineînțeles numai pentru anumite regimuri. Noua structură topologică, simplificată, poate servi în studiul întreprins într-un anumit scop, cu un grad de aproximativ care poate fi ușor evaluat.

Fiecare schemă radială, ce poate fi extrasă din echivalentul REI al sistemului din rîndurile 2, 3 sau 4 ale tabloului, corespunde unei linii a

[2] Pentru eliminarea nodului i, termenii noi ai matricei au în funcție de cei vechi expresiile:

$$y_{mn}\ \text{nou} = y_{mn}\ \text{vechi} - \frac{y_{mi} - y_{ni}}{y_{ii}}.$$

matricei [Y] respective, linie în care sînt tabulate elementele y, în acelaşi mod ca în matricea [Y] a reţelei reale din primul rînd al tabloului.

În schemele radiale, extrase în coloana a 3-a a tabloului din echivalenţii REI de sisteme (care se găsesc în coloana a 2-a) *capetele ramurilor radiale au toate aplicate tensiunile reale ale generatoarelor sistemului.* În schemele din coloana a 3-a, ale unui nod, *generatoarele debitează în nodul respectiv numai cota parte a lor din curent* (sau din curentul de scurtcircuit) adică numai curenţii pe care îi determină în nodul respectiv. În echivalentul de sistem din coloana a 2-a, generatoarele apar însă cu toate mărimile lor reale (curenţi, puteri, tensiuni) adică cu adevărata lor identitate.

III. CALEA IMAGINILOR NODALE

Sistemul fiind redus la o simplă schemă radială, se întocmeşte graficul tipizat al curenţilor de scurtcircuit — cunoscut din numeroase lucrări publicate ([4], [7] etc.) — în care toate generatoarele figurează cu tensiunile lor reale şi cu cota lor parte de contribuţie la curentul de scurtcircuit real al nodului. Aceşti curenţi apar cu valori identice în schema reală, în schema REI, şi în graficul tipizat. Grafice de acelaşi tip dar transformate pentru schimburi de regim, sau grafice în evantail pentru regimuri dinamice, înlocuiesc într-un singur mod alte reprezentări grafice, utilizate azi, de diverse tipuri, pentru diferitele probleme (de exemplu: graficul în evantail înlocuieşte curbele evoluţiei unghiurilor relative dintre rotoare). Astfel, imaginile *au fost reduse în orice problemă la un grafic tipizat*, care poate fi utilizat chiar şi pentru noduri fictive, cum s-a arătat în cazul utilizării nodului sarcinii unice.

IV. TIPIZAREA GENERALIZATĂ

Unul din avantajele esenţiale ale „analizei nodale" îl alcătuieşte posibilitatea tipizării totale a tuturor operaţiilor, prin reducerea lor la operaţii simple, începînd de la calculul analitic, trecînd prin „echivalenţii REI" şi ajungînd la „imaginile nodale". Această „tipizare" are o deosebită valoare în cazul utilizării calculatoarelor numerice. Astfel:

Tabularea admitanţelor este *tipizată* în matricea [Y]. Echivalenţii de sistem au o structură topologică unică — de tip poligonal, în fiecare nod rămas în echivalent se leagă radial cu toate celelalte noduri (inclusiv pămîntul).

Se poate stabili următoarea corespondenţă a elementelor pentru admitanţele schemelor tipizate:

A. O linie a matricei Y = *tabularea admitanţelor unei scheme radiale* (REI). Termenii nediagonali (cu sau fără semn schimbat) au valoarea admitanţelor legăturilor radiale din schemele REI, iar termenul diagonal (fără sau cu semn schimbat) are valoarea sumei admitanţelor în jurul nodului

central al schemei REI (deci admitanțele radiale plus admitanța nod-pământ).

B. *Întreaga matrice* $[Y]$ = *tabularea admitanțelor echivalentului REI al sistemului*, din care pot fi extrase schemele REI pentru fiecare nod (corespunzînd liniilor, vezi *A*).

Această corespondență între părțile matricei și schemele echivalente se păstrează în mod identic pentru orice transformare a matricei $[Y]$, transformare care astfel poate fi considerată că corespunde unei transformări a sistemului fizic respectiv.

Se observă deci că utilizării generalizate a matricei $[Y]$, *i se poate asocia în mod permanent un sistem fizic tipizat* care se deduce prin identificarea de termeni și care rămîne întotdeauna același (REI).

★

Apare astfel posibilă o concepție nouă pornind de la nod ca element reprezentativ al sistemului, propusă de altfel în ultimul timp și de alți autori, pe considerente diferite [11], [12]. Conceptul „modelului numeric al nodului" și acela al „modelului numeric al întregii rețele" propus de curînd [12] sînt de reținut.

Din aceste modele numerice [12] extragerea pe cale digitală a curenților de scurtcircuit pe noduri, conduc la deducerea tipizată a schemelor REI, sau a echivalentelor REI de sistem. Asemenea „modele numerice" pot sta la baza realizării tipizate de diverse programe, din care se pot stabili în paralel schemele radiale tipizate (REI) alături de modelele numerice, și diagramele tip ale curenților de scurtcircuit în noduri.

★

Se mai poate observa că, în problemele complexe în care dependența liniară între curenți și tensiuni pentru nodurile care se reduc nu ar putea fi considerată în regimuri foarte diferite, *se ajunge la scheme echivalente cu valori variabile de la regim la regim pentru admitanțele brațelor*. Aceste valori vor rezulta mai departe din identificarea termenilor matricelor reduse pe aceeași cale la numărul de noduri ce sînt păstrate în echivalent, constantele y_s *rezultînd cu valori diferite de la regim la regim*. Această variație a valorilor ramurilor, alcătuiește, bineînțeles, un element în plus în studiul sistemului respectiv, care poate avea semnificația lui și aduce în unele cazuri indicații din cele mai prețioase.

★

În concluzie:

Asocierea metodelor numerice nodale, plecînd de la conceptul nou al „modelului numeric" pe nod [11], [12] cu analiza nodală pe scheme radiale conduce la o tipizare totală a studiului oricărei rețele și în orice problemă:

— *Calculul analitic* — poate fi format din programe tipizate bazate pe „modelul numeric" al unui nod (matricele Y);

— *Structura topologică* — se echivalează cu modelul unic al schemei radiale (REI) sau modelul „echivalentului REI al sistemului" din care se extrag schemele radiale tip, întotdeauna aceleași.

— *Diagramele reprezentative de stări*, rezultînd din reprezentarea grafică a curenților de scurtcircuit la rîndul lor cu un aspect tip.

★

Astfel, cercetătorul este pus în fața unui singur sistem fizic simplu și tipizat, întotdeauna același, echivalent cu sistemul real, sistem a cărui determinare se face întotdeauna pe aceeași cale prin programe tip. Problemele pot fi astfel reduse întotdeauna la aceleași aspecte cunoscute și cazuri simple, prin aceleași căi tipizate, asociate calculatoarelor numerice.

Primit la redacție la 20 iulie 1964

BIBLIOGRAFIE

1. Paul Dimo, *Conceptele și procedeele analizei nodale.* St. cerc. energ., seria A, **13** (1963).
2. — *Soluția problemei pierderilor pe echivalenți REI.* St. cerc. energ., seria A, *4* (1963).
3. Paul Dimo, Moraite, Huckert, *Calculul exact al curenților de scurtcircuit cu determinarea simultană a schemelor REI.* Energetica, *9* (1963).
4. Paul Dimo, *Analiza sistemului electroenergetic.* Edit. tehnică, București, 1958.
5. — *Simplification des problèmes des réseaux par l'introduction d'un nouveau concept.* Rapport *318*, CIGRE (1964).
6. — *L'analyse des réseaux par la méthode nodale (diverses applications).* Revue générale de l'Electricité, mars 1962 ; nov. 1961 ; déc. 1960.
7. — *L'analyseur graphique.* Rapport *302*, CIGRE (1958).
8. — *Une seule structure physique type pour l'étude des réseaux.* Revue Roumaine des Sciences techniques. Série d'Electrotechnique et Energétique, **9**, *1—2* (1964).
9. — *Primenenie uzlowogo metoda*, Electricestwo, *8* (1962).
10. — *Expres-informatia-referat nr. 46*, apr. (1962).
11. Red, Reed, Mc Kinley Polk, Hugo, Martin, *Digital approach to power system engineering—Power Apparatus and system*, June, 1961.
12. H. Siemaszko, *Représentation numérique des réseaux électriques.* Rapport *301* CIGRE (1946).

FORME GENERALE DE INTERCONEXIUNE ALE REȚELELOR FICTIVE, CORESPUNZĂTOARE SISTEMELOR DE COMPONENTE UTILIZATE ÎN STUDIUL REȚELELOR TRIFAZATE[1)]

DE

M. PREDA și F. SPINEI

candidat în științe tehnice

Institutul politehnic, Cal. Griviței nr. 132, București

621.316.11.025.3 :621.3.012.3

Lucrarea face analiza sistematică a transformării impedanțelor, rețelelor fictive și a schemelor de interconexiune pentru sisteme de componente oarecare.

Prin aplicarea teoremei generale a transfigurărilor electrice se deduce o formă generală a schemei de interconexiune a rețelelor fictive, valabilă pentru rețelele cu un număr oarecare de nesimetrii parțiale și un sistem de componente oarecare.

În cazul rețelelor cu o singură nesimetrie parțială se deduc forme originale de interconexiune ale rețelelor fictive.

Rezultatele obținute se aplică sistemelor de componente frecvent utilizate în studiul mașinilor și al rețelelor electrice trifazate, stabilind, pe o cale comodă și unitară, schemele de interconexiune generale corespunzătoare diferitelor nesimetrii parțiale particulare.

Lucrarea de față soluționează problema determinării schemelor de interconexiune a rețelelor fictive ale sistemelor de componente utilizate în studiul sistemelor trifazate nesimetrice.

[1)] Articol apărut și în „Rev. Roum. Sci. Techn.— Electrotechn. Energ.", **9**, *4* (1964).

St. cerc. energ. electr. Tom 14 Nr. 4 p. 877–897 București 1964

Este bine cunoscută utilitatea folosirii unor sisteme de componente, larg folosite în studiul mașinilor electrice, rețelelor electrice, pentru studiul regimurilor trifazate nesimetrice în rețele.

1. ASPECTUL GENERAL AL PROBLEMEI

1.1. Rețele fictive în cazul unui sistem oarecare de componente

Relațiile dintre mărimile existente în rețea și componentele sistemului utilizat sînt definite [2]) cu ajutorul unei matrice de transformare $[C]$:

$$[I] = [C]\cdot[I_c], \tag{1.1}$$

$$[U] = [C]\cdot[U_c]. \tag{1.2}$$

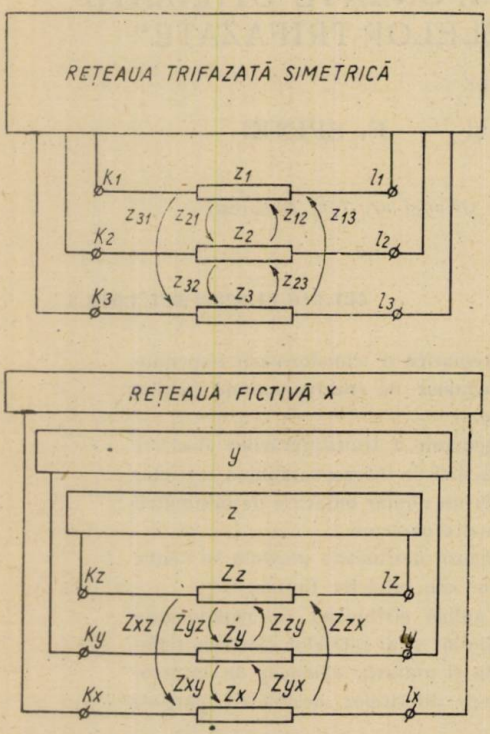


Fig. 1.1. — Echivalența unui receptor nesimetric în cele trei rețele fictive ale sistemelor de componente.

Elementele constitutive ale rețelei considerate definesc matricea $[Z]$ a rețelei, ecuațiile sale de funcționare fiind:

$$[U] = [Z]\cdot[I]. \tag{1.3}$$

Ținînd seamă de relațiile (1.1) și (1.2), se deduce relația dintre tensiunile și curenții sistemului de componente:

$$[U_c] = [C]^{-1}\cdot[Z]\cdot[C]\cdot[I_c]. \tag{1.4}$$

Forma rețelelor fictive ale sistemului de componente este deci definită de matricea transformată a impedanțelor:

$$[Z_c] = [C]^{-1}\cdot[Z]\cdot[C]. \tag{1.5}$$

În cazul unui receptor nesimetric oarecare, putem scrie cu ușurință matricea $[Z]$, determinată de structura receptorului, și apoi, ținînd seamă de matricea de transformare utilizată $[C]$, să stabilim matricea impedanțelor $[Z_c]$, care definește structura echivalentă a receptorului dat în cele trei rețele fictive corespunzătoare.

[2]) Pentru simplitate, se iau în considerare numai cazurile uzuale în care se utilizează o aceeași matrice de transformare atît pentru curenți, cît și pentru tensiuni. Se notează cu litere majuscule imaginile Laplace ale curenților și tensiunilor, impedanțele și admitanțele operaționale. Se consideră condiții inițiale de zero.

Pentru determinarea structurii rețelelor fictive, relația (1.5) se aplică tuturor elementelor din rețea.

Cazul general îl constituie un element trifazat dinamic nesimetric, mașina trifazată nesimetrică (fig. 1.1).

1.2. Utilizarea rețelelor fictive în studiul rețelelor trifazate nesimetrice

Larga utilizare a sistemelor de componente pentru studiul regimurilor de funcționare a sistemelor electroenergetice a pus problema modelării rețelelor fictive prin elemente statice: rezistoare, bobine și condensatoare.

În general, rețelele fictive (fig. 1.1) nu satisfac relația de reciprocitate a lui Maxwell $Z_{mab} = Z_{mba}$ și de aceea realizarea lor fizică, prin elemente statice R, L, C, nu e totdeauna posibilă. Această complicație impune un studiu mai detaliat al problemei realizării unor rețele fictive mai simple.

Utilizarea rețelelor fictive simplifică calculul componentelor simetrice prin aceea că permite, pe de o parte, utilizarea metodelor și teoremelor generale de calcul ale curenților și pentru calculul sistemelor de componente, iar pe de altă parte permite modelarea relațiilor dintre componente și deci determinarea experimentală a acestor componente.

Este util să se studieze problema posibilităților de realizare unitară și cît mai simplă a acestor rețele fictive.

Utilizarea meselor de calcul pune în plus problema realizării unor rețele fictive conținînd numai impedanțe care să satisfacă relația de reciprocitate a lui Maxwell.

În cele ce urmează se va studia problema interconectării celor trei rețele fictive în cazul general de reciprocitate a impedanțelor de cuplaj.

Problema constă în a reduce schema hexapolului cu cuplaje magnetice, format de cele trei rețele fictive corespunzătoare unui element trifazat, la un hexapol fără cuplaje; în acest fel vor apărea și legături galvanice între rețele.

2. OBȚINEREA SCHEMELOR DE INTERCONEXIUNE A REȚELELOR FICTIVE

2.1. Eliminarea cuplajelor magnetice și obținerea hexapolului echivalent reprezentînd forma cea mai generală de interconexiune

Înlocuirea hexapolului avînd cuplaje magnetice cu un hexapol fără cuplaje magnetice se face conform teoremei generale a transfigurărilor electrice [B11].

Înlocuirea părții de rețea fictivă corespunzătoare receptorului static nesimetric printr-o schemă care să nu conțină cuplaje magnetice este avantajoasă pentru simplificarea modelării rețelelor fictive și, în unele cazuri, a calculelor.

Înlocuirea se poate face în două moduri principial diferite, fie înlocuind hexapolul K_x, l_x, K_y, l_y, K_z, l_z (fig. 1.1) printr-un hexapol echi-

valent fără cuplaje magnetice, fie înlocuind hexapolul $K_x, l_x, K_y, l_y, K_z, l_z$ printr-un hexapol care să-i fie echivalent numai în ceea ce privește ecuațiile:

$$[U_c] = [Z_c] \cdot [I_c], \tag{2.1}$$

care nu definesc în întregime regimul de funcționare al hexapolului.

În primul caz se obține o schemă de interconectare a rețelelor fictive, care, fiind în întregime echivalentă cu hexapolul $K_x, l_x, K_y, l_y, K_z, l_z$, care nu realizează legături galvanice între rețelele fictive, poate fi realizată separat pentru fiecare din receptoarele statice cu nesimetrii conectate la o rețea simetrică.

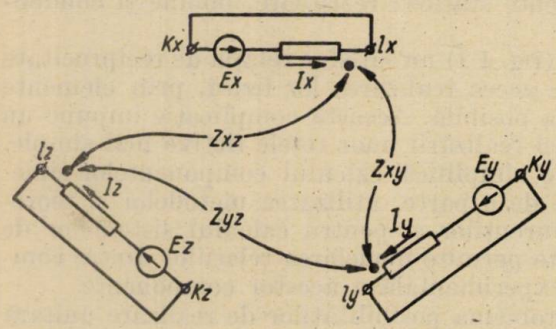


Fig. 2.1. — Schemă de calcul pentru determinarea admitanțelor de transfer.

Schema obținută în acest prim caz reprezintă deci o formă generală a schemei de interconexiune a rețelelor fictive pentru o rețea trifazată cu nesimetrii multiple.

În cel de-al doilea caz se obțin scheme de interconectare general valabile numai pentru cazul unei singure nesimetrii simple oarecare.

Conform teoremei generale a transfigurărilor electrice, hexapolul echivalent căutat reprezintă un circuit în hexapol complet, ale cărui laturi au admitanțe care se determină în funcție de admitanțele de transfer din schema de calcul reprezentată în figura 2.1.

Ecuațiile rețelei astfel obținute prin scurtcircuitarea accesurilor au forma:

$$[E_c] = [Z'] [I_c]. \tag{2.2}$$

Observăm că:

$$[Z'] = [Z_c], \tag{2.3}$$

deci ecuațiile (2.2) sînt analoge cu ecuațiile (2.1).

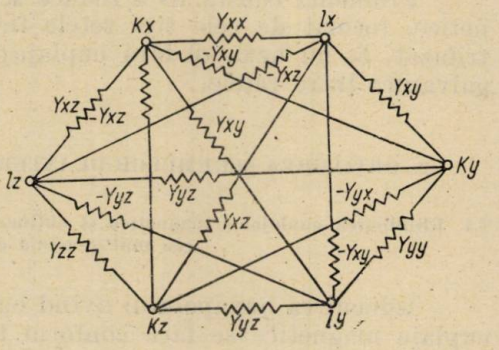


Fig. 2.2. — Hexapolul echivalent al rețelei de interconexiune a rețelelor fictive.

Determinarea admitanțelor de transfer se face simplu. Din (2.2) se obține:

$$[I_c] = [Z_c]^{-1} \cdot [E_c] = [Y_c] \cdot [E_c]. \tag{2.4}$$

Deci matricea admitanțelor de intrare și transfer se obține calculînd inversa coeficienților sistemului (2.1).

Dată fiind simetria matricei $[Z_c]$, conform figurii 2.1, vor rezulta și :

$$Y_{xy} = Y_{yx};$$
$$Y_{xz} = Y_{zx}; \qquad (2.5)$$
$$Y_{yz} = Y_{zy}.$$

Deoarece la fiecare acces al hexapolului considerat e legată o singură latură, hexapolul echivalent — conform teoremei generale a transfigurărilor electrice — are structura din figura 2.2.

2.2. Obținerea schemelor generale de interconexiune în cazul unei nesimetrii simple în rețea

În cazul nesimetriilor simple din rețele, se pot realiza scheme de interconexiune (fără cuplaje magnetice) care să fie echivalente cu hexapolul considerat în cazul realizării unor legături galvanice suplimentare între rețelele fictive, care să nu modifice valorile curenților din rețelele fictive.

Astfel de legături se realizează de altfel în toate schemele particulare de interconexiune indicate în literatură.

Aceste legături galvanice suplimentare se pot realiza fără a modifica repartiția curenților în rețelele fictive x, y, z, dacă se egalizează potențialele electrice a numai trei puncte : unul din rețeaua fictivă x, altul din rețeaua fictivă y și altul din rețeaua fictivă z.

Am stabilit două forme generale ale schemelor de interconexiune a rețelelor fictive pentru circuite trifazate cu o singură nesimetrie.

În primul caz am adus la același potențial punctele l_x, K_y, respectiv l_y și K_z. Hexapolul $K_x, l_x, K_y, l_y, K_z, l_z$ (din figura 1.1) se reduce la un cuadripol cu cuplaje magnetice interne, a cărui schemă echivalentă (fără cuplaje magnetice) se obține prin suprapunerea punctelor l_x și K_y, respectiv l_y și K_z în schema hexapolului echivalent din figura 2.2. Se obține astfel schema de interconexiune din figura 2.3.

Ținînd seamă de schema hexapolului echivalent și luînd în considerație laturile care se leagă în derivație prin suprapunerea punctelor de acces, se obțin următoarele valori ale admitanțelor schemei din figura 2.3 :

$$Y_1 = Y_{xx} - Y_{xy},$$
$$Y_2 = Y_{zx},$$
$$Y_3 = Y_{zz} - Y_{yz}, \qquad (2.6)$$
$$Y_4 = Y_{yy} - Y_{xy} - Y_{yz} + Y_{zx},$$
$$Y_5 = Y_{zy} - Y_{zx},$$
$$Y_6 = Y_{yx} - Y_{zx}.$$

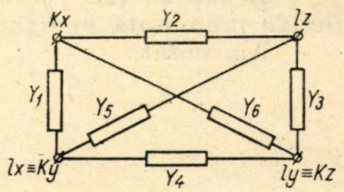


Fig. 2.3. — Schemă obținută prin suprapunerea unor puncte de acces ale hexapolului echivalent.

A doua formă generală a schemelor de interconexiune a rețelelor fictive pentru circuite trifazate cu o singură nesimetrie se obține aducînd la același potențial punctele K_x, K_y și K_z. Hexapolul echivalent din figura 2.2 se reduce astfel la cuadripolul din figura 2.4.

Comparînd schemele din figurile 2.4 și 2.2, se obțin următoarele valori pentru admitanțele schemei din figura 2.4:

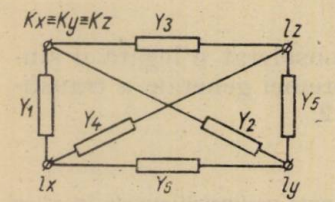


Fig. 2.4. — Schemă obținută prin suprapunerea unor puncte de acces ale hexapolului echivalent.

$$\begin{aligned} Y_1 &= Y_{xx} + Y_{xy} + Y_{xz}, \\ Y_2 &= Y_{yy} + Y_{xy} + Y_{yz}, \\ Y_3 &= Y_{zz} + Y_{xz} + Y_{yz}, \\ Y_4 &= -Y_{xz}, \\ Y_5 &= -Y_{yz}, \\ Y_6 &= -Y_{xy}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

2.3. Deducerea directă a unor scheme de interconexiune în cazul unei singure nesimetrii în rețeaua dată

Problema determinării unor scheme de interconexiune a rețelelor fictive pentru cazul unei rețele cu o singură nesimetrie se poate rezolva și pe o altă cale, diferită de cele de mai sus.

Pornind de la relațiile (2.1), care exprimă legătura dintre componentele tensiune și curent, le transformăm prin adăugarea și scăderea unor termeni astfel, încît ecuațiile (2.1), sub noua formă, să poată pune în evidență interconectarea serie-paralel a rețelelor fictive.

Ecuațiile (2.1) se scriu:

$$\begin{aligned} U_x &= Z_{xx}\, I_x + Z_{xy}\, I_y + Z_{xz}\, I_z, \\ U_y &= Z_{xy}\, I_x + Z_{yy}\, I_y + Z_{yz}\, I_z, \\ U_z &= Z_{xz}\, I_x + Z_{yz}\, I_y + Z_{zz}\, I_z. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Ele se pot pune sub forma:

$$\begin{aligned} U_x &= (Z_{xx} + Z_{xy} + Z_{xz})\, I_x - Z_{xy}(I_x - I_y) - Z_{xz}\,(I_x - I_z), \\ U_y &= -Z_{xy}(-I_x + I_y) + (Z_{yy} + Z_{xy} + Z_{yz})\, I_y - Z_{yz}(I_y - I_z), \\ U_z &= -Z_{xz}(-I_x + I_z) - Z_{yz}(-I_y + I_z) + (Z_{zz} + Z_{xz} + Z_{yz})\, I_z. \end{aligned} \tag{2.1'}$$

Ecuațiilor (2.1') le corespunde forma de interconectare a rețelelor fictive prezentată în figura 2.5.

Am notat:

$$\begin{aligned} Z_1 &= Z_{xx} + Z_{xy} + Z_{xz}, \\ Z_2 &= Z_{yy} + Z_{xy} + Z_{yz}, \\ Z_3 &= Z_{zz} + Z_{xz} + Z_{yz}, \\ Z_4 &= -Z_{xy}, \\ Z_5 &= -Z_{yz}, \\ Z_6 &= -Z_{xz}. \end{aligned} \tag{2.8}$$

De asemenea, se mai poate deduce și o altă formă generală de interconexiune, ținînd seamă că ecuațiile (2.1) se pot pune și sub forma :

$$\begin{aligned} U_x &= (Z_{xx} - Z_{xy})I_x + (Z_{xy} - Z_{xz})(I_x + I_y) + Z_{xz}(I_x + I_y + I_z), \\ U_y &= (Z_{yy} - Z_{xy} - Z_{yz} + Z_{xz})I_y + (Z_{xy} - Z_{xz})(I_x + I_y) + \\ &\quad + (Z_{yz} - Z_{xz})(I_y + I_z) + Z_{xz}(I_x + I_y + I_z), \qquad (2.1'') \\ U_z &= (Z_{zz} - Z_{yz})I_z + (Z_{yz} - Z_{xz})(I_y + I_z) + Z_{xz}(I_x + I_y + I_z). \end{aligned}$$

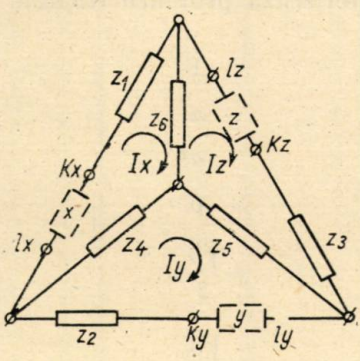


Fig. 2.5. — Schemă de interconexiune dedusă direct.

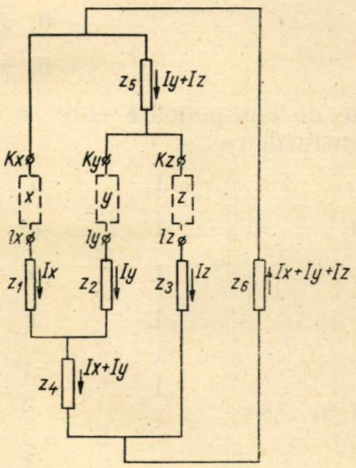


Fig. 2.6. — Schemă de interconexiune dedusă direct.

Ecuațiilor (2.1'') le corespunde forma de interconectare a rețelelor fictive prezentată în figura 2.6.

Am notat :

$$\begin{aligned} Z_1 &= Z_{xx} - Z_{xy}, \\ Z_2 &= Z_{yy} - Z_{xy} - Z_{yz} + Z_{xz}, \\ Z_3 &= Z_{zz} - Z_{yz}, \qquad (2.9) \\ Z_4 &= Z_{xy} - Z_{xz}, \\ Z_5 &= Z_{yz} - Z_{xz}, \\ Z_6 &= Z_{xz}. \end{aligned}$$

După cum se poate vedea, am găsit patru forme generale de interconexiune, care prezintă, fiecare, o serie de avantaje în raport cu studiul unui anumit regim de funcționare, în raport cu studiul tipului particular de nesimetrie, în raport cu sistemul de componente ales.

În continuare se tratează problema interconectării rețelelor fictive în trei dintre sistemele de componente frecvent folosite, trăgînd concluziile de rigoare pentru studiul diverselor tipuri de nesimetrii în rețele.

3. SCHEMELE DE INTERCONEXIUNE A REŢELELOR FICTIVE ÎN CAZUL UNOR SISTEME UTILIZATE PRACTIC

3.1. Obţinerea reţelelor fictive

Pentru a exemplifica cele stabilite în (1.2), am considerat trei sisteme de componente :

$$-\ 0,\ \mathrm{d},\ i \qquad \text{(I)},$$
$$-\ 0,\ \alpha,\ \beta \qquad \text{(II)},$$
$$-\ 0,\ \gamma,\ \delta \qquad \text{(III)},$$

sisteme de componente care se caracterizează prin următoarele matrici de transformare :

$$[C]_{\mathrm{I}} = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{Vmatrix} \tag{3.1}$$

$$[C]_{\mathrm{II}} = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & +\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{Vmatrix} \tag{3.2}$$

$$[C]_{\mathrm{III}} = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2} \end{Vmatrix} \tag{3.3}$$

Ţinînd seamă de relaţia (1.5), avem :

$$[Z_c] = [C]^{-1} \cdot [Z] \cdot [C]$$

Se consideră şase cazuri de receptoare :
a) receptor static simetric fără cuplaje între faze ;
b) receptor static simetric cu cuplaje magnetice între faze ;
c) maşină trifazată simetrică ;
d) receptor static nesimetric fără cuplaje magnetice între faze ;
e) receptor static nesimetric cu cuplaje magnetice între faze ;
f) maşină trifazată nesimetrică.

Pentru fiecare caz se stabilesc reţelele fictive, obţinînd scheme originale pentru sistemul de componente 0, γ, δ.

Studiind problema posibilității modelării acestor rețele fictive prin condițiile :

a) $$R > 0$$

b) reciprocitatea cuplajelor magnetice,

din examinarea formei echivalente, a diverselor receptoare în rețele fictive, ținînd seamă că obiectul final al studiului este obținerea unor scheme simplificate în cazuri practice, se constată că este necesar să avem :

$$Z_2 = Z_3, \qquad Z_{12} = Z_{13}; \tag{3.4}$$

receptorul nesimetric corespunzător constituind o nesimetrie parțială.

3.2. Rețelele fictive în cazul unei nesimetrii simple parțiale în rețea

Se pot realiza rețele fictive reciproce pentru receptoare statice cu nesimetrie parțială simplă (avînd fazele 2 și 3 identice).

Reciprocitatea rețelelor fictive există, după cum vom vedea, pentru sistemele (I) și (III). Vom studia paralel și transformarea (II), urmărind artificii pentru obținerea unor rețele fictive reciproce.

Cazul care se studiază este cel din figura 3.1.

Rețelele fictive corespunzătoare sînt de forma celei din figura 1.1*b*, ansamblul impedanțelor fiind definit de matricele date mai jos pentru fiecare din cele trei sisteme de componente considerate :

$$[Z_c]_I = \begin{Vmatrix} \varepsilon_0 + 2\mu_0 & \varepsilon_d - \mu_d & \varepsilon_d - \mu_d \\ \varepsilon_d - \mu_d & \varepsilon_0 - \mu_0 & \varepsilon_d + 2\mu_d \\ \varepsilon_d - \mu_d & \varepsilon_d + 2\mu_d & \varepsilon_0 - \mu_0 \end{Vmatrix}, \tag{3.5}$$

unde :

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{3}(Z' + 2Z''), \qquad \mu_0 = \frac{1}{3}(Z'_m + 2Z''_m),$$
$$\varepsilon_d = \frac{1}{3}(Z' - Z''), \qquad \mu_d = \frac{1}{3}(Z'_m - Z''_m); \tag{3.6}$$

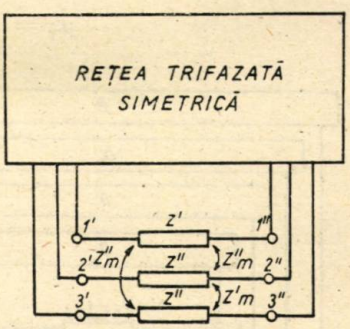


Fig. 3.1. — Rețea trifazată cu nesimetrie parțială simplă.

$$[Z_c]_{II} = \begin{Vmatrix} \varepsilon_0 + 2\mu_0 & \varepsilon_\alpha - \mu_\alpha & 0 \\ 2(\varepsilon_\alpha - \mu_\alpha) & (\varepsilon_0 - \mu_0) + (\varepsilon_\alpha + 2\mu_\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & (\varepsilon_0 - \mu_0) - (\varepsilon_\alpha + 2\mu_\alpha) \end{Vmatrix}, \tag{3.7}$$

unde :

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{3}(Z' + 2Z''),$$

$$\mu_0 = \frac{1}{3}(Z'_m + 2Z''_m),$$

$$\varepsilon_\alpha = \frac{1}{3}(Z' - Z''), \tag{3.8}$$

$$\mu_\alpha = \frac{1}{3}(Z'_m - Z''_m);$$

$$[Z_c]_{III} = \begin{Vmatrix} \varepsilon_0 + 2\mu_0 & \varepsilon_\gamma - \mu_\gamma & \varepsilon_\gamma - \mu_\gamma \\ \varepsilon_\gamma - \mu_\gamma & \varepsilon_0 - \mu_0 & \varepsilon_\gamma + 2\mu_\gamma \\ \varepsilon_\gamma - \mu_\gamma & \varepsilon_\gamma + 2\mu_\gamma & \varepsilon_0 - \mu_0 \end{Vmatrix}, \tag{3.9}$$

unde :

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{3}(Z' + 2Z''),$$

$$\mu_0 = \frac{1}{3}(Z'_m + 2Z''_m),$$

$$\varepsilon_\gamma = \frac{1}{3}(Z' - Z''), \tag{3.10}$$

$$\mu_\gamma = \frac{1}{3}(Z'_m - Z''_m).$$

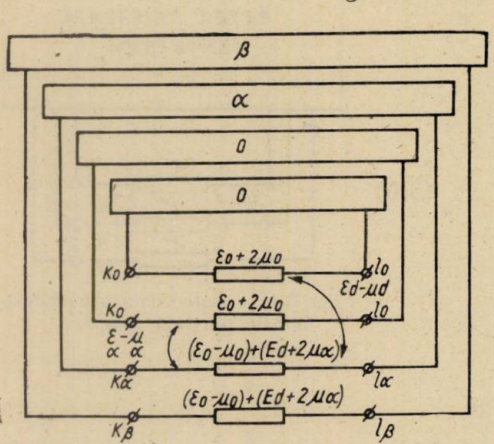


Fig. 3.2. — O altă formă de reprezentare a reţelelor fictive în cazul sistemului de componenteII.

Se observă identitatea matricelor $[Z_c]_I$ şi $[Z_c]_{III}$, dată fiind şi forma identică (3.6) şi (3.10) care defineşte impedanţele ce apar în matricele respective.

Deci vom constata de acum înainte concluzii identice în cazul sistemelor de componente I şi III.

Dată fiind forma matricei $[Z_c]_I$, putem aplica metoda generală descrisă în (2).

În cazul II se observă că reţeaua β nu se va interconecta cu celelalte (căci nu e cuplată magnetic cu nici una din ele), deci în final o vom studia separat, ceea ce e o simplificare.

Pentru a obține o matrice simetrică a impedanțelor, pentru îndeplinirea condiției de reciprocitate, am uzat de o reprezentare a rețelelor fictive ca în figura 3.2, urmînd a rezolva în mod evident problema interconectării rețelelor fictive 0,0 și α conform procedeului descris în (2).

În acest fel avem matricea corespunzătoare :

$$[Z_c]'_{II} = \begin{Vmatrix} \varepsilon_0 + 2\mu_0 & 0 & \varepsilon_\alpha - \mu_\alpha & 0 \\ 0 & \varepsilon_0 + 2\mu_0 & \varepsilon_\alpha - \mu_\alpha & 0 \\ \varepsilon_\alpha - \mu_\alpha & \varepsilon_\alpha - \mu_\alpha & (\varepsilon_0 - \mu_0) + (\varepsilon_\alpha + 2\mu_\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\varepsilon_0 - \mu_0) - (\varepsilon_\alpha + 2\mu_\alpha) \end{Vmatrix} \tag{3.11}$$

care conduce la aceleași trei ecuații independente de funcționare definite de

$$[U_c] = [Z_c] \cdot [I_c], \tag{2.1}$$

căci relația :

$$[U_c]' = [Z_c]' \cdot [I_c]', \tag{3.12}$$

unde

$$[U_c]' = \begin{Vmatrix} U_0 \\ U_0 \\ U_\alpha \\ U_\beta \end{Vmatrix}; \quad [I_c]' = \begin{Vmatrix} I_0 \\ I_0 \\ I_\alpha \\ I_\beta \end{Vmatrix}, \tag{3.13}$$

conduce la faptul că primele două ecuații de funcționare sînt identice.

3.3. Eliminarea cuplajelor magnetice și obținerea hexapolului echivalent

Am văzut în (2.1) că problema eliminării cuplajelor magnetice ale hexapolului, respectiv octopolului în cazul II, revine la a calcula în cele două cazuri (cazul I și III fiind identice) matricea admitanțelor de transfer :

$$[Y_c] = [Z_c]^{-1}. \tag{2.4'}$$

Dată fiind forma matricelor $[Z_c]$, se obțin :

$$[Y_c]_I = \begin{Vmatrix} Y_{00} & Y_{0d} & Y_{0i} \\ Y_{0d} & Y_{dd} & Y_{di} \\ Y_{0i} & Y_{di} & Y_{dd} \end{Vmatrix} \tag{3.14}$$

$$[Y_c]_{II} = \begin{Vmatrix} Y_{00} & Y'_{00} & Y_{0\alpha} & 0 \\ Y'_{00} & Y_{00} & Y_{0\alpha} & 0 \\ Y_{0\alpha} & Y_{0\alpha} & Y_{\alpha\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Y_{\beta\beta} \end{Vmatrix} \tag{3.15}$$

După cum era de prevăzut, în cazul II rețeaua β a rămas separată. Valorile admitanțelor de transfer din expresiile de mai sus sînt:

$$\text{(I)}\quad Y_{00}=\frac{1}{3}\frac{(2\,Z'+Z'')+(Z'_m-4\,Z''_m)}{Z'(Z''+Z'_m)-2\,Z''^2_m};$$

$$Y_{0d}=-\frac{1}{3}\frac{(Z'-Z'')-(Z'_m-Z''_m)}{Z'(Z''+Z'_m)-2\,Z''^2_m};$$

$$Y_{dd}=\frac{1}{3}\frac{Z'(2\,Z''+Z'_m)+Z''(Z''+2\,Z'_m)-(Z'^2_m+3\,Z''^2_m+2\,Z'_mZ''_m)}{(Z''-Z'_m)\,[Z'(Z''+Z'_m)-2\,Z''^2_m]};\tag{3.16}$$

$$Y_{di}=-\frac{1}{3}\frac{Z'(2\,Z''+Z'_m)-Z''(Z''+2\,Z'_m)+(Z'^2_m-3\,Z''^2_m+2Z'_mZ''_m)}{(Z''-Z'_m)\,[Z'(Z''+Z'_m)-2\,Z''^2_m]};$$

și, respectiv:

$$\begin{aligned}
\text{(II)}\quad Y_{00}&=\frac{Z_0\,Z_\alpha-Z^2_{0\alpha}}{Z_0(Z_0\,Z_\alpha-2\,Z^2_{0\alpha})};\\
Y'_{00}&=\frac{Z^2_{0\alpha}}{Z_0(Z_0\,Z_\alpha-2Z^2_{0\alpha})};\\
Y_{0\alpha}&=-\frac{Z_{0\alpha}}{Z_0\,Z_\alpha-2\,Z^2_{0\alpha}};\\
Y_{\alpha\alpha}&=\frac{Z_0}{Z_0\,Z_\alpha-2\,Z^2_{0\alpha}};\\
Y_{\beta\beta}&=\frac{1}{Z_\beta};
\end{aligned}\tag{3.17}$$

unde impedanțele:

$$\begin{aligned}
Z_0&=\frac{1}{3}(Z'+2\,Z''+2\,Z'_m+4Z''_m),\\
Z_{0\alpha}&=\frac{1}{3}(Z'-Z''-Z'_m+Z''_m),\\
Z_\alpha&=\frac{1}{3}(2\,Z'+Z''+Z'_m-4\,Z''_m),\\
Z_\beta&=\frac{1}{3}(3\,Z''-3\,Z'_m)=Z''-Z'_m
\end{aligned}\tag{3.18}$$

provin din matricea:

$$[Z_c]'_{\text{II}}=\begin{Vmatrix} Z_0 & 0 & Z_{0\alpha} & 0\\ 0 & Z_0 & Z_{0\alpha} & 0\\ Z_{0\alpha} & Z_{0\alpha} & Z_\alpha & 0\\ 0 & 0 & 0 & Z_\beta \end{Vmatrix}\tag{3.19}$$

Hexapolul echivalent are structura indicată în figura 2.2, în cazul II fiind vorba de hexapolul K_0, l_0, K_0, l_0, K_α, l_α, rețeaua β fiind complet separată.

Referitor la hexapolul echivalent fără cuplaje magnetice se remarcă faptul că, deși în el intervin perechi de admitanțe de forma Y și $-Y$, în forma sa generală, se poate realiza fizic, dacă Z' și Z'' sînt nule sau dacă, așa cum se obișnuiește în calculul curenților de scurtcircuit, se neglijează rezistențele și se consideră toate impedanțele pur imaginare.

Deci hexapolul echivalent fără cuplaje magnetice poate înlocui cu succes transformatoarele necesare realizării rețelelor fictive în cazul unor rețele trifazate cu nesimetrii parțiale multiple.

Trebuie făcută observația că nu orice circuit are admitanțe de transfer. Pentru ca să existe admitanțe de transfer este necesar ca matricea $[Z_c]$ să aibă o matrice inversă.

Ca urmare, în particular, pentru unele cazuri idealizate cu impedanțe proprii nule, uneori se obțin circuite cu cuplaje magnetice care nu au un circuit echivalent fără cuplaje magnetice.

În problema considerată apar de asemenea două cazuri particulare limită, $Z' = Z''_m = 0$ (sau $U_1 = 0$) și $Z'' = Z'_m = 0$, pentru care nu există un hexapol fără cuplaje magnetice (se obțin forme degenerate ale hexapolului echivalent, forme în care apar admitanțe cu valori $+\infty$ și $-\infty$).

Pentru aceste cazuri, ca și pentru cazul general, se pot realiza scheme de interconexiune (fără cuplaje magnetice) care să fie echivalente cu hexapolul considerat în cazul introducerii unor legături galvanice suplimentare între rețelele fictive.

3.4. Prima formă generală de interconexiune a rețelelor fictive în cazul unei singure nesimetrii parțiale în rețea

Aplicînd cele arătate în (2.2) în cazul I (sau III), se obține, conform relațiilor (2.6), schema din figura 3.3, în care, ținînd seamă și de relațiile (3.16), avem:

$$
\begin{aligned}
Y_1 &= \frac{Z' - Z''_m}{Z'(Z'' + Z'_m) - 2\,Z''^2_m}; \\
Y_2 &= \frac{1}{Z'' - Z'_m}; \\
Y_3 &= \frac{1}{3}\,\frac{(Z'' - Z') + (Z'_m - Z''_m)}{Z'(Z'' + Z'_m) - 2\,Z''^2_m}; \\
Y_4 &= \frac{Z'_m(Z' + Z''_m) - Z''_m(Z'' + Z'_m)}{(Z'_m - Z'')\,[Z'(Z'' + Z'_m) - 2\,Z''^2_m]}.
\end{aligned}
\tag{3.20}
$$

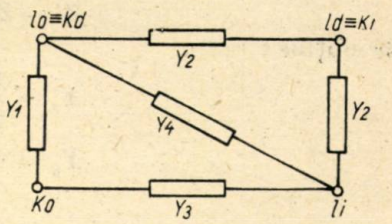


Fig. 3.3. — Prima formă generală de interconexiune a rețelelor fictive corespunzătoare sistemelor de componente I și III.

Ca urmare, schema generală de interconexiune a rețelelor fictive pentru o rețea trifazată cu o singură nesimetrie parțială poate fi pusă sub forma din figura 3.4 în cazul sistemelor I și III.

Din cazurile particulare studiate, indicăm mai jos rezultatele mai interesante :

a) lipsa cuplajelor magnetice :

$$Z'_m = Z''_m = 0.$$

Se obţine :

$$Y_1 = Y_2 = Y'',$$

$$Y_3 = \frac{1}{3}(Y' - Y''), \tag{3.21}$$

$$Y_4 = 0;$$

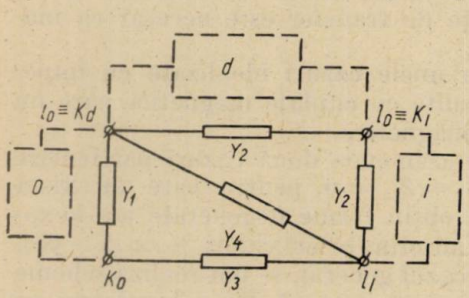


Fig. 3.4. — Interconexiunea reţelelor fictive cu o singură nesimetrie parţială în cazul sistemelor de componente I şi III.

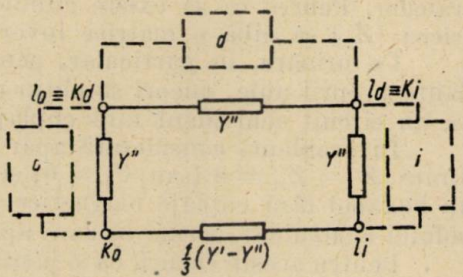


Fig. 3.5. — Interconectarea reţelelor fictive ale sistemelor de componente I şi III în lipsa cuplajelor magnetice între faze.

schema de interconectare a reţelelor este cea din figura 3.5.

Pentru $Z' = \infty$ şi, respectiv, $Z'' = \infty$ se obţin scheme echivalente cu cele clasice, studiate în literatura de specialitate.

b) cazul unei nesimetrii parţiale realizate prin cuplaje magnetice inegale între faze :

$$Z' = Z'' = 0.$$

Se obţine :

$$Y_1 = \frac{1}{2} Y''_m;$$

$$Y_2 = - Y'_m;$$

$$Y_3 = \frac{1}{6} \frac{Y''_m}{Y'_m} (Y'_m - Y''_m); \tag{3.22}$$

$$Y_4 = \frac{1}{2}(Y'_m - Y''_m).$$

c) $Z''_m = Z' = 0$, cazul cînd pe faza 1 a elementului de circuit nesimetric tensiunea e nulă.

Se obține :

$$Y_3 = \infty .$$

Deci Y_1 se leagă paralel cu Y_4.
Înlăturînd nedeterminarea, se obține :

$$Y_1 + Y_4 = \frac{2 Z'_m - Z''}{Z'^2_m - Z''^2} = Y,$$

avînd schema echivalentă din figura 3.6.

În cazul celui de-al doilea sistem de componente se obține conform relațiilor (2.6) schema din figura 3.7 de interconectare a rețelelor fictive,

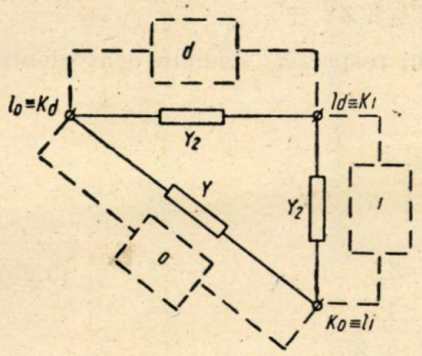


Fig. 3.6. — Schema de interconexiune a rețelelor fictive corespunzătoare sistemelor de componente I și III în cazul cînd tensiunea pe faza 1 a elementului de circuit nesimetric este nulă.

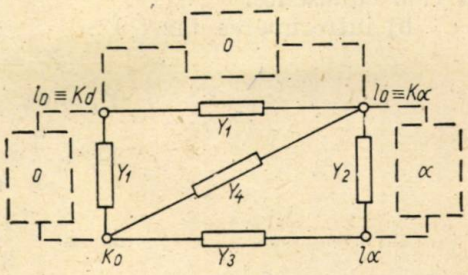


Fig. 3.7. — Interconexiunea rețelelor fictive cu o singură nesimetrie parțială în cazul sistemului de componente II.

în care :

$$Y_1 = \frac{1}{Z' + 2Z'' + 2Z'_m + 4Z''_m};$$

$$Y_2 = \frac{1}{3} \frac{2Z' + Z'' + Z'_m + 5Z''_m}{Z'Z'' + Z'Z'_m - 2Z''^2_m}$$

$$Y_3 = \frac{1}{3} \frac{-Z' + Z'' + Z'_m - Z''_m}{Z'Z'' + Z'Z'_m - 2Z''^2_m}; \qquad (3.23)$$

$$Y_4 = \frac{1}{3} \frac{[Z' - Z'' - Z'_m + Z''_m][2Z' + Z'' + Z'_m + 5Z''_m]}{[Z' + 2Z'' + 2Z'_m + 4Z''_m][Z'Z'' + Z'Z'_m - 2Z''^2_m]}.$$

Am remarcat cazurile :

a) lipsa cuplajului magnetic :

$$Z'_m = Z''_m = 0 ;$$

$$\begin{aligned} Y_1 &= \frac{3}{Z' + 2Z''} ; \\ Y_2 &= \frac{1}{3}\left(\frac{2}{Z''} + \frac{1}{Z'}\right) ; \\ Y_3 &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{Z'} - \frac{1}{Z''}\right) ; \\ Y_4 &= \frac{1}{3}\frac{(Z' - Z'')(2\,Z' + Z'')}{(Z' + 2\,Z'')\,Z'Z''} . \end{aligned} \tag{3.24}$$

Pentru $Z' = \infty$ și $Z'' = \infty$ se obțin, respectiv, scheme echivalente cu cele cunoscute.

b) întreruperea fazei 1 :

$$\begin{aligned} Z' &= \infty ; \\ Y_1 &= 0 ; \\ Y_2 &= \frac{2}{3}\frac{1}{Z'' + Z'_m} ; \\ Y_3 &= -\frac{1}{3}\frac{1}{Z'' + Z'_m} ; \\ Y_4 &= \frac{2}{3}\frac{1}{Z'' + Z'_m} . \end{aligned} \tag{3.25}$$

3.5. A doua formă generală de intercconexiune a rețelelor fictive în cazul unei singure nesimetrii parțiale în rețea

Aplicînd cele arătate în (2.2), se obține, conform relațiilor (2.7), schema de interconexiune din figura 3.8, în care :

$$\begin{aligned} Y_1 &= \frac{Z'' + Z'_m - 2\,Z''_m}{Z'(Z'' + Z'_m) - 2\,Z''^2_m} ; \\ Y_2 &= \frac{Z'' + Z'_m + Z''_m}{Z'(Z'' + Z'_m) - 2\,Z''^2_m} ; \\ Y_3 = Y_5 &= \frac{1}{3}\frac{Z' - Z'' - Z'_m + Z''_m}{Z'(Z'' + Z'_m) - 2\,Z''^2_m} ; \\ Y_4 &= \frac{1}{3}\frac{Z'(Z'' + 2\,Z'_m) - Z''(Z'' + 2\,Z''_m) + (Z'^2_m - 3\,Z''^2_m + 2\,Z'_m Z''_m)}{(Z'' - Z'_m)\,[Z'(Z'' + Z'_m) - 2\,Z''^2_m]} . \end{aligned} \tag{3.26}$$

Am remarcat cazurile :

a) $Z'' = Z'_m = 0$; tensiune nulă pe fazele 2 și 3, în cazul nesimetriei date :

$$Y_1 = \frac{1}{Z''_m};$$

$$Y_2 = -\frac{1}{2\,Z''_m}; \tag{3.27}$$

$$Y_3 = Y_5 = -\frac{1}{3}\frac{Z' + Z''_m}{2\,Z''^2_m};$$

$$Y_4 = \infty;$$

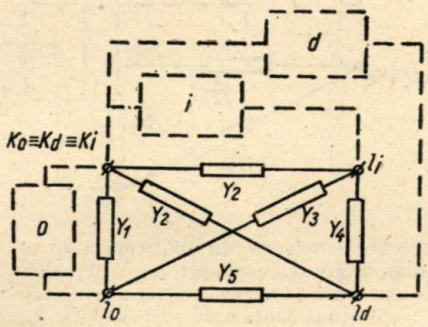


Fig. 3.8. — Schema de interconectare a rețelelor fictive corespunzătoare sistemelor de componente I sau III.

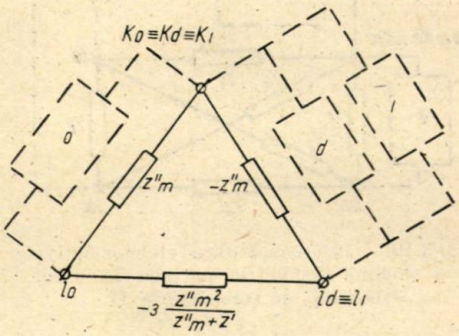


Fig. 3.9. — Schema de interconectare a rețelelor fictive pentru $Z'' = Z'_m = 0$.

care corespunde schemei din figura 3.9.

b) $Z' = \infty$ — întreruperea fazei 1 :

$$Y_1 = Y_2 = 0;$$

$$Y_3 = Y_5 = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{Z'' + Z'_m}; \tag{3.28}$$

$$Y_4 = \frac{1}{3}\cdot\frac{Z'' + 2\,Z'_m}{Z''^2 - Z'^2_m}.$$

În cazul celui de-al II-lea sistem de componente considerat se obține, conform relațiilor (2.7), schema din figura 3.10, în care :

$$Y_1 = \frac{1}{3}\frac{Z' + 2\,Z'' + 2\,Z'_m - 5\,Z''_m}{Z'\,Z'' + Z'\,Z'_m - 2\,Z''^2_m};$$

$$Y_2 = \frac{1}{3}\frac{Z' - Z'' - Z'_m + Z''_m}{Z'\,Z'' + Z'\,Z'_m - 2\,Z''^2_m}; \tag{3.29}$$

$$Y_3 = \frac{1}{3}\frac{(Z' - Z'' - Z'_m + Z''_m)^2}{(Z' + 2Z'' + 2Z'_m + 4Z''_m)(Z'Z'' + Z'Z'_m - 2Z''^2_m)}; \quad (3.29)$$

$$Y_4 = \frac{1}{3}\frac{-Z' + 4Z'' + 4Z'_m + 2Z''_m}{Z'Z'' + Z' \cdot Z'_m - 2Z''^2_m}.$$

Punctele l_0, având, evident, acelaşi potenţial, pot fi suprapuse. Am remarcat :

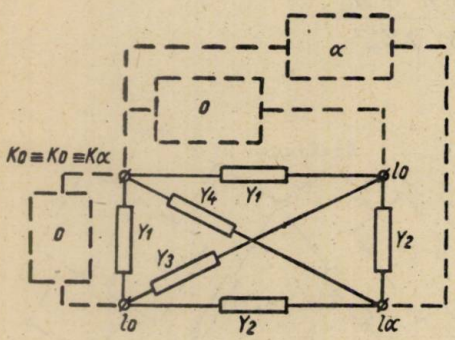


Fig. 3.10. — Interconexiunea reţelelor fictive cu o singură nesimetrie parţială în cazul sistemului de componente II.

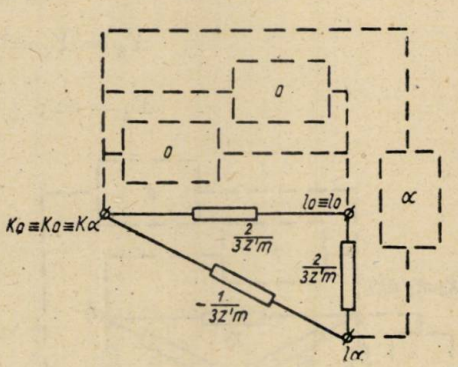


Fig. 3.11. — Schema de interconectare a reţelelor fictive corespunzătoare sistemului de componente II în cazul întreruperii fazei 1 şi a unor impedanţe nule pe fazele 2 şi 3.

a) $Z' = \infty$ şi $Z'' = 0$;

$$Y_1 = \frac{1}{3Z'_m};$$

$$Y_2 = \frac{1}{3Z'_m}; \quad (3.30)$$

$$Y_3 = \frac{1}{3Z'_m};$$

$$Y_4 = -\frac{1}{3Z'_m},$$

cărora le corespunde schema din figura 3.11. Punctele l_0 au fost suprapuse.

3.6. Deducerea directă a unor scheme de interconexiune a reţelelor fictive

Ţinînd seama de matricea $[Z_c]_I$, relaţiile (2.8) devin pentru sistemele de componente I şi III :

$$Z_1 = Z' + 2Z''_m;$$

$$Z_2 = Z_3 = Z' - Z''_m; \quad (3.31)$$

$$Z_4 = \frac{1}{3}\left[(Z'' - Z') - (Z''_m - Z'_m)\right]; \tag{3.31}$$

$$Z_5 = Z_6 = \frac{1}{3}\left[(Z'' - Z') - 2(Z''_m - Z'_m)\right],$$

definind impedanțele schemei din figura 2.5.

La fel relațiile (2.9) devin pentru sistemele de componente I și III :

$$\begin{aligned} Z_1 &= Z'' + Z'_m + Z''_m; \\ Z_2 &= Z_3 = Z'' - Z'_m; \\ Z_4 &= 0; \\ Z_5 &= Z'_m - Z''_m; \\ Z_6 &= \frac{1}{3}\left[(Z' - Z'') - (Z'_m - Z''_m)\right], \end{aligned} \tag{3.32}$$

definind impedanțele schemei din figura 2.6.

În ambele cazuri, am dedus cu ușurință o serie de cazuri particulare, corespunzătoare unor valori nule sau finite pentru impedanțele caracteristice nesimetriei.

Forma particulară a ecuațiilor (2.1) pentru cel de-al II-lea sistem de componente considerat a condus și aici la o interconectare mai simplă numai între rețelele 0 și α, β rămînînd separată.

Avem după $[Z_c]_{II}$ și (2.1) :

$$\begin{aligned} U_0 &= \frac{1}{3}(Z' + 2Z'' + 2Z'_m + 4Z''_m) I_0 + \frac{1}{3}(Z' - \\ &\quad - Z'' - Z'_m + Z''_m) I_\alpha; \\ U_\alpha &= \frac{2}{3}(Z' - Z'' - Z'_m + Z''_m) I_0 + \frac{1}{3}(2Z' + \\ &\quad + Z'' + Z'_m - 4Z''_m) I_\alpha, \end{aligned} \tag{3.33}$$

care se pot pune sub forma :

$$\begin{aligned} 2U_0 &= \frac{2}{3}(Z' - Z'' - Z'_m + Z''_m)(I_0 + I_\alpha) + \\ &\quad + 2(Z'' + Z'_m + Z''_m) I_0; \\ U_\alpha &= \frac{2}{3}(Z' - Z'' - Z'_m + Z''_m)(I_0 + I_\alpha) + \\ &\quad + (Z'' + Z'_m - 2Z''_m) I_\alpha; \end{aligned} \tag{3.34}$$

sau :

$$\begin{aligned} 2U_0 &= Z_3(I_0 + I_\alpha) + 2Z_1 I_0; \\ U_\alpha &= Z_3(I_0 + I_\alpha) + Z_2 I_\alpha, \end{aligned} \tag{3.35}$$

care corespund schemei din figura 3.12.

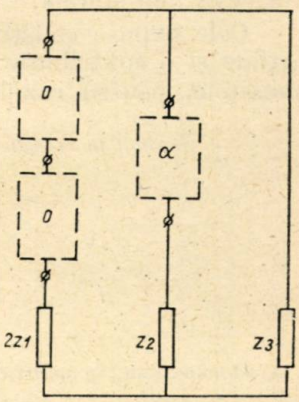


Fig. 3.12. — Interconectarea rețelelor fictive corespunzătoare sistemului II de componente în cazul unei singure nesimetrii parțiale în rețea.

În cazul nesimetriei provocate de cuplajele magnetice găsim, de pildă :

$$Z' = Z'' = 0 ;$$

$$Z_1 = Z'_m + Z''_m ; \qquad (3.36)$$

$$Z_2 = Z'_m - Z''_m ;$$

$$Z_3 = \frac{2}{3}(-Z'_m + Z''_m) .$$

Toate formele schemelor de interconexiune ale rețelelor fictive pot fi utilizate, fiecare, pentru modelarea sau calculul oricărei nesimetrii parțiale (produse de un element de circuit trifazat static, de întreruperi, scurtcircuite etc.) și în cazul considerării unor circuite idealizate cu admitanțe infinite se pot găsi scheme de interconexiune atît în cadrul primelor forme generale, cît și în cadrul ultimelor forme de interconexiune.

În cazul folosirii rețelelor fictive la calculul componentelor, în cazul sistemelor I și III, e indicată folosirea primei și ultimei scheme de interconexiune ; în cazul sistemului II, în special folosirea ultimei scheme deduse, căci aceste forme se realizează cu mai puține elemente și cu o structură ceva mai simplă.

Cele expuse constituie o rezolvare unitară a studierii nesimetriilor parțiale și o contribuție la stabilirea unor noi scheme generale de interconexiune, pentru cazul elementelor nesimetrice cu cuplaje magnetice.

Primit la redacție la 25 iulie 1964

BIBLIOGRAFIE

1. A. Hochrainer, *Symmetrische Komponenten in Drehstromsystemen*, Berlin, Springer Verlag, 1957.
2. А.Б. Чернин, *Вычисление электрических величин и поведение релейной защиты при неполнофазных режимах в электрических системах*, Москва, Госэнергоиздат, 1963.
3. Б.И. Розенберг, *Комплексные схемы замещения трехфазных сетей при некоторых видах асиметрии*, Электричество, *1*, (1957).
4. A. H. El Abiad, *Digital Calculation round Short Circuits by Matrix Method*, Power, Apparaturs and Systems, *48* (1960).
5. Г. Крон, *Применение тензорного анализа в электротехнике*, GEI, 1955.
6. Р.А. Воронов, *Преобразования и схемы замещения линейных электрических цепей*, Электричество, *8* (1950).
7. I. Rácz, *A szimmetrikus összetevők módszerének elemei*, M T K I, Budapest, 1953.

8. W. H. Ferguson, *Symmetrical component Network connections for the solution of phase interchange faults*, Transactions A.U.E.E., *44* (1959).
9. H. K. Amchin, T. B. Eric Gross, *Analyses of Subsequent Faults*, Transactions A.I.E.E., *70* (1951).
10. M. Preda, *Formele generale ale rețelelor fictive utilizate în metoda componentelor simetrice la studiul rețelelor trifazate*, Electrotehnica, *7* (1957).
11. — *O metodă de calcul a schemelor electrice echivalente*, Electrotehnica, *8* (1960).
12. — *Ein Beitrag zur Frage der Netzumwandlungen*, Buletin I.P.B., **20** (1958).
13. E. L. Horder, *Sequence Network connections*, Electric Journal (1937).
14. Г. Атабеков, Г. Мамиконианц, *Комплексные схемы замещения для исследований переходных процессов методов симетричных составляющих*, Электричество, *2* (1954).
15. K. Hessenberg, *Die Berechnung von Symmetriestörungen in Drehstromnetzen mit Hilfe von symmetrieschen Komponenten und Ersatzschaltungen*, E.U.M., **49** (1931).
16. A. Calvaer, *Les composents de Clarke, leur usage dans le calcul des défauts et les dyssimétries des réseaux triphasées.* Revue E, **1**, *13*, *14* (1956).
17. — *Sur quelques propriétés des systèmes des composents cohérents et l'expression général des systemes pratiques*, Revue E, **2**, *10* (1959).
18. E. Astuni, *Transformazioni Lineari per sistemi trifasi sinusoidali*, L'Energia Elettrica, *1* (1961).

CONTRIBUŢII LA PROBLEMA PRODUCERII FORŢELOR ŞI CUPLULUI ÎN MAŞINILE ELECTRICE[1])

DE

C. V. BĂLĂ

Institutul de energetică al Academiei R.P.R., şos. Vitan Nr. 236, Bucureşti

621.313.1.016.1 :621.3.013.23

Prin aplicarea tensiunilor fictive echivalente (tensiunilor maxwelliene) şi metoda reprezentării conforme, se determină expresiile forţelor care se produc în maşinile electrice, în funcţie de dimensiunile geometrice ale maşinii şi de solenaţiile armăturilor.

Prin aproximarea liniilor de cîmp se determină apoi expresia forţei în cazul permeabilităţii finite a miezului feromagnetic.

În lucrare se prezintă şi influenţa pe care o are poziţia deschiderii crestăturii faţă de axa acesteia, în baza determinărilor experimentale efectuate pe un model.

1. INTRODUCERE

a) Probleme în legătură cu determinarea forţelor şi cuplului în maşinile electrice

Expresiile de calcul stabilite în electrotehnică pentru forţa care se exercită asupra armăturilor feromagnetice şi asupra conductoarelor parcurse de curenţi şi situate în cîmpul magnetic al altor conductoare corespund unor sisteme simple. Maşinile electrice reprezintă sisteme electromagnetice complicate, datorită configuraţiei geometrice a armăturilor şi caracteristicilor de magnetizare neliniare ale acestora.

După cum este cunoscut, în teoria maşinilor electrice se calculează forţa care se exercită asupra sistemului format din armătură şi de conductorul parcurs de curent şi dispus în crestătură, considerînd conductorul situat fictiv în cîmpul magnetic din întrefier; de fapt, cîmpul magnetic real din zona conductorului şi forţa care se exercită asupra conductorului sînt mult mai mici [1].

[1]) Articol apărut şi în „Rev. Roum. Sci. Techn. — Electrotechn. Energ.", **9**, *4* (1964).

Alteori, pentru calculul cuplului electromagnetic se porneşte de la expresia curentului de energie printr-o suprafaţă închisă care cuprinde maşina electrică ; se pot determina valorile forţelor şi cuplurilor rezultante din maşină pe această cale, fără a se preciza distribuţia forţelor electromagnetice în maşină [2]. O metodă deosebit de eficientă pentru stabilirea expresiilor de calcul ale forţelor şi cuplului în maşinile electrice o reprezintă metoda forţelor generale în maşinile electrice, aplicată în [3].

De fapt, o dată cu problema stabilirii expresiei forţei care se exercită asupra sistemului armătură plus conductor mai trebuie rezolvate şi următoarele :

— care este raportul dintre forţa care se exercită asupra armăturii şi forţa care se exercită asupra conductorului ;

— cum variază forţa care se exercită asupra dintelui cu raportul dintre adîncimea crestăturii şi lărgimea întrefierului, respectiv cu poziţia deschiderii crestăturii faţă de axa crestăturii.

Metoda tensiunilor fictive echivalente [4] a fost aplicată în perioada din urmă pentru determinarea separată a forţelor care se exercită asupra conductoarelor parcurse de curent şi asupra armăturilor feromagnetice care le poartă [5], [6]. Asupra aplicării corecte a acestei metode se atrage atenţia în [7], prezentîndu-se totodată expresii separate de calculul pentru forţele care se exercită asupra dinţilor, respectiv asupra conductorului.

Pentru aplicarea metodei tensiunilor fictive echivalente este necesar să se cunoască cîmpul pe o suprafaţă închisă. În lucrarea de faţă se stabilesc expresiile forţelor în cazul maşinilor electrice, considerînd permeabilitatea miezului feromagnetic mai întîi infinită, iar apoi finită şi constantă ; pentru determinarea cîmpului magnetic în primul caz s-a aplicat metoda reprezentărilor conforme. Se prezintă apoi rezultatele obţinute pe cale experimentală asupra variaţiei forţei care se exercită asupra capătului de dinte în funcţie de poziţia deschiderii crestăturii.

b) Teoremele tensiunilor fictive echivalente ; tensorul tensiunilor fictive în cîmpul electromagnetic [8], [9], [10].

În volumul V delimitat de suprafaţa închisă $\sum$ se consideră un sistem de corpuri supus unor forţe a căror densitate de volum este $\bar{f}$ (fig. 1). În raport cu suprafaţa închisă $\sum$, sistemul de corpuri poate fi supus unei forţe de deplasare şi unui moment de rotaţie. Dacă se echivalează forţele f din volumul V prin forţe de suprafaţă $\bar{t}$ care se exercită pe suprafaţa închisă $\sum$, pentru a nu se modifica evoluţia sistemului în raport cu această suprafaţă, trebuie ca forţa rezultantă şi momentul rezultant care se exercită asupra sistemului de corpuri să fie egale cu forţa rezultantă şi momentul rezultant care se exercită fictiv asupra suprafeţei închise $\sum$, adică

$$\int_{V_\Sigma} \bar{f}\, dv = \int_{\Sigma_V} \bar{t}\, da, \tag{1}$$

$$\int_{V_\Sigma} [\bar{r} \times \bar{f}]\, dv = \int_{\Sigma V} [\bar{r} \times \bar{t}]\, da, \tag{2}$$

în care $\bar{r}$ este vectorul de poziție al elementului de volum dv, respectiv de arie da, în raport cu un punct oarecare din spațiu.

În cazul corpurilor dispuse în cîmpuri, forțele care se produc sînt funcții de mărimile locale ale cîmpurilor. Se pune problema de a determina condițiile pe care trebuie să le îndeplinească densitatea de volum a forței pentru ca densitatea de suprafață a forței să se poată exprima de asemenea în funcție de mărimile locale ale cîmpului pe suprafața închisă Σ.

În sistemul de coordonate rectangular, ecuațiile 1 și 2 scrise pentru componentele după axa Ox devin

$$\int_{V_\Sigma} f_x \, dv = \int_{\Sigma_V} t_x \, da, \qquad (3)$$

$$\int_{V_\Sigma} (yf_z - zf_y) \, dv = \int_{\Sigma_V} (yt_z - zt_y) da \; ; \qquad (4)$$

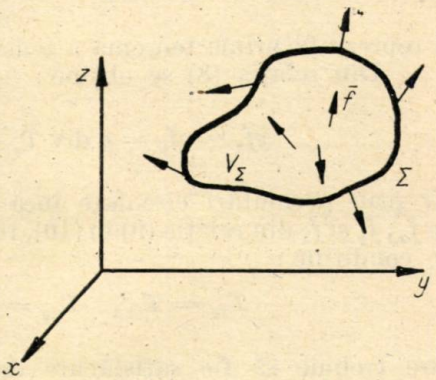


Fig. 1. — Explicativă pentru echivalarea unui sistem de forțe volumetrice prin forțe fictive care se exercită pe o suprafață închisă.

se obțin ecuații asemănătoare și pentru celelalte componente.

Pentru a stabili identitățile dintre densitățile de volum și cele de suprafață ale forțelor se aplică termenilor din partea dreaptă, teorema divergenței. În acest scop, factorii de sub integrală trebuie exprimați sub forma unor produse scalare între vectorul $d\bar{a}$ al elementului de arie și un vector a cărui componentă după $d\bar{a}$ să fie t_x; fie vectori $\overline{T}_x$, $\overline{T}_y$, $\overline{T}_z$ ale căror componente după vectorul $d\bar{a}$ reprezintă componentele t_x, t_y și t_z:

$$t_x = \overline{T}_x \cdot \bar{n}, \; t_y = \overline{T}_y \cdot \bar{n}, \; t_z = \overline{T}_z \, \bar{n}, \qquad (5)$$

$\bar{n}$ fiind vectorul unitar al lui $d\bar{a}$. Vectorii $\overline{T}_x$, $\overline{T}_y$ și $\overline{T}_z$ reprezintă astfel componentele tensorului $\overline{\overline{T}}$ al tensiunilor fictive de pe suprafața închisă Σ:

$$\overline{\overline{T}} = \begin{vmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{vmatrix}. \qquad (6)$$

Cu relațiile (5), după aplicarea teoremei divergenței, ecuațiile (3) și (4) devin

$$\int_{V_\Sigma} f_x \, dv = \int_{V_\Sigma} \operatorname{div} \overline{T}_x \, dv, \qquad (7)$$

$$\int_{V_\Sigma} (yf_x - zf_y) \, dv = \int_{V_\Sigma} \operatorname{div} (y\overline{T}_z - z\overline{T}_y) \, dv. \qquad (8)$$

Din relația (7) (și celelalte două relații scrise pentru componentele y și z) rezultă :

$$\bar{f} = \operatorname{div} \bar{\bar{T}} \tag{9}$$

și reprezintă prima teoremă a tensiunilor fictive.

Din relația (8) se obține :

$$yf_z - zf_y = y \operatorname{div} \bar{T}_z - z \operatorname{div} \bar{T}_y + T_{zy} - T_{yz}, \tag{10}$$

iar prin permutări circulare încă două relații asemănătoare ; înlocuind pe f_x, f_y și f_z din relația (9) în (10), rezultă cea de-a doua teoremă exprimată de condițiile :

$$T_{zy} = T_{yz}, \quad T_{xy} = T_{yx} \text{ și } T_{xz} = T_{zx}, \tag{11}$$

care trebuie să fie satisfăcute de componentele tensorului tensiunilor fictive echivalente cu acțiunile ponderomotoare ale cîmpului.

În cîmpul electromagnetic se poate exprima densitatea de volum a forței prin divergența unui tensor simetric care, în mediile izotrope de permeabilitate și permitivitate constantă în raport cu densitatea de masă, are expresia cunoscută :

$$\bar{\bar{T}} = \frac{1}{\varkappa} \begin{vmatrix} \varepsilon\left(E_x^2 - \frac{1}{2}E^2\right) + \mu\left(H_x^2 - \frac{1}{2}H^2\right) & \varepsilon E_x E_y + \mu H_x H_y & \varepsilon E_x E_z + \mu H_x H_z \\ \varepsilon E_x E_y + \mu H_x H_y & \varepsilon\left(E_y^2 - \frac{1}{2}E^2\right) + \mu\left(H_y^2 - \frac{1}{2}H^2\right) & \varepsilon E_y E_z + \mu H_y H_z \\ \varepsilon E_x E_z + \mu H_x H_z & \varepsilon E_y E_z + \mu H_y H_z & \varepsilon\left(E_z^2 - \frac{1}{2}\right) + \mu\left(H_z^2 - \frac{1}{2}H^2\right) \end{vmatrix} \tag{12}$$

în care $\varkappa$ este constanta de raționalizare, iar E_x, E_y și E_z, respectiv H_x, H_y și H_z, sînt componentele intensităților cîmpului electric, respectiv magnetic.

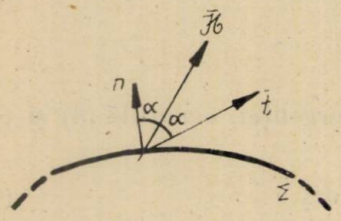


Fig. 2. — Vectorul tensiuni $\bar{t}$, în raport cu vectorul intensității cîmpului magnetic și vectorul normal $\bar{n}$ la elementul de suprafață.

Într-un sistem de axe de coordonate ales ca în figura 2, în raport cu un element de suprafață în care s-a considerat axa Ox în direcția cîmpului, iar axa Oz perpendiculară pe planul hîrtiei, componentele tensorului tensiunilor în cîmpul magnetic sînt :

$$T_x = \frac{1}{2\varkappa}\mu H_x^2 \cos\alpha,$$

$$T_y = -\frac{1}{2\varkappa}\mu H_x^2 \sin^2\alpha \text{ și } T_z = 0, \tag{13}$$

iar valoarea absolută a tensorului este :

$$T = \frac{1}{2\varkappa}\mu H^2, \tag{14}$$

independentă de orientarea suprafeței. Orientarea vectorului $\bar{t}$, rezultă — după cum este cunoscut — prin construirea simetricului vectorului unitar al normalei în raport cu vectorul cîmpului (fig. 2).

2. FORȚA CARE SE EXERCITĂ ASUPRA ARMĂTURILOR MAȘINILOR ELECTRICE

Forța tangențială rezultantă și cuplul electromagnetic care se produce într-o mașină electrică se calculează pe baza forței care se exercită asupra unui pol, respectiv asupra unui dinte.

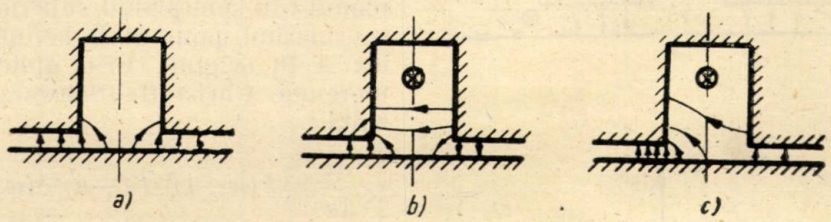


Fig. 3. — Cîmpul magnetic în întrefier și în crestătura unei mașini electrice : *a* — cîmpul inductor, *b* — cîmpul de reacție, *c* — cîmpul rezultant.

În cazul unei crestături deschise, cîmpul magnetic inductor (fig. 3 *a*), cîmpul produs de indus (fig. 3 *b*) și cîmpul rezultant (fig. 3 *c*) se pot calcula aproximativ prin metoda reprezentării conforme a interiorului conturului format de polul inductor și crestătură, în ipoteza că acestea sînt echipotențiale magnetic. O relație aproximativă se poate stabili și în cazul în care permeabilitatea miezului feromagnetic este finită și constantă. În ambele cazuri se ajunge — după cum se demonstrează în continuare — la expresia cunoscută a forței F care se exercită asupra celor N conductoare parcurse de curentul i și situate în cîmpul magnetic de valoare maximă în întrefier B_0 :

$$F = l_i B_0 Ni, \tag{15}$$

stabilită prin considerații simple, energetice.

a. Forța care se exercită asupra crestăturii și dintelui în cazul permeabilității infinite a miezului

Solenația de excitație θ_e se presupune dispusă în întrefier în punctele F și B, la distanță mare de axa crestăturii (fig. 4 *a*).

Se consideră crestătura indusului deschisă și infinit adîncă, iar solenația $\theta_i = Ni$ așezată la baza acesteia (fig. 4 *b*) ; conductoarele de întoar-

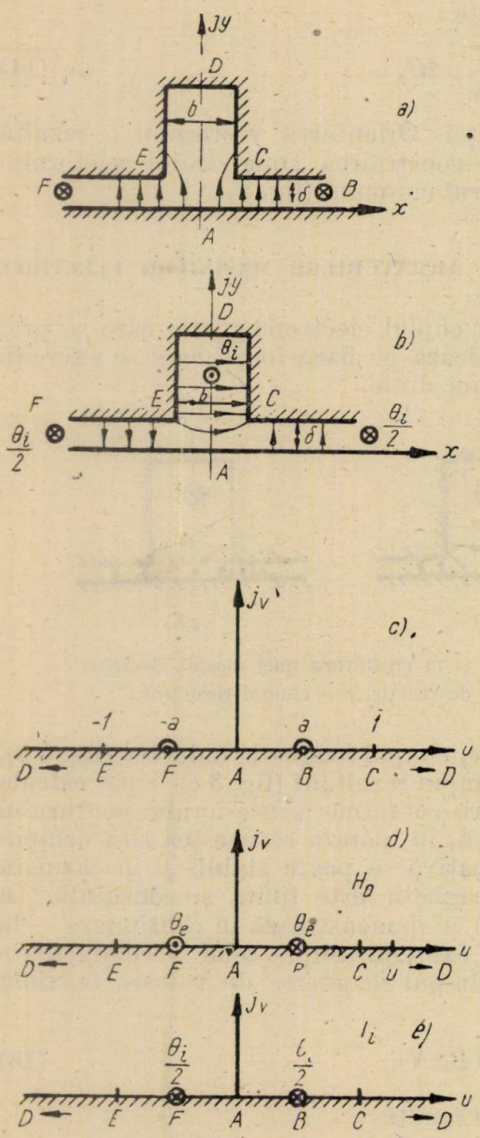


Fig. 4. — Planele z şi w pentru transformarea conformă Cristoffel-Schwarz :

a şi *b* — explicative pentru cîmpul inductor şi de reacţie în planul z, *c* — reprezentarea interiorului conturului *ABCDEFA* în semiplanul superior w, *d* şi *e* — explicative pentru cîmpul inductor şi de reacţie în semiplanul superior w.

cere ale bobinei din crestătură sînt situate la distanţă mare de axa dintelui (în punctele F şi B).

Se presupune cîmpul simetric axial — Pentru determinarea cîmpului magnetic se aplică metoda transformării conforme [11], [12], [5], [6].

Alegem planul complex astfel, încît axa imaginară să coincidă cu axa crestăturii, iar axa reală cu linia de contur a inductorului ; reprezentăm conform interiorul conturului *ABCDEFA* din planul z în semiplanul superior w, considerînd punctul D la infinit, iar A în origine. Prin aplicarea teoremei Christoffel-Schwarz rezultă :

$$\frac{dz}{dw} = k(w-1)^{1/2}(w-a)^{-1}(w+a)^{-1}(w+1)^{1/2}, \qquad (16)$$

cu $a < 1$,

sau

$$\frac{dz}{dw} = k\frac{\sqrt{w^2-1}}{w^2-a^2}; \qquad (17)$$

prin integrare se obţine :

$$z = k\left[\ln(w+\sqrt{w^2-1}) + \frac{\sqrt{1-a^2}}{a}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-a^2}}{a}\frac{w}{\sqrt{w^2-1}}\right] + K. \qquad (18)$$

Constantele K, a şi k se determină din condiţiile de corespondenţă ale punctelor A, B şi C, şi anume :

— în punctul A, $z=0$ şi $w=0$;

de unde $K = -jk\frac{\pi}{2}$; (19)

— la înconjurarea punctului B, funcția z schimbă cu $j\delta$, iar $w = a \pm \varepsilon$ (cu $\varepsilon \to 0$),
adică $j\delta = \lim_{\varepsilon \to 0} [z_2(a + \varepsilon) - z_1(a - \varepsilon)]$;

rezultă astfel: $$j\delta = \frac{k\pi}{2} \frac{\sqrt{1-a^2}}{a}; \tag{20}$$

— în punctul C, $z = \frac{b}{2} + j\delta$ iar $w = 1$; de unde:

$$\frac{b}{2} + j\delta = -jk\frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{2} \frac{\sqrt{1-a^2}}{a}. \tag{21}$$

Din ultimele două relații se obține:

$$k = j\frac{b}{\pi}, \quad \frac{a}{\sqrt{1-a^2}} = \frac{b}{2\delta}, \quad a = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2\delta}{b}\right)^2}}. \tag{22}$$

În planul w, cîmpurile magnetice într-un punct al axei u — cîmpul magnetic inductor H_{w0} și cîmpul magnetic de reacție al indusului H_{wi} — se calculează aplicînd legea circuitului magnetic și teorema suprapoziției; se obține:

$$H_{w0} = \frac{\varkappa\theta_e}{\pi(u-a)} - \frac{\varkappa\theta_e}{\pi(u+a)} = \frac{2a\varkappa\theta_e}{\pi(u^2-a^2)}, \tag{23}$$

$$H_{wi} = \frac{\varkappa\theta_i}{2\pi(u-a)} + \frac{\varkappa\theta_i}{2\pi(u+a)} = \frac{\varkappa\theta_i u}{\pi(u^2-a^2)}. \tag{24}$$

Forța care se exercită asupra pereților crestăturii de la capătul dintelui pînă la adîncimea $y - \delta$ a crestăturii este:

$$f(y) = \frac{\mu_0 l_i}{2\varkappa} \int_\delta^y [(H_0 + H_i)^2 - (H_0 - H_i)^2]\, dy, \tag{25}$$

sau:

$$f(y) = \frac{2\mu_0 l_i}{\varkappa} \int_\delta^y H_0 H_i\, dy,$$

în care H_0 și H_i sînt intensitățile cîmpului magnetic pe pereții crestăturii. În semiplanul w,
cu $H_0 = H_{w0}\frac{dw}{dz}$, $H_i = H_{wi}\frac{dw}{dz}$ rezultate din egalitatea tensiunilor magnetice din cele două plane, și

$$dy = \frac{1}{j}\frac{du}{dy}\, du \left(\frac{dz}{dw}\right)_y^2$$

se obține:

$$f(u) = \frac{2\mu_0 l_i}{\varkappa} \int_1^u H_{w0} H_{wi} \frac{1}{j}\frac{du}{dy}\, du = 2\varkappa\mu_0 l_i \int_1^u \frac{2a\theta_e\theta_i}{\pi^2 kj} \frac{u\, du}{(u^2-a^2)\sqrt{u^2-1}}. \tag{26}$$

Prin integrare și după înlocuirea constantelor k și a, rezultă:

$$f(u) = \varkappa\mu_0 l_i \frac{\theta_e}{\delta}\theta_i \frac{2}{\pi}\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{b}{2\delta}\right)^2}\sqrt{u^2-1}} - \frac{\pi}{2}\right]; \quad (27)$$

pentru calculul forței $f(y)$, trebuie considerată relația dintre y și u, care se obține din (18) pentru linia de contur CD, și anume:

$$y = \frac{b}{\pi}\left[\ln(u+\sqrt{u^2-1}) + \frac{2\delta}{b}\operatorname{arc\,tg}\frac{2\delta}{b}\frac{u}{\sqrt{u^2-1}}\right]. \quad (28)$$

Forța totală care se exercită asupra sistemului format din conductoarele parcurse de curent și armătura în crestătura căreia sînt dispuse este

$$F = \lim_{u\to\infty} f(u) = \lim_{u\to\infty} \varkappa\mu_0 l_i \frac{\theta_e}{\delta}\theta_i \frac{2}{\pi}\left[\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{b}{2\delta}\right)^2}\sqrt{u^2-1}} - \frac{\pi}{2}\right] =$$

$$= l_i B_0 N_i, \quad (29)$$

în care:

$$B_0 = \frac{\varkappa\theta_e}{\delta}.$$

Forța care se exercită asupra unui dinte delimitat de două crestături (fig. 5) este determinată de cîmpul inductor rezultant de pe flancurile sale. Cîmpul magnetic inductor de pe flancul din stînga este produs de solenația θ_e de excitație și solenația crestăturii din dreapta notată cu θ_i și dispusă în punctele F și B, ca în figura 4*b*; în consecință, cîmpul H_{01} de pe flancul din stînga este produs de solenația $-\left(\theta_e - \frac{\theta_i}{2}\right)$ din F și solenația $\theta_e - \frac{\theta_i}{2}$ din B. Cîmpul magnetic inductor H_{02} de pe flancul din dreapta este produs de asemenea de solenația $-\left(\theta_e + \frac{\theta_i}{2}\right)$ din F și solenația $\theta_e + \frac{\theta_i}{2}$ din B.

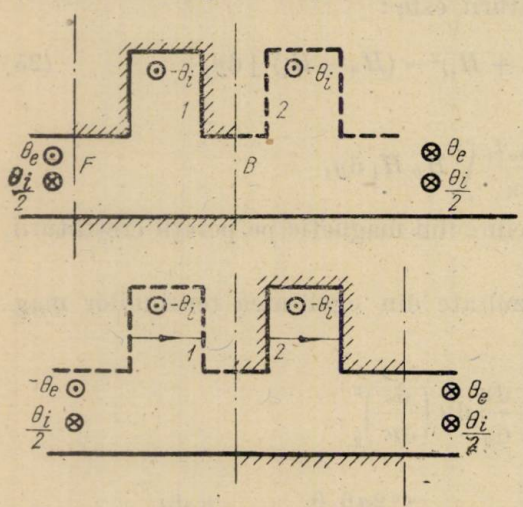


Fig. 5. — Explicativă pentru calculul forței care se exercită asupra dintelui.

Prin urmare, înlocuind corespunzător pe θ_e în relația (23) se obține :

$$H_{w01} = \frac{2a\varkappa\left(\theta_e - \frac{\theta_i}{2}\right)}{\pi(u^2 - a^2)}, \tag{30}$$

$$H_{w02} = \frac{2a\varkappa\left(\theta_e + \frac{\theta_i}{2}\right)}{\pi(u^2 - a^2)}, \tag{31}$$

iar H_{wi} are aceeași expresie (24).

Forța care se execută asupra dintelui pe porțiunea de la capătul dintelui pînă la adîncimea $y - \delta$ este :

$$f_z(y) = \frac{\mu_0}{2\varkappa}\int_{\delta}^{y}[(H_{01} + H_i)^2 - (H_{02} - H_i)^2]\, l_i\, dy. \tag{32}$$

În planul w rezultă :

$$f_z(u) = \frac{\mu_0 l_i}{2\varkappa}\int_1^u\left[\frac{-8a^2\varkappa^2\theta_e\theta_i}{\pi^2(u^2-a^2)^2} + \frac{8a\varkappa^2\theta_e\theta_i u}{\pi^2(u^2-a^2)^2}\right]\frac{(u^2-a^2)}{jk\sqrt{u^2-1}}\,du. \tag{33}$$

Prin integrare rezultă :

$$f_z(u) = \varkappa\mu_0 l_i\frac{\theta_e}{\delta}\theta_i\frac{2}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{1-a^2}\,\frac{\sqrt{u^2-1}}{au+1}. \tag{34}$$

Forța totală care se exercită asupra dintelui este :

$$F_z = f_z(\infty) = \varkappa\mu_0 l_i\frac{\theta_e}{\delta}\theta_i\frac{2}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\frac{2\delta}{b}. \tag{35}$$

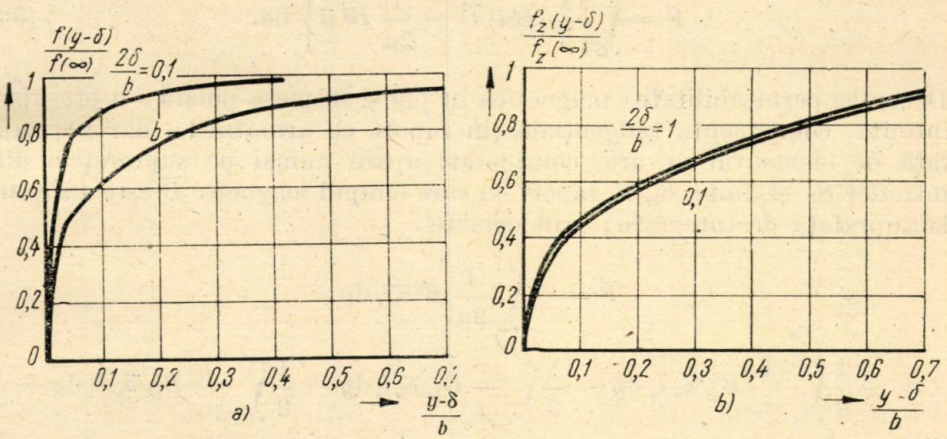


Fig. 6. — Forțele raportate la forțele totale în funcție de adîncimea de la baza crestăturii raportată la deschiderea crestăturii :

a) forța asupra pereților crestăturii ; *b*) forța asupra dintelui.

În figura 6 s-au reprezentat forţele raportate $f(y')/F$ şi $f_z(y')/f_z(\infty)$ în funcţie de y', adîncimea raportată a crestăturii : $y' = \frac{y-\delta}{b}$. Se constată astfel că forţa este repartizată în principal la capătul dintelui.

b. Forţa care se exercită asupra armăturii prevăzute cu conductoare parcurse de curent în cazul permeabilităţii finite şi constante

Problema generală a determinării cîmpului magnetic în dinte cu considerarea caracteristicii de magnetizare reală este nerezolvată ; în cazul permeabilităţii finite şi constante a miezului se poate determina cîmpul din miez în funcţie de cîmpul din întrefier prin metode aproximative.

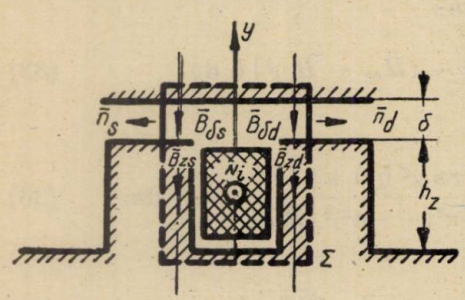


Fig. 7. — Explicativă pentru calculul forţei care se exercită asupra dintelui saturat.

Considerăm neglijabil fenomenul de histerezis şi tensiunea magnetică în juguri şi în piesa polară.

Fie o suprafaţă închisă Σ de-a lungul liniilor de cîmp prin dinţi şi întrefier şi normală pe liniile de cîmp în jug şi în piesa polară (fig. 7). Forţa care se exercită asupra corpurilor din suprafaţa închisă Σ (asupra conductorului şi pereţilor dinţilor care delimitează crestătura considerată), determinată prin aplicarea tensorului tensiunilor fictive, este :

$$\bar{F} = \int_{\Sigma} \left\{ \frac{1}{\mu} (\bar{B}\bar{n})\,\bar{B} - \frac{1}{2\mu} B^2 \bar{n} \right\} \mathrm{d}a. \tag{36}$$

Deoarece permeabilitatea magnetică în jug şi în piesa polară s-a presupus infinită, componenta tangenţială (în raport cu armăturile, dar normală faţă de elementul de arie considerat) apare numai pe suprafeţele din întrefier S_δ şi dinte S_z, în raport cu care cîmpul magnetic $\bar{B}$ este tangent la suprafaţa de integrare ; prin urmare :

$$\bar{F} = -\int_{\Sigma} \frac{1}{2\mu} B^2 \bar{n} l_i \,\mathrm{d}y =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{S_\delta} \frac{1}{\mu_0} B_{\delta s}^2 \bar{n}_s l_i \,\mathrm{d}y - \frac{1}{2}\int_{S_z} \frac{1}{\mu} B_{zs}^2 \bar{n}_s l_i \,\mathrm{d}y - \frac{1}{2}\int_{S_\delta} \frac{1}{\mu_0} B_{\delta d}^2 \bar{n}_d l_i \,\mathrm{d}y -$$

$$-\frac{1}{2}\int_{S_z} \frac{1}{\mu} B_{zd}^2 \bar{n}_d l_i \,\mathrm{d}y, \tag{37}$$

în care indicii s și d se referă la dintele din stînga, respectiv din dreapta crestăturii.
Notăm cu $\overline{n}_d = -\overline{n}_s = \overline{n}$; expresia de calcul a forței devine:

$$\overline{F} = \frac{1}{2}\overline{n}\, l_i \left[\frac{1}{\mu_0}\int_0^{\delta}(B_{\delta s}^2 - B_{\delta d}^2)\,dy + \frac{1}{\mu}\int_0^{h}(B_{zs}^2 - B_{zd}^2)\,dy\right]. \tag{38}$$

Ecuațiile de determinare a cîmpurilor stabilite prin aplicarea legii fluxului magnetic, legii circuitului magnetic și legea polarizației magnetice, considerînd cîmpul în întrefier constant în dreptul dintelui, sînt:

$$\begin{aligned} &2B_\delta = B_{zs} + B_{zd},\\ &B_{\delta s} = B_{zs} = \mu H_{zs} = \mu_0 H_{\delta s},\\ &B_{\delta d} = B_{zd} = \mu H_{zd} = \mu_0 H_{\delta d},\\ &(H_{zd} - H_{zs})\,h_z + (H_{\delta d} - H_{ds})\,\delta = Ni, \end{aligned} \tag{39}$$

în care $B_\delta \equiv B_0$ este inducția în întrefier în absența solenației Ni din crestătură; la stabilirea relațiilor de mai sus s-a neglijat cîmpul care se închide prin crestătură. Din sistemul de ecuații precedent rezultă:

$$B_{\delta s}^2 - B_{\delta d}^2 = \frac{2B_\delta Ni}{\dfrac{h_z}{\mu} + \dfrac{\delta}{\mu_0}}, \tag{40}$$

iar forța totală, obținută prin efectuarea integralei din relația 38, are expresia cunoscută:

$$F = l_i\, B_\delta\, Ni.$$

Raportul dintre forța F_μ, care se exercită asupra dintelui datorită permeabilității finite a miezului, și forța totală F este:

$$\frac{F_\mu}{F} = \frac{1}{1 + \dfrac{\delta}{h_z}\dfrac{\mu}{\mu_0}}; \tag{41}$$

de exemplu, pentru $\delta = 0{,}5$ cm, $h_z = 3$ cm, iar $\dfrac{\mu}{\mu_0} = 100$, rezultă $F_\mu/F = 0{,}06$. Din acest exemplu rezultă că, în cazul valorilor uzuale ale permeabilității dintelui, influența acestuia asupra repartiției forței este relativ mică.

c. Dependența forței care se exercită asupra capătului de dinte de poziția axei deschiderii crestăturii

Densitatea forței depinde de valoarea locală a cîmpului magnetic în întrefier și în dinte. Cîmpul magnetic în zona capătului de dinte, unde este localizată în principal forța care se exercită asupra sistemului armă-

tură-conductor, este funcție de starea de saturație a dintelui, de poziția capătului de dinte în raport cu crestătura și de solenațiile armăturilor.

Curba forței care se exercită asupra capătului de dinte, funcție de poziția sa față de crestătură, s-a determinat pe cale experimentală pe un model de mașină avînd inductorul neted, iar indusul crestat; capetele de dinți din indus aveau înălțimea comparabilă cu „deschiderea" crestă-

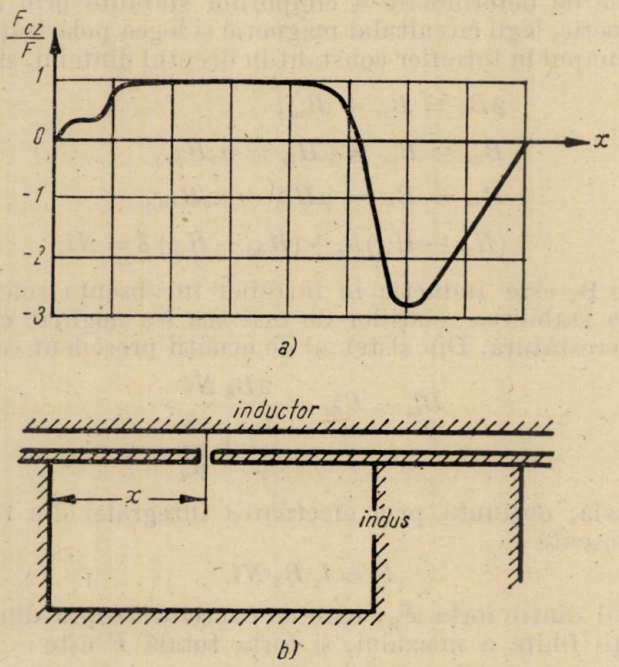


Fig. 8. — Forța care se exercită asupra capătului de dinte (*a*) în funcție de poziția deschiderii crestăturii în raport cu axa ei de simetrie (*b*).

turii. Modelul cu inductorul și indusul fix avea drept rotor sistemul format de capetele de dinți sub forma unui pahar lamelat.

S-a determinat astfel curba (raportată la forța care se exercită asupra mașinii de construcție normală, avînd axa deschiderii crestăturii suprapusă axei crestăturii) în funcție de distanța x a axei „deschiderii" crestăturii față de unul din pereții săi. În figura 8 este prezentată curba forței în funcție de distanța x pentru un pas polar.

Din această curbă rezultă o observație de importanță practică — privind alegerea poziției deschiderii crestăturii pentru determinarea forțelor care se exercită asupra capătului de dinte și micșorarea vibrațiilor dinților; astfel crestăturile cu deschiderea laterală sînt mai avantajoase în această privință.

3. CONCLUZII

În mașinile electrice, forțele electromagnetice care se exercită asupra armăturilor sînt localizate la suprafața armăturilor, de partea întrefierului; valoarea acestora se poate determina pe baza cunoscutei expresii a forței care se exercită asupra conductoarelor parcurse de curent și situate în întrefier în cîmp magnetic.

Curba densității forței este funcție de lărgimea crestăturii raportate la lărgimea întrefierului, de saturație și de poziția deschiderii crestăturii în raport cu crestătura; la mașinile cu crestături semideschise sau semiînchise, este mai avantajoasă soluția în care deschiderea crestăturii este asimetrică față de crestătură.

Primit la redacție la 14 august 1964

BIBLIOGRAFIE

1. L. Fleischmann, *Physikalische Nebenerscheinungen*. A.E.G. Mitteilungen, *3* (1925).
2. A. S. Langsdorf, *The development of Torque in Slotted Armatures*, T A I EE, **64**, p. III. 82—88 (1963).
3. R. Răduleț, *Forțele generale în mașinile electrice*. Bul. științific al Inst. de căi ferate (1957),
4. R. Răduleț, *Les tensions fictives équivalens aux actions ponderomotrices des champs de forces*. Bull. Sc. de l' École Polyt. Timișoara, **18**, *1* (1948).
5. A. T. Dvoracek, *Forces on the Teeth in D-C Machines*. *T A I EE*, **63**, p. III, 1 054—1 061 (1963).
6. F. C. Williams, R. S. Mamak, *Electromagnetic forces in slotted structures*. Proc. Inst. El. Eng., part. C, 11—17 (1962).
7. K. Humburg, *Die Entstehung des Drehmomentes in elektrischen Maschinen*. E T Z, iunie, 311 (1950).
8. R. Răduleț, *Bazele teoretice ale electrotehnicii*. **II**, București, Tip. Min. Inv., 1956.
9. J. A. Stratton, *Electromagnetic Theory*, Mc. Graw — Hill Book Company, Inc. New York N. Y., 1941.
10. R. Backer, *Theorie der Elektrizität*. **I**, B. G., Teubner Verlagsgesellschaft-Stuttgart, 1957.
11. Pl. Andronescu, *Das parallel und meridianebene Feld nebst Beispiellen*. Arch. Elektrot., **14**, 379 (1924).
12. F. Ollendorf, *Potentialfelder der Elektrotechnik*. Berlin, Ed. Julius Springer, 1932.

PROPRIETĂȚI DE STABILITATE ȘI DE OPTIMALITATE PENTRU SISTEMELE AUTOMATE CU MAI MULTE FUNCȚII DE COMANDĂ[1])

DE

V. M. POPOV

MEMBRU CORESPONDENT AL ACADEMIEI R.P.R.

Institutul de energetică al Academiei R.P.R., Șos. Vitan nr. 236, București

62—520.1:621.3.07

Pe baza unui studiu algebric general al sistemelor considerate, se tratează în mod unitar problema hiperstabilității și problema minimizării integralei unei forme patratice de variabilele sistemului, generalizînd rezultate anterioare obținute de autor, V. A. Iacubovici și R. E. Kalman.

1. FORMULAREA PROBLEMEI

Numeroase probleme ale teoriei sistemelor automate pot fi reduse la studiul sistemului format din ecuația diferențială vectorial-matricială

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = A\,u + B\,x \tag{1.1}$$

și din integrala asociată

$$I(0, T) = \int_0^T (\overline{x}'\,P x + 2\,\mathrm{Re}\,\overline{x}'\,Q\,u + \overline{u}'\,R\,u)\,\mathrm{d}t, \tag{1.2}$$

---

[1]) Articol apărut — cu unele completări — și în „Rev. Roum. Sci. Techn. — Electrotechn. Energ.", **9**, *4* (1964).

St. cerc. energ. electr. Tom 14 Nr. 4 p. 913—949 București 1964

unde u este un vector cu n dimensiuni, A este o matrice pătrată $n \times n$, B este o matrice $n \times m$, x este un vector cu m dimensiuni, ale cărui componente sînt funcţii de t continue pe porţiuni, P este o matrice simetrică $m \times m$, Q este o matrice $m \times n$, iar R este o matrice simetrică $n \times n$. Toate mărimile se presupun reale în afară de vectorii u şi x, ale căror componente pot fi mărimi complexe. Orice simbol de forma $\overline{x}'$ reprezintă transpusul şi conjugatul complex al mărimii reprezentate de x.

Relaţiile (1.1) şi (1.2) admit următoarea interpretare fizică (fig. 1). Ecuaţia (1.1) descrie evoluţia sistemului automat din figură, componentele vectorului x reprezentînd funcţiile de comandă aplicate sistemului, componentele vectorului u descriind starea internă a sistemului şi mărimile de ieşire. Între mărimile u şi x există de obicei o relaţie suplimentară care corespunde prezenţei unei „reacţii" în sistemul studiat. După cum s-a arătat în lucrări anterioare [1], [2], existenţa reacţiei face ca o integrală de forma (1.2) să verifice o anumită inegalitate. O problemă care se pune în acest caz este de a stabili cele mai generale condiţii în care sistemul studiat se comportă stabil pentru toate funcţiile de comandă $x(t)$ pentru care este verificată o asemenea inegalitate integrală, adică are loc proprietatea de „hiperstabilitate".

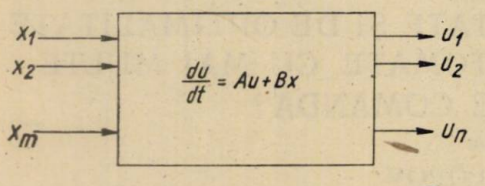


Fig. 1

Alteori integrala (1.2) reprezintă „costul" unei anumite evoluţii a sistemului considerat şi se pune problema naturală, tratată pe larg în literatură în cazul unei singure funcţii de comandă [3], [4], [5], [6], [7], de a alege funcţia $x(t)$ în aşa fel încît valoarea integralei $I(0,\infty)$ să fie minimă.

În prezenta lucrare, tratarea acestor două probleme în cazul mai multor funcţii de comandă este precedată de un studiu general al diferitelor moduri echivalente în care poate fi prezentat sistemul (1.1) (1.2), ceea ce permite împărţirea sistemelor de acest tip în clase de echivalenţă şi punerea în evidenţă a unor mărimi şi relaţii avînd un caracter invariant în cadrul acestor clase. Introducerea acestui mod de tratare conferă rezultatelor mai multă generalitate şi face ca acestea, deşi au în special în vedere sistemele cu mai multe funcţii de comandă, să păstreze totuşi caractere de noutate şi după particularizarea lor la cazul, amplu tratat în literatură, al sistemelor cu o singură funcţie de comandă.

Spaţiul mare necesitat de unele demonstraţii ne-a obligat de mai multe ori să ne mărginim la prezentarea unor indicaţii care permit reconstituirea lor de către cititor şi să renunţăm complet, în cîteva cazuri, la prezentarea demonstraţiilor.

2. DEFINIREA UNOR CLASE DE ECHIVALENȚĂ

Sistemul (1.1) (1.2) este caracterizat complet de ansamblul matricelor $(A, B; P, Q, R)$ și de ansamblul vectorilor (u, x). Definim o transformare care permite trecerea de la un sistem dat la unul echivalent: $(\widetilde{A}, \widetilde{B}; \widetilde{P}, \widetilde{Q}, \widetilde{R}), (\widetilde{u}, \widetilde{x})$ cu ajutorul relațiilor:

$$\widetilde{A} = A + BF, \quad \widetilde{B} = B; \quad \widetilde{P} = P, \quad \widetilde{Q} = Q + PF,$$

$$\widetilde{R} = R + Q'F + F'Q + F'PF; \tag{2.1}$$

$$\widetilde{u} = u, \quad \widetilde{x} = x - Fu, \tag{2.2}$$

în care F este o matrice $m \times n$. Vom denumi o asemenea transformare, pe scurt, „transformare (F)".

Este un exercițiu simplu să se arate că aceste relații sînt reflexive, simetrice și tranzitive și, ca urmare, permit împărțirea tuturor sistemelor de forma (1.1) (1.2) în clase de echivalență. Putem spune, în consecință, că două sisteme de forma (1.1) (1.2) sînt „echivalente (F)" dacă pot fi obținute unul din celălalt cu ajutorul unei transformări (F).

Alături de transformările (F), care joacă rolul principal în prezenta lucrare, vom considera și „transformările (S)", definite de relațiile:

$$\widetilde{A} = S^{-1} A S, \quad \widetilde{B} = S^{-1} B; \quad \widetilde{P} = P, \quad \widetilde{Q} = QS, \quad \widetilde{R} = S'RS, \tag{2.3}$$

$$\widetilde{u} = S^{-1} u, \quad \widetilde{x} = x, \tag{2.4}$$

în care S este o matrice $n \times n$ nesingulară. Ele reprezintă de asemenea relații de echivalență, atît singure, cît și împreună cu transformările (F).

Vom introduce, în sfîrșit, „transformarea (W)" pentru prezentarea naturală a căreia este însă indicat să lărgim întrucîtva cadrul problemei noastre, introducînd în locul integralei (1.2) integrala:

$$Y(0, T) = \int_0^T (\overline{x}' P x + 2 \operatorname{Re} \overline{x}' Qu + \overline{u}' Ru)\, dt - \int_0^T \frac{d}{dt} (\overline{u}' Cu)\, dt, \tag{2.5}$$

în care C este o matrice simetrică $n \times n$. Transformarea (W) este definită de relațiile:

$$\widetilde{A} = A, \quad \widetilde{B} = B; \widetilde{P} = P, \quad \widetilde{Q} = Q + B'W, \quad \widetilde{R} = R + WA + A'W; \tag{2.6}$$

$$\widetilde{C} = C + W; \tag{2.7}$$

$$\widetilde{u} = u, \quad \widetilde{x} = x, \tag{2.8}$$

în care W este o matrice simetrică $n \times n$. După cum se vede, transformarea (W) permite doar scrierea într-o nouă formă a integralei (2.5), sistemul (1.1) rămînînd neschimbat.

3. COMPORTAREA UNOR PROPRIETĂȚI ȘI MĂRIMI CARACTERISTICE LA APLICAREA UNOR TRANSFORMĂRI (F), (S) ȘI (W)

Studiul transformărilor clasice $\tilde{A} = S^{-1}AS$, condus astăzi pînă la epuizarea tuturor problemelor fundamentale, poate servi drept model pentru construirea unei teorii sistematice a transformărilor introduse mai sus. Fără a putea avea pretenția de a construi aici teoria completă a acestor transformări, ne vom mărgini la prezentarea elementelor necesare pentru tratarea problemelor cărora le este dedicată lucrarea, punînd în evidență un sistem de mărimi și proprietăți cu caracter invariant față de transformările respective și definind un sistem canonic în cadrul fiecărei clase de echivalență, a cărui introducere va ușura considerabil studiul problemelor tratate.

O primă problemă care prezintă interes este stabilirea modului în care se comportă polinomul caracteristic al matricii A la efectuarea unei transformări (F). Spre deosebire de cazul transformărilor de forma $\tilde{A} = S^{-1}AS$ (în cadrul cărora, după cum este bine cunoscut, polinomul caracteristic al matricii A este invariant), în cazul transformărilor (F) în anumite condiții generale, are loc următoarea proprietate :

Proprietatea 1. Fiind dat un polinom oarecare de grad n, cu coeficientul termenului de grad n egal cu unitatea, există o matrice F, $(m \times n)$, astfel încît polinomul caracteristic al matricei $A + BF$ este egal cu polinomul dat.

Cît privește condițiile în care are loc proprietatea 1, ele sînt date de următoarea propoziție (vezi anexa A).

Propoziția 1. *Pentru ca proprietatea 1 să aibă loc este necesar și suficient ca perechea de matrice* (A, B) *să fie „complet controlabilă".*

Amintim [8] că perechea (A, B) se numește complet controlabilă dacă matricea cu n linii și nm coloane

$$(B \quad AB \quad A^2B \ldots A^{n-1}B), \tag{3.1}$$

are rangul n. Propoziția 1 arată că proprietatea 1 poate fi privită ca o definiție a controlabilității complete a perechii de matrice (A, B), în termenii unor transformări (F). În mod analog, se poate da o definiție a aceleiași proprietăți „în termenii unor transformări (S)", ajungînd pe această cale la o formulare de astă dată bine cunoscută : „Nu există nici o matrice nesingulară S astfel încît matricele $\tilde{A} = S^{-1}AS$ și $\tilde{B} = S^{-1}B$ să se aducă simultan la forma bloc :

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix} \qquad \tilde{B} = \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

unde matricile nou introduse au dimensiunile următoare :
$A_1 : p \times p$, $(p < n)$; $A_2 : p \times (n-p)$, $A_3 : (n-p) \times (n-p)$ și $B_1 : p \times m$".

Definirea controlabilității complete a perechii de matrice (A, B) în termenii transformărilor (F) (cu proprietatea *1*) pune în evidență

invarianța acestei proprietăți față de transformările (F), după cum definirea aceleiași proprietăți în termenii transformărilor (S) arată invarianța ei față de transformările (S).

În mod asemănător, toate proprietățile intrinsece ale sistemului (1.1) (1.2), care formează obiectul prezentului studiu, admit descrieri invariante față de transformările introduse.

Dacă, după cum am văzut, polinomul caracteristic al matricei A nu mai este invariant față de transformările (F), este natural să se caute alte expresii caracteristice invariante față de aceste transformări. La acest obiectiv ne va conduce studiul matricei $m \times m$:

$$H(z, s) = P + Q(sE - A)^{-1}B + B'(zE - A')^{-1}Q' + \\ + B'(zE - A')^{-1}R(sE - A)^{-1}B, \tag{3.3}$$

unde E este matricea unitate cu n linii și coloane, iar s și z sînt numere complexe.

Se demonstrează că, în urma aplicării unei transformări (F), matricea $H(z, s)$ devine :

$$\tilde{H}(z, s) = D'(z)H(z, s)D(s), \tag{3.4}$$

în care $D(s)$ este o matrice $m \times m$ avînd expresia :

$$D(s) = E_m + F(sE - A - BF)^{-1}B, \tag{3.5}$$

unde E_m este matricea unitate $m \times m$.

Demonstarea relației (3.4) se reduce la un calcul algebric simplu dacă se ține seamă de egalitatea :

$$(sE - A)(sE - A - BF)^{-1}B = B(E_m + F(sE - A - BF)^{-1}B). \tag{3.6}$$

Din (3.4) rezultă că, deși $H(z, s)$ nu este invariant față de transformarea (F), proprietatea „matricea $H(\bar{s}, s)$ (pentru $z = \bar{s}$) este pozitiv semidefinită", are o semnificație invariantă față de această transformare. Tocmai asemenea proprietăți vor avea locul central în enunțurile din restul lucrării.

Determinanții expresiilor $D(s)$ (3.5) au proprietatea remarcabilă de a putea fi scriși sub forma (vezi anexa B) :

$$\det D(s) = \frac{\det(sE - A)}{\det(sE - A - BF)}. \tag{3.7}$$

De aici și din expresia (3.4) rezultă că expresia

$$\rho(z, s) = \det(zE - A) \cdot \det H(z, s) \cdot \det(sE - A), \tag{3.8}$$

este un invariant față de transformările (F). Se demonstrează că $\rho(z, s)$ este un polinom de grad maxim n atît în z, cît și în s (vezi anexa C). Acest polinom are, în cadrul transformărilor (F), o însemnătate analogă cu aceea a polinomului caracteristic al matricei A în cadrul transformărilor $\tilde{A} = S^{-1}AS$.

Relația (3.8) ne conduce la formula:

$$\det H(z, s) = \frac{\rho(z, s)}{\det(zE-A) \cdot \det(sE-A)}, \tag{3.9}$$

unde, independent de m, numitorul și numărătorul nu au grade mai mari decît n atît în z, cît și în s. De aici rezultă concluzia interesantă că, în cazul unor expresii de forma (3.9), complexitatea calculelor este aproximativ aceeași, atît în cazul unei singure funcții de comandă ($m = 1$), cît și al mai multor asemenea funcții ($m > 1$).

Se vede imediat că matrice $H(z, s)$ este invariantă față de o transformare (S). În ceea ce privește transformarea (W), se observă că matricea $H(-s, s)$ (pentru $z = -s$) este invariantă față de această transformare. În cele ce urmează vom face uz de transformarea (W) numai în acele cazuri în care intervin mărimi de forma $H(-s, s)$.

4. DEFINIREA UNEI CLASE DE SISTEME CU PROPRIETĂȚI SPECIALE

În continuarea prezentei lucrări nu vom mai avea în vedere totalitatea sistemelor de forma (1.1) — (1.2), ci ne vom mărgini la analizarea unei clase de asemenea sisteme, caracterizată prin proprietatea că matricea $H(-i\omega, i\omega)$ este pozitiv semidefinită pentru ω real. Această condiție reprezintă, în esență, criteriul spectral care a intervenit în lucrările noastre anterioare privind stabilitatea sistemelor automate cu mai multe elemente neliniare [9], [10], [11]. Conținutul principal al prezentului punct constă în stabilirea unor proprietăți echivalente cu proprietatea fundamentală de mai sus, utile pentru dezvoltările ulterioare. Printre echivalențele stabilite mai jos, un loc principal îl ocupă extensiunea la cazul mai multor funcții de comandă a binecunoscutei leme a lui V. I. Iacubovici [12] și R. E. Kalman [13], care, în problema stabilității absolute a sistemelor automate cu un singur element neliniar, a permis demonstrarea echivalenței dintre criteriul spectral și criteriile obținute cu ajutorul funcțiilor Liapunov de tipul introdus de A. I. Lurie, [14], [15], [16]. Rezultatele prezentului studiu, expuse în lema care urmează, aduc elemente noi și în cazul unei singure funcții de comandă ($m = 1$).

Lema 1. *Dacă perechea (A,B) este complet controlabilă, următoarele proprietăți sînt echivalente:*

(A): matricea $H(-i\omega, i\omega)$ este pozitiv semidefinită pentru orice număr real ω pentru care $i\omega$ nu este o valoare proprie a matricei A;

$B)$: există matricele reale K, $(m \times m)$; L, $(m \times n)$; și M, $(n \times n)$; astfel încît expresia:

$$\psi(s) = \det(K + L(sE - A)^{-1}B) \cdot \det(sE - A), \tag{4.1}$$

dacă nu este identic nulă este diferită de zero pentru Re $s > 0$ *și totodată este îndeplinită una dintre următoarele condiții echivalente:*

(a): este îndeplinită egalitatea:

$$H(-s, s) = (K' + B'(-sE - A')^{-1}L')(K + L(sE - A)^{-1}B); \tag{4.2}$$

(*b*) : *au loc următoarele trei relații algebrice* (*care extind relațiile lui V. A. Iacubovici și R. E. Kalman*) :

$$K'K = P, \tag{4.3}$$

$$MA + A'M = L'L - R, \tag{4.4}$$

$$MB - L'K + Q' = 0; \tag{4.5}$$

(*c*) : *toate soluțiile sistemului* (*1.1*) *verifică, oricare ar fi* $x(t)$ (*continuu pe porțiuni*), *egalitatea* :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\bar{u}'Mu) + \bar{x}'Px + 2\,\mathrm{Re}\,\bar{x}'Qu + \bar{u}'Ru = \|Lu + Kx\|^2 \tag{4.6}$$

(*unde s-a folosit notația* : $\|v\|^2 = v'v$) ;

(*d*) *toate soluțiile sistemului* (*1.1*) *verifică, oricare ar fi* x (t), *continuu pe porțiuni, egalitatea* :

$$\int_0^T (\bar{x}'Px + 2\,\mathrm{Re}\,\bar{x}'Qu + \bar{u}'Ru)\,\mathrm{d}t = \int_0^T \|Lu + Kx\|^2\,\mathrm{d}t - \bar{u}'(T)Mu(T) + \bar{u}'(0)Mu(0). \tag{4.7}$$

Demonstrație. Se observă, în primul rînd că, dacă echivalența proprietăților din lema 1 este demonstrată pentru un sistem dat, atunci ea are loc și pentru orice sistem echivalent cu acesta, în sensul transformărilor, (F), (S) sau (W). Pentru proprietatea (B), acest lucru devine evident introducînd transformările :

$$\tilde{K} = K,\ \tilde{L} = L + KF,\ \tilde{M} = M,\ \text{(față de transformarea } (F)); \tag{4.8}$$

$$\tilde{K} = K,\ \tilde{L} = LS,\ \tilde{M} = S'MS,\ \text{(față de transformarea } (S)); \tag{4.9}$$

$$\tilde{K} = K,\ \tilde{L} = L,\ \tilde{M} = M - W,\ \text{(față de transformarea } (W)). \tag{4.10}$$

Presupunem că polinomul $\rho(-s,s)$ nu este indentic nul, cazul contrar rezolvîndu-se prin trecere la limită. În baza propoziției *1*, putem alege matricea F astfel, încît matricea $\tilde{A} = A + BF$ să aibă valori caracteristice reale, distincte, negative și diferite de rădăcinile ecuației $\rho(-s, s) = 0$ (ultima condiție poate fi asigurată deoarece $\rho(-s, s)$ este un polinom invariant față de transformările considerate). După efectuarea acestei transformări (F), efectuăm o transformare (W), unde matricea W verifică ecuația $W\tilde{A} + \tilde{A}'W = -\tilde{R}$, ceea ce, date fiind proprietățile matricei $\tilde{A}$, se poate totdeauna realiza în virtutea unei binecunoscute teoreme a lui Liapunov. Această transformare lasă matricea $\tilde{A}$ neschimbată și face ca transformata matricei $\tilde{R}$ să fie egală cu zero (vezi (2.6)). Se mai aplică apoi o transformare (S), care aduce matricea $\tilde{A}$ la forma diagonală. Ștergînd acum semnele distinctive ($\sim$) introduse la efectuarea transformărilor, rezultă că este suficient să demonstrăm lema 1 în cazul în care matricea R este egală cu zero, iar matricea A are forma :

$$A = \mathrm{diag}\,(s_k), \qquad s_k < 0 \tag{4.11}$$

unde prin diag (s_k) am simbolizat o matrice diagonală avînd elementul de pe linia și coloana k egal cu s_k. Totodată, numerele s_k sînt reale, distincte, negative și satisfac condiția :

$$\rho(-s_k, s_k) \neq 0. \tag{4.12}$$

Întrucît $R = 0$, relația (4.4) devine :

$$MA + A'M = L'L. \tag{4.13}$$

Scriind matricile Q și B sub forma :

$$Q = (q_1\, q_2 \cdots q_n), \tag{4.14}$$

$$B = \begin{pmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ . \\ . \\ b'_n \end{pmatrix}, \tag{4.15}$$

unde q_k sînt vectori-coloană, iar b_k', vectori-linie cu m componente și, ținînd seama de condiția $R = 0$, expresia lui $H(-s, s)$ capătă forma (vezi 3.3)) :

$$H(-s, s) = P + \sum_{k=1}^{n} \frac{q_k b'_k}{s - s_k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k q'_k}{-s - s_k}. \tag{4.16}$$

Cu aceste observații, demonstrația lemei 1 decurge după schema următoare :

$$(A) \to (Ba) \to (Bb) \to (Bc) \to (Bd) \to (A), \tag{4.17}$$

în care săgețile simbolizează implicații, iar literele reprezintă proprietățile din enunțul lemei 1. Simbolul (Ba) reprezintă : proprietatea (B) păstrînd numai condiția (a). Semnificații analoge au simbolurile (Bb), (Bc) și (Bd). Demonstrăm pe rînd implicațiile reprezentate în schema (4.17).

Demonstrația implicației $(A) \to (Ba)$. Se folosește următoarea propoziție :

Propoziția 2. *Dacă matricea de polinoame cu coeficienți reali* $P(s)$, $(m \times m)$, *este pozitiv semidefinită pentru orice* $s = i\omega$ (ω *real*) *și verifică egalitatea* : $P(s) = P'(-s)$, *atunci există o matrice de polinoame* $Y(s)$ *cu coeficienți reali și al cărei determinant, dacă nu este identic nul, este diferit de zero pentru* Re $s > 0$, *astfel încît* :

$$P(s) = Y'(-s)\, Y(s). \tag{4.18}$$

Remarcăm strînsa legătură care există între această propoziție și o teoremă aparținînd lui I. Ț. Kochberg și M. G. Krein (vezi [17], teorema 8.2). Demonstrația propoziției 2 se obține combinînd ideile din lucrarea [17] cu unele

metode și raționamente aparținînd lui N. I. Mushelișvili și N. P. Vekua, expuse în lucrarea [18] (vezi anexa D).

Introducînd matricea de polinoame

$$P(s) = \det(-sE-A)H(-s, s)\det(sE - A), \tag{4.19}$$

se constată că sînt îndeplinite condițiile din propoziția 2 și deci, folosind (4.18), se poate scrie :

$$H(-s, s) = Z'(-s)Z(s), \tag{4.20}$$

unde

$$Z(s) = Y(s)(\det(sE - A))^{-1}. \tag{4.21}$$

În particular, se obține din (4.20), pentru orice element diagonal, h_{jj} al matricei H :

$$h_{jj}(-i\omega, i\omega) = \sum_{k=1}^{n} \|z_{kj}(i\omega)\|^2, \tag{4.22}$$

unde z_{kj} sînt elementele matricei Z.

Cum din expresia lui $H(-s, s)$ (4.16) rezultă că limita expresiei $h_{jj}(-i\omega, i\omega)$ pentru $\omega \to \infty$ este o constantă (eventual zero), în virtutea relației (4.22) aceeași proprietate trebuie să aibă loc pentru oricare dintre elementele z_{jk} ale matricei Z. De aici rezultă că $Z(s)$ se poate dezvolta în fracții simple sub forma (vezi (4.21) și (4.11)) :

$$Z(s) = K + \sum_{k=1}^{n} \frac{V_k}{s - s_k}, \tag{4.23}$$

unde K este o matrice constantă, iar V_k sînt matricele formate cu reziduurile elementelor lui Z în polii s_k. Comparînd relațiile (4.16), (4.20) și (4.23), se găsește :

$$\lim_{s \to s_k} H(-s, s)(s - s_k) = q_k b_k' = Z'(-s_k)V_k. \tag{4.24}$$

Totodată, matricea $Z'(-s_k)$ este nesingulară, pentru că în cazul contrar nu ar fi îndeplinită condiția (4.12) (vezi (3.9) (4.18) și (4.19)). Ca urmare, deducem din (4.24) :

$$V_k = l_k b_k', \tag{4.25}$$

unde

$$l_k = [Z'(-s_k)]^{-1} q_k. \tag{4.26}$$

Introducînd matricea :

$$L = (l_1 l_2 \ldots l_n), \tag{4.27}$$

matricea $Z(s)$ se poate scrie sub forma (vezi (4.11), (4.23), (4.25), (4.27)) :

$$Z(s) = K + L(sE - A)^{-1} B. \tag{4.28}$$

Relațiile (4.20) și (4.28) ne dau chiar proprietatea (Ba). Totodată, dacă ar exista un număr s_0 cu partea reală pozitivă, pentru care să avem $\psi(s_0) = 0$, atunci (vezi (4.1) și (4.21)) am avea egalitatea $\det Y(s_0) = 0$ pentru

Re $s_0 > 0$, ceea ce contrazice propoziția 2. Cu aceasta se încheie demonstrația proprietății (Ba).

Demonstrația implicației $(Ba) \to (Bb)$. Din proprietatea (Ba) rezultă (luînd limita egalității (4.2) pentru $s \to \infty$), că are loc egalitatea (4.3). Întrucît matricea A are structura (4.11), există o matrice M care verifică relația (4.13), care înlocuiește în demonstrația noastră relația (4.4). Eliminînd $H(-s, s)$ între relațiile (4.2) și (3.3) (cu $R = 0$) și ținînd seama de egalitățile (4.3), (4.13) și de identitățile :

$$A(sE - A)^{-1} B = -B + s(sE - A)^{-1} B, \tag{4.29}$$

$$B'(-sE - A')^{-1} A' = -B' - sB'(-sE - A')^{-1}, \tag{4.30}$$

se obține egalitatea :

$$G(sE - A)^{-1} B + B'(-sE - A')^{-1} G' = 0, \tag{4.31}$$

unde

$$G = B'M - K'L + Q. \tag{4.32}$$

Reprezentînd matricea G sub forma :

$$G = (g_1 \; g_2 \; \dots \; g_n) \tag{4.33}$$

și folosind (4.11) și (4.15), ecuația (4.31) capătă forma :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{g_k b_k'}{s - s_k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k g_k'}{-s - s_k} = 0 \tag{4.34}$$

de unde, înmulțind cu $(s - s_j)$ și făcînd apoi $s = s_j$, se obține :

$$g_j b_j' = 0, \tag{4.35}$$

oricare ar fi j întreg între 1 și n. Însă b_j' are cel puțin o componentă diferită de zero, întrucît, în cazul contrar, matricele A și B ar putea fi aranjate sub forma (3.2), ceea ce contrazice ipoteza că perechea de matrice (A, B) este complet controlabilă. Din (4.35) se deduce atunci că g_j este egal cu zero. Cum raționamentul este valabil oricare ar fi $j = 1, 2, \dots n$, rezultă că matricea G este egală cu zero. De aici rezultă însă ecuația (4.5) întrucît membrul stîng al acestei ecuații este chiar G' (vezi (4.32)).

Demonstrația implicației $(Bb) \to (Bc)$ se obține efectuînd derivata din membrul stîng al egalității (4.6), în virtutea sistemului (1.1) și folosind apoi relațiile (4.3) — (4.5).

Demonstrația implicației $(Bc) \to (Bd)$ rezultă printr-o simplă integrare între 0 și T.

În sfîrșit, pentru demonstrarea implicației $(Bd) \to (A)$ se consideră funcția particulară :

$$x_0(t) = v\, e^{i\omega_0 t}, \tag{4.36}$$

unde v este un vector oarecare cu m dimensiuni, iar ω_0 este un număr real arbitrar. Alegînd convenabil condițiile inițiale în sistemul (1.1), acesta admite soluția :

$$u_0(t) = (i\omega_0 E - A)^{-1} B v\, e^{i\omega_0 t}. \tag{4.37}$$

Introducînd (4.36) și (4.37) în (4.7), pentru $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ (sau pentru T arbitrar dacă $\omega_0 = 0$), se obține, întrucît are loc egalitatea $u(T) = u(0)$:

$$v' H(-i\omega_0, i\omega_0) v = \frac{1}{T} \int_0^T \|Lu_0(t) + Kx_0(t)\|^2 \, dt \geqq 0, \tag{4.38}$$

ceea ce, întrucît v și ω_0 sînt arbitrari, demonstrează proprietatea (A) și cu aceasta lema 1 în întregime.

Observații : 1°. Din formula (4.38) rezultă că, dacă are loc egalitatea :

$$L u_0(t) + K x_0(t) = 0, \tag{4.39}$$

atunci are loc și egalitatea :

$$\bar{v}' H(-i\omega_0, i\omega_0) v = 0, (\|v\| \neq 0). \tag{4.40}$$

Reciproc, dacă (4.40) are loc, atunci se poate defini funcția (4.36) și soluția (4.37) și rezultă din (4.38) că este verificată și egalitatea (4.39).

2°. Din relațiile (4.1) (4.2) și (3.8) rezultă că polinomul invariant $\rho(-s, s)$ poate fi factorizat sub forma :

$$\rho(-s, s) = \psi(-s)\ \psi(s), \tag{4.41}$$

unde $\psi(s)$ este dat de expresia (4.1). De aici rezultă că $\psi(s)$ este și el un polinom invariant, fapt care poate fi stabilit și direct, folosind (3.6) și (3.7).

5. O FORMĂ CANONICĂ PENTRU SISTEMELE STUDIATE

În paragraful de față ne plasăm în condiții încă mai restrictive, presupunînd că are loc condiția :

$$\det P \neq 0 \tag{5.1}$$

și că este verificată una dintre proprietățile echivalente din lema 1. Printre sistemele echivalente în sensul transformării (F) vom căuta un sistem în care $H(-s, s)$ să aibă o expresie cît mai simplă. Introducerea acestui sistem „canonic" va ușura considerabil studiul problemelor tratate în lucrare.

Din condiția (5.1) și din relația (4.3) rezultă :

$$\det K \neq 0. \tag{5.2}$$

Aplicăm o transformare (F) cu $F = -K^{-1}L$. Din relațiile de transformare (4.8) rezultă imediat $\tilde{L} = 0$ și deci, folosind (4.2), se obține relația :

$$\tilde{H}(-s, s) = K'K = P. \tag{5.3}$$

Transformarea (F) specială de mai sus aduce deci pe H la o formă în care toate elementele sînt constante. Sistemul „canonic" obținut în urma acestei transformări (F) are forma :

$$\frac{du}{dt} = A_c u + B x_c, \tag{5.4}$$

unde

$$A_c = A - B K^{-1} L \tag{5.5}$$

$$x_c = x + K^{-1} L u, \tag{5.6}$$

iar integrala (1.2), conform cu (4.7), are expresia:

$$I(0, T) = \int_0^T \overline{x}'_c P x_c \, dt - \overline{u}'(T) Mu(T) + \overline{u}'(0) Mu(0). \tag{5.7}$$

Am folosit mai sus indicele c pentru mărimile corespunzătoare sistemului canonic.

Vom denumi „sistem canonic omogen" sistemul (5.4) pentru $x_c = 0$. Se observă că polinomul invariant $\psi(s)$ (4.1) devine egal cu:

$$\psi(s) = \det K \cdot \det(sE - A_c), \tag{5.8}$$

adică devine proporţional cu ecuaţia caracteristică a sistemului canonic omogen. Polinomul invariant $\rho(-s, s)$ se obţine de aici cu ecuaţia (4.41). Întrucît polinomul $\psi(s)$ nu are rădăcini cu partea reală pozitivă (vezi lema 1, proprietatea (B)), rezultă din (5.8) că soluţia banală a sistemului canonic omogen este stabilă, putînd însă, eventual, să nu fie *asimptotic* stabilă. În acest din urmă caz, sistemul canonic omogen are soluţii de forma $u_0(t) = w e^{i\omega_0 t}$, unde w este un vector constant cu n dimensiuni. Din condiţia $x_c(t) = 0$, care caracterizează sistemul canonic omogen, rezultă relaţia (vezi (5.6)) $Kx_0(t) + Lu_0(t) = 0$, unde $x_0(t)$ este funcţia de comandă din sistemul iniţial (1.1) (netransformat), corespunzătoare relaţiei $x_c(t) = 0$. Din observaţia 1° de la sfîrşitul punctului 4 rezultă atunci egalitatea (4.40), de unde (vezi (3.8)):

$$\rho(-i\omega_0, i\omega_0) = 0. \tag{5.9}$$

Dacă deci polinomul invariant $\rho(-s, s)$ nu se anulează pentru $s = i\omega$, unde ω este un număr real oarecare, atunci sistemul canonic omogen nu poate avea nici soluţii periodice de forma considerată mai sus şi, prin urmare, soluţia lui banală este asimptotic stabilă.

Se demonstrează că sistemul canonic este unic. În condiţii ceva mai restrictive, acest lucru rezultă imediat din dezvoltările de la punctul 7.

Construcţia sistemului canonic se poate face şi în condiţii mult mai generale decît cele considerate mai sus[2]).

6. HIPERSTABILITATEA SISTEMELOR CU MAI MULTE FUNCŢII DE COMANDĂ

În prezentul paragraf se urmăreşte să se stabilească implicaţiile pe care le are criteriul spectral (vezi (A) lema 1) în problema stabilităţii. Dacă în primele lucrări [8], [9] s-a dovedit că îndeplinirea criteriului spectral asigură stabilitatea unor anumite clase de sisteme automate, ulterior [1], [2] [11], s-a urmărit determinarea celor mai generale clase de sisteme a căror stabilitate este asigurată de îndeplinirea criteriului

[2]) V. „Rev. Roum. Sci. Techn.-Electrotechn. Energ." **9**, *4* (1964) sau anexa F care va apare în St. cerc. energ. electr., **15**, *1* (1965).

spectral. S-au pus astfel în evidență clase de sisteme pentru a căror stabilitate criteriul spectral nu este numai suficient, ci și necesar. Dezvoltările de mai jos urmăresc extinderea în continuare a valabilității criteriului spectral la clase mai generale de sisteme. În acest scop, definiția 1, care urmează, este astfel formulată, încît să se cuprindă o clasă cît mai largă de funcții de comandă. De remarcat că criteriul spectral rămîne necesar și în cadrul unor clase mai restrînse de sisteme, problemă care nu va fi însă examinată în lucrarea de față.

Definiția 1. Fiind dat sistemul (1.1) (1.2) și o condiție inițială $u(0) = u_0$, se va spune că funcția $x(t)$ aparține clasei $(I(u_0))$, dacă este continuă pe porțiuni și dacă există o constantă γ, pozitivă sau nulă, astfel încît funcția $x(t)$ împreună cu soluția corespunzătoare $u(t)$ a ecuației (1.1) pentru $u(0) = u_0$ să verifice, oricare ar fi $T > 0$, inegalitatea:

$$I(0, T) \leqq \gamma^2 + \gamma \sup_{0 \leqq t \leqq T} \| u(t) \|, \tag{6.1}$$

în care $I(0, T)$ este dat de (1.2).

Definiția 2. Se va spune că sistemul (1.1) (1.2) este hiperstabil, dacă există o constantă δ pozitivă sau nulă, astfel încît orice soluție a ecuației (1.1) corespunzătoare condițiilor inițiale $u(0) = u_0$ și unei funcții arbitrare $x(t)$ din clasa $(I(u_0))$ verifică, oricare ar fi $t > 0$, inegalitatea:

$$\| u(t) \| \leqq \delta(\gamma + \| u(0) \|), \tag{6.2}$$

unde γ este constanta din (6.1). Dacă, în plus, $\lim_{t \to \infty} u(t) = 0$, se va spune că sistemul (1.1), (1.2) este asimptotic hiperstabil.

Se va presupune în cele ce urmează că matricea R este negativ semidefinită. De observat că o matrice R simetrică oarecare poate fi totdeauna prezentată sub forma $R = R_1 + R_2$, unde R_1 este o matrice simetrică negativ semidefinită, iar R_2, pozitiv semidefinită. Se vede cu ușurință că, dacă $x(t)$ aparține clasei $(I(u_0))$ pentru matricele $(A, B; P, Q, R)$, atunci aparține și clasei $(I_1(u_0))$ corespunzătoare matricelor $(A, B; P, Q, R_1)$. Astfel, ipoteza că matricea R este negativ semidefinită nu restrînge clasele de funcții $(I(u_0))$.

Vom menține ipoteza că perechea de matrice (A, B) este complet controlabilă și vom presupune, în plus, că și perechea (A', J') este complet controlabilă, unde J este matricea cu $m + n$ linii și n coloane:

$$J = \begin{pmatrix} Q \\ R \end{pmatrix}. \tag{6.3}$$

Condiția de mai sus, referitoare la perechea (A', J'), nu este decît o altă formulare a condiției ca perechea de matrice (J, A) să fie „complet observabilă" (vezi [8]). Aceasta mai este echivalent cu afirmația că nu există nici o soluție $u(t) = e^{At} u(0)$ a sistemului (1.1) (pentru $x = 0$), astfel încît să aibă loc simultan relațiile:

$$Q e^{At} u(0) = 0, \tag{6.4}$$

$$R e^{At} u(0) = 0 \tag{6.5}$$

Conținutul principal al prezentului punct este dat de următoarea teoremă :

Teorema 1. *În condițiile de mai sus, pentru ca sistemul (1.1), (1.2) să fie hiperstabil, este necesar și suficient să fie îndeplinită una dintre proprietățile echivalente din lema 1 și totodată să existe un interval* $(0, \Delta)$, *astfel încît toate valorile caracteristice* $s_k(\alpha)$ *ale matricei* $A - \alpha BQ$ *să verifice inegalitatea* $\operatorname{Re} s_k(\alpha) \leqq 0$ *pentru orice număr real* α *care satisface inegalitățile* :

$$0 < \alpha < \Delta. \tag{6.6}$$

Demonstrație. Introducem următoarele proprietăți :

I : „Sistemul (1.1), (1.2) este hiperstabil".

II : „Are loc proprietatea (A) din lema 1 și totodată există $\Delta > 0$, astfel încît toate valorile caracteristice $s_k(\alpha)$ ale matricei $A - \alpha BQ$ verifică inegalitatea-egalitate : $\operatorname{Re} s_k(\alpha) \leqq 0$ pentru orice α verificînd $0 < \alpha < \Delta$".

III : „Are loc proprietatea II de mai sus cu singura diferență că valorile caracteristice $s_k(\alpha)$ verifică inegalitatea strictă $\operatorname{Re} s_k(\alpha) < 0$ pentru $0 < \alpha < \Delta$.

IV : „Are loc proprietatea (Bb) din lema 1 și matricea M este negativ semidefinită".

V : „Are loc proprietatea IV de mai sus, cu singura diferență că matricea M este negativ definită (strict)".

Se va demonstra că, în condițiile teoremei 1, toate proprietățile de mai sus sînt echivalente. Echivalența dintre I și II reprezintă tocmai conținutul teoremei 1. Celelalte echivalențe au un caracter auxiliar și au fost introduse pentru ordonarea demonstrației. Ele pot fi utile și în sine în anumite probleme.

Proprietatea din II referitoare la matricea $A - \alpha BQ$ reprezintă, de fapt, o extensiune a proprietății de „stabilitate-limită", introdusă de M. A. Aizerman și F. R. Gantmaher [16].

Schema demonstrației echivalenței acestor proprietăți este următoarea :

$$\mathrm{I} \to \mathrm{II} \to \mathrm{III} \to \mathrm{IV} \to \mathrm{V} \to \mathrm{I}. \tag{6.7}$$

Se vor demonstra pas cu pas implicațiile din schema (6.7) :

Demonstrația implicației $\mathrm{I} \to \mathrm{II}$. Dacă proprietatea II nu este îndeplinită, atunci are loc unul dintre următoarele două cazuri (eventual ambele) :

Cazul 1°. Există un număr real ω_0 pentru care matricea $H(-i\omega_0, i\omega_0)$ (vezi (3.3)) există, dar nu este pozitiv semidefinită.

Cazul 2°. Oricare ar fi numărul $\Delta > 0$, există un număr $\alpha(\Delta)$ verificînd inegalitățile $0 < \alpha(\Delta) < \Delta$, astfel încît matricea $A - \alpha(\Delta) BQ$ are cel puțin o rădăcină s_k cu $\operatorname{Re} s_k > 0$.

Se va arăta că, în ambele cazuri, proprietatea I nu are loc. Într-adevăr, în cazul 1° există un vector constant v_0, diferit de zero, astfel încît :

$$\overline{v}_0' H(-i\omega_0, i\omega_0) v_0 < 0. \tag{6.8}$$

În virtutea continuității lui $H(\bar{s}, s)$ vom avea și inegalitatea

$$\bar{v}_0' H(\bar{s}, s)\, v_0 < 0, \tag{6.9}$$

unde $s = \varepsilon + i\omega_0$, cu ε pozitiv și suficient de mic. Se definește acum funcția de comandă particulară :

$$x_0(t) = v_0\, e^{st}. \tag{6.10}$$

Alegînd convenabil condițiile inițiale, sistemul (1.1) admite atunci soluția :

$$u_0(t) = (sE - A)^{-1} B\, v_0\, e^{st}. \tag{6.11}$$

Integrala $I(0, T)$ (1.2) capătă forma :

$$I(0, T) = \bar{v}_0' H(\bar{s}, s)\, v_0 \int_0^T e^{2\varepsilon t}\, dt. \tag{6.12}$$

și deci este negativă (vezi (6.9)). Funcția $x_0(t)$ (6.10) aparține deci clasei $(I(u_0))$, în timp ce soluția corespunzătoare (6.11) tinde către infinit cînd $t \to \infty$, întrucît $\operatorname{Re} s = \varepsilon > 0$. Ca urmare proprietatea de hiperstabilitate nu are loc.

Trecînd la examinarea cazului 2° se observă că, oricare ar fi $\Delta > 0$, există α din intervalul $0 < \alpha < \Delta$, astfel încît sistemul :

$$\frac{du}{dt} = Au - \alpha BQu \tag{6.13}$$

admite soluția :

$$u_0(t) = u(0)\, e^{st}, \quad \operatorname{Re} s > 0. \tag{6.14}$$

Definind funcția de comandă :

$$x_0(t) = -\alpha Q u_0(t), \tag{6.15}$$

se constată că și sistemul (1.1) admite soluția (6.14). Pentru valoarea particulară (6.15) a lui $x_0(t)$, integrala $I(0, T)$ are forma :

$$I(0, T) = \int_0^T \bar{u}_0'(t)\, \tilde{R}\, u_0(t)\, dt, \tag{6.16}$$

unde

$$\tilde{R} = R - 2\alpha Q'Q + \alpha^2 Q'PQ. \tag{6.17}$$

Alegînd pe Δ (deci și pe α) suficient de mic, rezultă că $\tilde{R}$ este o matrice negativ semidefinită. Într-adevăr, există $\beta > 0$ astfel încît să avem, pentru orice vector w inegalitatea :

$$w' Pw \leqq \beta \|w\|^2. \tag{6.18}$$

De aici și din (6.17) rezultă, pentru un vector v arbitrar :

$$v' \tilde{R} v \leqq v' Rv - (2\alpha - \alpha^2\beta) \|Qv\|^2. \tag{6.19}$$

Alegînd $\Delta < \frac{1}{\beta}$, aceeași inegalitate va fi verificată și de α (vezi (6.6)).

Întrucît, prin ipoteză, R este negativ semidefinit, rezultă atunci din (6.19) că și $\widetilde{R}$ are aceeași proprietate. Deci integrala (6.16) este negativă sau nulă, astfel încît funcția de comandă (6.15) aparține clasei $(I(u_0))$. Întrucît soluția corespunzătoare (6.14) tinde către infinit cînd $t \to \infty$, sistemul nostru nu este hiperstabil, concluzie care încheie demonstrația implicației I $\to$ II.

Demonstrația implicației II $\to$ III. Vom arăta că ipoteza : „II are loc în timp ce III nu are loc" conduce la o contradicție. Într-adevăr, construind ca mai sus sistemul (6.13), acesta ar admite o soluție de forma (6.14), cu

$$s = i\omega_0, \quad \omega_0 \text{ real.} \tag{6.20}$$

Definim ca mai sus funcția de comandă corespunzătoare (6.15). Întrucît are loc proprietatea (A) din lema 1, are loc și proprietatea echivalentă (Bd). Scriind relația (4.7) pentru $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ sau pentru T arbitrar dacă $\omega_0 = 0$ (astfel încît avem egalitatea $u(T) = u(0)$) și folosind și relația (6.16), se obține (vezi (1.2)) :

$$I(0, T) = \int_0^T \overline{u}_0' \widetilde{R} u_0 \, dt = \int_0^T \| Lu_0 + Kx_0 \|^2 \, dt. \tag{6.21}$$

Introducem acum matricele : $A(\alpha) = A - \alpha BQ$ și $J(\alpha) = \begin{pmatrix} Q \\ \widetilde{R} \end{pmatrix}$, (unde $\widetilde{R}$ este dat de (6.17)). Aceste matrice depind continuu de α și verifică egalitățile : $A(0) = A$, $J(0) = J$ (v. (6.3)). Întrucît, prin ipoteză, perechea (A', J') este complet controlabilă, există un număr Δ_0 astfel încît pentru $0 < \alpha < \Delta_0$ perechea $(A'(\alpha), J'(\alpha))$ este de asemenea complet controlabilă. Se alege Δ mai mic decît Δ_0 și, în același timp, suficient de mic pentru ca (după cum am procedat mai sus) matricea $\widetilde{R}$ (6.17) să fie negativ semidefinită. În acest caz, prima integrală din (6.21) este negativă sau nulă, iar a doua pozitivă sau nulă. Deci ambele trebuie să fie nule. Din faptul că prima integrală este nulă rezultă, întrucît $\widetilde{R}$ este negativ semidefinit :

$$\widetilde{R} u_0(t) = 0. \tag{6.22}$$

Scriind inegalitatea (6.19) pentru $v = u_0(t)$ și folosind faptul că matricea R este negativ, semidefinită, iar α verifică inegalitățile $0 < \alpha < \frac{1}{\beta}$, rezultă că egalitatea (6.22) poate avea loc numai dacă :

$$Qu_0(t) = 0. \tag{6.23}$$

Ecuațiile (6.23) și (6.22) sînt de tipul ecuațiilor (6.4) și (6.5) (în care se înlocuiește A cu $A(\alpha)$ și R cu $\widetilde{R}$) și, ca urmare, după cum am arătat, ele atrag concluzia că perechea (A', J') (în cazul nostru $(A'(\alpha), J'(\alpha))$ nu este complet controlabilă. Întrucît însă Δ a fost ales astfel încît

să aibă loc această proprietate, se obține o contradicție care demonstrează implicația noastră.

Demonstrația implicației III $\rightarrow$ IV. Întrucît are loc proprietatea (A) din lema 1, are loc și proprietatea (Bb). Se consideră relația (4.4) și se efectuează o transformare (F) cu $F = -\alpha Q$. Folosind formulele de transformare (2.1) și (4.8), se găsește că relația (4.4) capătă forma:

$$M(A - \alpha BQ) + (A - \alpha BQ)'M = (L - \alpha KQ)'(L - \alpha KQ) - \widetilde{R}, \quad (6.24)$$

unde $\widetilde{R}$ coincide cu (6.17) și deci este negativ semidefinit dacă α este suficient de mic. De aici, folosind și faptul că toate valorile caracteristice ale matricei $A - \alpha BQ$ au părțile reale negative, rezultă din (6.24), cu ajutorul teoremei cunoscute a lui Liapunov, că matricea M este negativ semidefinită, obținîndu-se astfel proprietatea IV.

Demonstrația implicației IV $\rightarrow$ V. Presupunem că proprietatea IV este satisfăcută și că proprietatea V nu este verificată, arătînd că de aici se obține o contradicție. Proprietatea (Bb) figurează în ambele proprietăți IV și V. Dacă matricea M nu ar fi negativ definită, atunci, întrucît este negativ semidefinită, ar exista un vector w diferit de zero, pentru care $Mw = 0$. Conform cu lema 1, întrucît este verificată proprietatea (Bb), are loc și (Bd). Scriind ecuația (4.7) pentru $x = 0$ și pentru $u(0) = w$, se obține:

$$\overline{u}'(T) M u(T) = \int_0^T \| Lu(t) \|^2 \, dt - \int_0^T \overline{u}'(t) Ru(t) \, dt, \quad (6.25)$$

unde

$$u(t) = e^{At} w. \quad (6.26)$$

Însă membrul drept din (6.25) este pozitiv sau nul, pentru că R este negativ semidefinit. Întrucît matricea M este negativ semidefinită, egalitatea (6.25) poate fi îndeplinită numai dacă fiecare membru al egalității este egal cu zero. Folosind iarăși faptul că matricea M este negativ semidefinită, se obține de aici, oricare ar fi $T > 0$:

$$Mu(T) = 0. \quad (6.27)$$

Trecînd acum la membrul drept al egalității (6.25) și scriind egalitatea lui cu zero, se vede că, întrucît R este negativ semidefinit, această egalitate poate avea loc numai dacă sînt îndeplinite simultan și identic în t egalitățile:

$$Lu(t) = 0, \quad (6.28)$$

$$Ru(t) = 0. \quad (6.29)$$

Din egalitatea (4.5) (care face parte din (Bb)) rezultă:

$$Q = K'L - B'M \quad (6.30)$$

și de aici, folosind (6.27) și (6.28):

$$Qu(t) = 0. \quad (6.31)$$

Însă relațiile (6.29) și (6.31), pentru $u(t)$ dat de (6.26), sînt de forma (6.4) (6.5). Ca urmare, după cum am văzut, ele contrazic ipoteza că perechea de matrice (A', J') este complet controlabilă și deci demonstrează implicația IV $\rightarrow$ V.

Demonstrația implicației V $\rightarrow$ I.

Întrucît are loc proprietatea (Bb), are loc și (Bd) (vezi lema 1). Ecuația (4.7), împreună cu condiția ca funcția $x(t)$ să aparțină clasei $(I(u_0))$ (vezi (6.1) și (1.2)) conduc la inegalitatea:

$$-\overline{u}'(T)\,M\,u(T) + \overline{u}'(0)\,M\,u(0) \leqq \gamma^2 + \gamma \sup_{0\leqq t\leqq T} \|u(t)\|. \tag{6.32}$$

Întrucît matricea M este negativ definită, există numerele pozitive β_1 și β_2, astfel încît:

$$\beta_1 \|u\|^2 \leqq -\overline{u}'\,Mu \leqq \beta_2 \|u\|^2, \qquad \beta_2 \geqq \beta_1 > 0. \tag{6.33}$$

De aici și din (6.32) rezultă:

$$\beta_1 \|u(T)\|^2 - \gamma \sup_{0\leqq t\leqq T} \|u(t)\| - (\gamma^2 + \beta_2 \|u(0)\|^2) \leqq 0. \tag{6.34}$$

Întrucît funcția $u(T)$ este continuă, fiind dat un număr T pozitiv arbitrar, există un număr τ verificînd inegalitățile $0 \leqq \tau \leqq T$, pentru care avem:

$$\|u(T)\| \leqq \|u(\tau)\| = \sup_{0\leqq t\leqq \tau} \|u(t)\|. \tag{6.35}$$

Scriind inegalitatea (6.34) pentru $T = \tau$ și folosind (6.35), se găsește:

$$\|u(T)\| \leqslant \frac{\gamma + \sqrt{\gamma^2 + 4\beta_1(\gamma^2 + \beta_2 \|u(0)\|^2)}}{2\beta_1}, \tag{6.36}$$

de unde rezultă imediat că are loc (6.2), unde δ poate fi luat egal cu:

$$\delta = \max\left(\frac{1 + \sqrt{\beta_1}}{\beta_1}, \sqrt{\frac{\beta_2}{\beta_1}}\right), \tag{6.37}$$

ceea ce încheie demonstrația teoremei 1.

Notă: În anexa E se demonstrează alte două proprietăți echivalente cu proprietățile I — V:

VI: „Matricea $H(\bar{s}, s)$ este pozitiv semidefinită pentru orice număr complex s cu partea reală pozitivă".

VII: „Are loc proprietatea (A) din lema 1. Totodată matricea A nu are valori caracteristice cu partea reală pozitivă, dar poate avea un număr de valori caracteristice cu partea reală nulă, în care caz divizorii elementari corespunzători sînt simpli, iar matricele formate cu reziduurile expresiei $Q(sE - A)^{-1}B$ în polii corespunzători acestor valori caracteristice sînt hermitice și pozitiv semidefinite".

Teorema 1 poate fi deci enunțată, mai complet, în modul următor:

Teorema 1'. *În condițiile arătate la începutul punctului 6, proprietățile I — VII sînt echivalente.*

7. PROPRIETĂȚI DE OPTIMALITATE ALE SISTEMELOR CANONICE

În continuarea prezentei lucrări vom folosi în mod esențial sistemul canonic construit la punctul 5.

Presupunem că perechea (A, B) este complet controlabilă și că este îndeplinită condiția (A) din lema 1 (sau una dintre condițiile echivalente). Se mai presupune că este îndeplinită condiția (5.1) și că polinomul invariant $\rho(-s, s)$ nu se anulează pentru $s = i\omega$ (ω real).

În aceste condiții, definim clasa (Ω) a funcțiilor $x(t)$ continue pe porțiuni având proprietatea că soluțiile corespunzătoare ale sistemului (1.1), pentru $u(0)$ dat, tind către zero pentru $t \to \infty$.

Se pune problema ca, fiind dată o condiție inițială $u(0)$ pentru soluțiile sistemului (1.1), să se determine funcția de comandă $x(t)$ din clasa (Ω) în așa fel, încît integrala $I(0,\infty)$ (vezi (1.2), unde $T = \infty$) să fie minimă [3], [4], [5], [6], [7]. Această problemă admite următoarea soluție :

Teorema 2. *În condițiile de mai sus, există o funcție de comandă unică $x(t)$ din clasa (Ω), care realizează minimul integralei $I(0,\infty)$, și această funcție este legată de soluția corespunzătoare $u(t)$ a sistemului (1.1) prin relația (independentă de condițiile inițiale $u(0)$, pentru care se pune problema)* :

$$x(t) = -K^{-1} L u, \tag{7.1}$$

unde K și L sînt matricele care intervin în proprietatea (B) (vezi lema 1). Valoarea minimă a integralei $I(0,\infty)$ este :

$$I(0,\infty) = \overline{u}'(0)\, M\, u(0). \tag{7.2}$$

Demonstrația teoremei 2 este aproape imediată, dacă se aplică transformarea (F) particulară care aduce sistemul la forma canonică (vezi punctul 5). Clasa (Ω_c) a funcțiilor de comandă canonice $x_c(t)$, pentru care $\lim_{t \to \infty} u(t) = 0$, se obține din clasa (Ω) cu ajutorul formulei (5.6), care permite și trecerea inversă. După cum s-a arătat la punctul 5, în condițiile teoremei 2, soluția banală a sistemului canonic omogen este asimptotic stabilă. Deci funcția de comandă particulară $x_c(t) = 0$ (vezi (5.4) și (5.6)) aparține clasei (Ω_c). Întrucît integrala asociată capătă forma (5.7) și întrucît pentru toate funcțiile de comandă din clasa (Ω_c) avem $\lim_{t \to \infty} u(t) = 0$, rezultă imediat că integrala $I(0,\infty)$ este minimă dacă $x_c(t) = 0$ și că valoarea minimă este dată de (7.2). Trecînd la clasa (Ω) și folosind relația (5.6), se vede imediat că funcției de comandă optimale $x_c(t) = 0$ îi corespunde funcția de comandă (7.1) și că pentru orice altă funcție de comandă din clasa (Ω) valoarea integralei $I(0,\infty)$ este mai mare decît valoarea minimă dată de (7.2).

Dacă se substituie relația (7.1) în ecuația (1.1), se obține un sistem liniar, omogen : „sistemul optimal". Din cele de mai sus rezultă că sistemul optimal este unic și coincide cu „sistemul canonic omogen" definit la

punctul 5. De aici rezultă o demonstrație a unicității sistemului canonic, în condițiile din prezentul paragraf.

Subliniem că în teorema 2 nu intervine condiția, cerută de obicei, că integrandul din (1.2) să fie o formă patratică pozitiv semidefinită, ci condiția mai generală ca matricea $H(-i\omega, i\omega)$ să aibă proprietatea (A) din lema 1.

8. REGIMURILE-LIMITĂ ALE SISTEMELOR HIPERSTABILE

Introducerea sistemului canonic permite efectuarea cu ușurință a unui studiu mai precis al comportării unui sistem hiperstabil. Vom presupune în cele ce urmează că sînt îndeplinite condițiile din teorema 1 (deci că sistemul studiat este hiperstabil) și, în plus, că este îndeplinită și condiția (5.1), care permite construirea sistemului canonic ca la punctul 5. Vom studia comportarea soluțiilor sistemului nostru pentru condiții inițiale date. Întrucît sistemul se presupune hiperstabil, rezultă că soluția $u(t)$ este mărginită (vezi (6.2)). De aici, din inegalitatea (6.1) și din expresia canonică a integralei $I(0, T)$ (5.7), rezultă că funcțiile de comandă canonice $x_c(t)$ verifică condiția:

$$\int_0^T \|x_c(t)\|^2 \, dt \leqslant \text{const.}, \tag{8.1}$$

la stabilirea căreia am folosit și faptul că matricea P este pozitiv definită (strict), ceea ce rezultă din condițiile din teorema 1 și din condiția (5.1). Astfel studiul mai precis al comportării soluțiilor unui sistem hiperstabil se reduce la studiul sistemului canonic pentru funcții de comandă făcînd parte din L_2 (verificînd inegalitatea (8.1)).

Făcînd apel la lema lui I. Barbălat [19], se demonstrează cu ușurință că, dacă soluția banală a sistemului canonic omogen este asimptotic stabilă, atunci toate soluțiile sistemului canonic neomogen tind către zero cînd $t \to \infty$, oricare ar fi funcția de comandă $x_c(t)$ continuă pe porțiuni și verificînd inegalitatea (8.1). Folosirea condițiilor stabilite la punctul 5, care asigură faptul că soluția banală a sistemului canonic omogen este asimptotic stabilă, ne conduce astfel la următoarea teoremă:

Teorema 3. *Dacă sînt îndeplinite condițiile de hiperstabilitate din teorema 1 și dacă matricea P și matricea $H(-i\omega, i\omega,)$ (ω real, arbitrar) sînt nesingulare, atunci sistemul (1.1) (1.2) este* asimptotic *hiperstabil*

Examinăm acum cazul mai general în care păstrăm condițiile de mai sus, cu singura diferență că admitem posibilitatea ca matricea $H(-i\omega, i\omega)$ să fie singulară pentru ω real. În acest caz, există cel mult un număr finit de valori reale ω_k pentru care $\det H(-i\omega_k, i\omega_k) = 0$. Pentru fiecare dintre aceste valori, după cum rezultă din observație 1° de la sfîrșitul punctului 4 și din dezvoltările de la punctul 5, sistemul canonic omogen admite cel puțin o soluție periodică de forma

$$u(t) = u_k e^{i\omega_k t}, \tag{8.2}$$

unde u_k este un element al unei anumite mulțimi de vectori complecși M_k. În general, M_k este mulțimea elementelor de forma : $\sum q_j u_j$, în care q_j sînt numere complexe arbitrare, iar u_j anumiți vectori constanți. Eventual, pot exista și soluții conținînd factori polinomiali în t, care însă nu prezintă importanță pentru proprietățile calitative care ne interesează, datorită, în ultimă analiză, faptului că sistemul studiat este hiperstabil și deci soluțiile $u(t)$ sînt mărginite.

În aceste condiții, se demonstrează că soluțiile $u(t)$ ale sistemului canonic pentru funcții de comandă care verifică (8.1) au proprietatea următoare :

Proprietatea 2. Oricare ar fi numărul pozitiv ε, există un număr $T(\varepsilon)$ astfel, încît pentru orice $T > T(\varepsilon)$ să putem găsi cîte un element u_k din fiecare dintre mulțimile M_k, definite mai sus, cu proprietatea că în intervalul :

$$T < t < T + 1 \tag{8.3}$$

este verificată inegalitatea :

$$\| u(t) - \Sigma u_k e^{i\omega_k t} \| < \varepsilon. \tag{8.4}$$

Observațiile de mai sus permit să aducem teoremei 3 următoarea completare :

Teorema 3′. *Dacă matricea $H(-i\omega, i\omega)$ este singulară pentru unele valori reale ale lui ω și dacă celelalte condiții din teorema 3 continuă să rămînă îndeplinite, atunci soluțiile sistemului (1.1) pot fi împărțite în două clase. Prima clasă conține numai soluții care tind către zero cînd $t \to \infty$ iar a doua numai soluții care tind către soluțiile periodice ale sistemului canonic omogen, în sensul „proprietății 2", definită mai sus.*

Eliminînd din clasa funcțiilor de comandă ($I(u_0)$) funcțiile care corespund soluțiilor din clasa a doua (vezi teorema 3′), se obțin condiții generale de hiperstabilitate asimptotică.

Soluțiile din clasa a doua, puse în evidență în teorema 3′, pot fi considerate drept regimuri-limită, situate la granița dintre stabilitate și nestabilitate. Rezultatele de mai sus arată că sistemul canonic definit la punctul 5 este strîns legat de regimurile-limită, acestea fiind soluții ale sistemului canonic omogen.

9. Dezvoltările de la începutul prezentei lucrări, care au condus la împărțirea sistemelor studiate în clase de echivalență, la identificarea unor mărimi invariante și la punerea în evidență a unor sisteme canonice în cadrul acestor clase de echivalență, au permis, după cum am văzut, tratarea cu mijloace unitare două probleme distincte : problema hiperstabilității și problema determinării sistemelor optimale în sensul minimizării integralei unei forme patratice, generalizînd la cazul mai multor funcții de comandă o serie de rezultate cunoscute și obținînd unele rezultate care rămîn noi și după particularizarea la cazul unei singure funcții de comandă.

Sensul fizic net diferit al celor două probleme tratate face utilă reexaminarea lor comparată, făcînd abstracție de detalii, în scopul de a

scoate în evidenţă elementele care au permis tratarea lor unitară. Dacă unitatea celor două probleme rezultă încă din lucrarea [6] a lui Kalman, substratul acestei unităţi apare cu claritate făcînd apel la egalitatea (4.7), care, în tratarea din prezenta lucrare, joacă un rol fundamental în ambele probleme. În problema determinării sistemului optimal, egalitatea (4.7) este folosită pentru a obţine o evaluare a integralei din membrul stîng, a cărei valoare, pentru $T \to 8$, trebuie să fie minimă. În problema hiperstabilităţii, se presupune de la început că această integrală este mărginită (vezi (6.1)), iar egalitatea (4.7) este folosită pentru a deduce o evaluare a mărimii $\| u(T) \|$, care trebuie să rămînă mărginită.

Pentru sistemul canonic omogen, definit la punctul 5, este caracteristic faptul că integrala din membrul drept al egalităţii (4.7) este nulă. De aici rezultă rolul important, dar totodată, într-un anumit sens, opus pe care îl joacă sistemul canonic în cele două probleme. Într-adevăr, în cazul problemei de optimalitate, sistemul canonic omogen coincide cu sistemul optimal şi, în consecinţă, conţine cele mai bune soluţii din punctul de vedere al criteriului de optimalitate admis. Dimpotrivă, în cazul problemei hiperstabilităţii, anularea integralei din membrul drept al expresiei (4.7) conduce la cel mai puţin bune evaluări ale lui $\| u(T) \|$ şi, prin urmare, sistemul canonic omogen conţine cele mai defavorabile soluţii, care se abat în cea mai mare măsură de la stabilitate. În particular, acest sistem conţine „regimurile-limită" examinate la punctul 8.

Nu este necesar să mai subliniem marele număr de probleme noi care se ridică în legătură cu rezultatele din prezenta lucrare. Unele dintre acestea, ca, de exemplu, construirea sistemului canonic în condiţii generale (cu implicaţiile respective în ceea ce priveşte problemele de optimalitate şi hiperstabilitate), precum şi construirea analogului discret al rezultatelor din lucrare, sînt rezolvate în momentul de faţă şi n-au putut fi incluse aici decît datorită lipsei de spaţiu[3]). Din totalitatea problemelor noi care apar, continuarea studiului claselor de echivalenţă stabilite în lucrare şi extensiunea teoriei la alte tipuri de sisteme par a prezenta cele mai largi perspective.

ANEXA A

Dacă perechea (A, B) nu este complet controlabilă, ea poate fi adusă la forma (3.2). Atunci $\det (sE - A - BF)$ are totdeauna ca factor pe $\det (sE_3 - A_3)$[4]), cu rădăcini fixe, independente de F. Deci proprietatea 1 nu are loc.

Presupunem acum că perechea (A, B) este complet controlabilă. Examinăm mai întîi cazul în care există un vector v, astfel încît perechea (A, Bv) să fie complet controlabilă. Se ştie

[3]) Aceste probleme sînt tratate pe scurt în versiunea prezentului articol publicată în „Rev. Roum. Sci. Techn.—electrotehnique et énergetique" **9**, *4*, 1964, unde sînt date totodată alte demonstraţii ale rezultatelor din anexele B şi E de mai jos, precum şi demonstraţiile rezultatelor enunţate la punctul 8 al prezentei lucrări.

[4]) E_3 este matricea-unitate cu aceleaşi dimensiuni ca A_3.

(vezi de exemplu [2], [8]) că există atunci o transformare S care aduce simultan matricea A și vectorul Bv la forma:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_n \end{pmatrix} \qquad Bv = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{A.1}$$

Fie $F = vf'$, unde f este un vector cu componentele $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$. De aici și din (A.1) rezultă imediat că polinomul caracteristic al matricei $A + BF = A + Bvf'$ este egal cu $s^n + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k + \varphi_k) s^{k-1}$. Alegînd convenabil mărimile φ_k (deci matricea F), polinomul caracteristic poate avea, prin urmare, orice coeficienți, dați dinainte.

În cazul general, există cel puțin o coloană a lui B conținînd un element diferit de zero. Putem presupune că această coloană este prima, întrucît o permutare oarecare a coloanelor, lui B, însoțită de o permutare corespunzătoare a liniilor lui F, lasă matricea $A + BF$ neschimbată. Cum coloana considerată nu formează, în general, împreună cu A o pereche complet controlabilă, există o transformare S care aduce matricele A și B la forma:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix} \qquad \tilde{B} = \begin{pmatrix} b_1 & B_2 \\ 0 & B_3 \end{pmatrix}, \tag{A.2}$$

unde b_1 este un vector și perechea (A, b_1) este complet controlabilă. Matricea B_3 are cel puțin un element diferit de zero, pentru că altfel (A.2) ar fi de forma (3.2) și deci perechea (A, B) nu ar fi complet controlabilă. Întregul proces de mai sus poate fi deci repetat pentru matricele A_3 și B_3. Continuînd aplicarea aceluiași proces, după un număr finit de pași, matricele A și B se aduc la forma:

$$\tilde{\tilde{A}} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & A_{1j} \\ 0 & A_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & A_{2j} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & A_{jj} \end{pmatrix},$$

$$\tilde{\tilde{B}} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdot & \cdot & b_{1j} & \cdot & b_{1m} \\ 0 & b_{22} & \cdot & \cdot & b_{2j} & \cdot & b_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & b_{jj} & \cdot & b_{jm} \end{pmatrix}, \qquad (m \geqq j)$$

unde toate perechile (A_{ii}, b_{ii}) sînt complet controlabile. Alegînd matricea F de forma:

$$F = \begin{pmatrix} f_1' & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & f_2' & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & f_j' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(cu ultimele $m - j$ linii egale cu zero), în care f_i sînt vectori de aceeaşi dimensiune ca şi b_{ii} se vede imediat că det $(sE - \tilde{\tilde{A}} - \tilde{\tilde{B}}F)$ se reduce la produsul factorilor de forma det $(sE_i - A_{ii} - b_{ii} f_i')$, unde E_i este matricea unitate de aceeaşi dimensiune ca şi A_{ii}. Însă pentru fiecare asemenea factor este valabil raţionamentul anterior, ceea ce, întrucît toate transformările efectuate mai sus sînt inversabile, termină demonstraţia proprietăţii 1.

ANEXA B

1°. Se va demonstra mai întîi că, dacă matricea $A + BF$ are valori caracteristice distincte, atunci are loc relaţia:

$$\det\,(E_m + F\,(sE - A - BF)^{-1}\,B) = \frac{\pi\,(s)}{\det\,(sE - A - BF)}, \tag{B.1}$$

unde $\pi\,(s)$ este un polinom de forma:

$$\pi\,(s) = s^n + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\, s^{n-k}. \tag{B.2}$$

Într-adevăr, în acest caz există o matrice nesingulară T, astfel încît:

$$T^{-1}\,(A + BF)\,T = \operatorname{diag}\,(s_k). \tag{B.3}$$

Elementele $\varkappa_{ij}$ ale matricei din membrul stîng al expresiei (B.1) sînt date de sumele:

$$\chi_{ij} = \sum_{k=0}^{n} \gamma_{ij}\;(k), \tag{B.4}$$

unde:

$$\gamma_{ij}\,(k) = \begin{cases} 0 \text{ pentru } k = 0 \text{ şi } i \neq j \\ 1 \text{ pentru } k = 0 \text{ şi } i = j \\ \dfrac{\varphi_{ik}\,\beta_{kj}}{s - s_k} \text{ pentru } k \neq 0, \end{cases} \tag{B.5}$$

φ_{ik} şi β_{kj} fiind elementele matricelor FT, respectiv $T^{-1}B$. Determinantul acestei matrice poate fi scris sub forma sumei:

$$\det\,(\chi_{ij}) = \sum_{p=1}^{(n+1)^2} \det(\gamma_{ij}\;(k_j^p)), \tag{B.6}$$

unde k_j^p sînt numere întregi cuprinse între zero şi n (inclusiv), iar det $(\gamma_{ij}\;(k_j^p))$ reprezintă determinantul matricei avînd elementul de pe linia i şi coloana j egal cu $\gamma_{ik}(k_j^p)$. Este uşor de văzut că toţi determinanţii din suma (B.6) pentru care există două numere $j = j_1$ şi $j = j_2$, astfel încît $k_{j_1}^p = k_{j_2}^p \neq 0$, au coloanele j_1 şi j_2 proporţionale şi deci sînt egali cu zero. În consecinţă, după aducerea sumei (B.6) la acelaşi numitor, numitorul comun va conţine cel

mult produsul tuturor elementelor $(s - s_k)$ la puterea întîi. Deci determinantul se poate scrie sub forma (B.1). Făcînd $s \to \infty$, se vede că $\pi(s)$ trebuie să aibă forma (B.2).

2°. Demonstrăm acum că, dacă ansamblul valorilor caracteristice ale matricei A și ale matricei $A + BF$ nu conține două numere egale, atunci are loc egalitatea (3.7) din text. Într-adevăr, fie s_0 o valoare caracteristică oarecare a lui A. Există atunci $v_0 \neq 0$, astfel încît $v_0'(s_0E - A) = 0$. Totodată $v_0' B \neq 0$, pentru că altfel am avea și $v_0' (s_0 E - A - BF) = 0$ și deci s_0 ar fi și o valoare proprie pentru $A + BF$, contrar ipotezei. Din (3.6) rezultă atunci: $v_0' B (E_m + F (s_0E - A - BF)^{-1} B) = 0$. Deci determinantul din membrul stîng al egalității (B.1) se anulează pentru $s = s_0$, ceea ce atrage $\pi (s_0) = 0$. Repetînd acest raționament pentru toate valorile proprii ale matricei A și ținînd seama de faptul că $\pi (s)$ este de forma (B.2), se găsește $\pi (s) = \det (sE - A)$, de unde (vezi (3.5)) rezultă (3.7).

3°. Arătăm, în sfîrșit, că egalitatea (3.7) este valabilă și în cazul general. Într-adevăr, în cazul contrar ar exista un număr s_0 care nu coincide cu nici o valoare proprie a matricei $A + BF$ și pentru care valoarea absolută a diferenței dintre cei doi membri din (3.7) este mai mare decît o constantă pozitivă. Din construcția din anexa A rezultă însă că, fiind date matricele A, B și F, oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există matricile F_1 și F_2 cu elemente mai mici decît ε ansamblul valorilor caracteristice ale matricilor $A + BF_1$ și $A + B (F + F_1 + F_2)$ să nu conțină două numere egale. În consecință, egalitatea (3.7) are loc dacă se înlocuiește A cu $A + BF_1$ și F cu $F + F_2 - F_1$. Cum pentru valoarea $s = s_0$, care nu este valoare proprie a matricei $A + BF$, ambii membri ai egalității (3.7) depind continuu de elementele matricelor A și F (vezi și (3.5)), rezultă o contradicție care demonstrează formula (3.7) în cazul general.

ANEXA C

Calculînd determinantul expresiei (3.4) și folosind (3.7), se găsește:

$$\det (zE - \widetilde{A}) \det \widetilde{H} (z, s) \det (sE - \widetilde{A}) = \det (zE - A) \det H (z, s) \det (sE - A), \qquad (C.1)$$

de unde rezultă invarianța expresiei (3.8), notate cu $\rho (z, s)$. Se consideră acum o transformare particulară F avînd proprietatea că matricele A și $A + BF$ nu au nici o valoare proprie comună (ceea ce se poate asigura în virtutea propoziției 1). Direct din expresia generală a lui $H (z, s)$ (3.3), se găsesc formulele:

$$\det H (z, s) = \frac{\pi (z, s)}{\det^m (zE - A) \det^m (sE - A)}, \qquad (C.2)$$

$$\det \widetilde{H} (z, s) = \frac{\widetilde{\pi} (z, s)}{\det^m (zE - A) \det^m (sE - \widetilde{A})}. \qquad (C.3)$$

unde $\pi (z, s)$ și $\widetilde{\pi} (z, s)$ sînt polinoame de grad maxim nm atît în s, cît și în z. Confruntînd relațiile (C.2) și (C.3) cu (C.1), se obține:

$$\widetilde{\pi} (z, s) = \frac{\det^{m-1} (zE - A - BF) \pi (z, s) \det^{m-1} (sE - A - BF)}{\det^{m-1} (zE - A) \det^{m-1} (sE - A)} \qquad (C.4)$$

şi, cum A şi $A + BF$ nu au valori caracteristice comune, iar $\tilde{\pi}(z, s)$ este un polinom, rezultă că polinomul $\pi(z, s)$ trebuie să fie de forma:

$$\pi(z, s) = \rho(z, s) \det^{m-1}(zE - A) \det^{m-1}(sE - A), \tag{C.5}$$

unde $\rho(z, s)$ este un polinom de grad maxim n atît în s, cît şi în z. Substituind această relaţie în (C.2), se obţine relaţia căutată (3.9).

ANEXA D

1°. Menţionăm de la început că simbolurile folosite în această anexă au alte semnificaţii decît în restul lucrării. Acest lucru nu poate provoca vreo confuzie, deoarece anexa D nu este legată de restul lucrării decît prin intermediul propoziţiei 4 de mai jos.

Se vor demonstra următoarele propoziţii:

Propoziţia 3. *Dacă matricea $(m \times m)$: $G(z)$, ale cărei elemente, înmulţite cu z^n, sînt polinoame cu coeficienţi reali, este pozitiv definită (strict) pentru $|z| = 1$ şi dacă verifică egalitatea:*

$$G(z) = G'\left(\frac{1}{z}\right), \tag{D.1}$$

atunci există o matrice $D(z)$ ale cărei elemente sînt polinoame cu coeficienţi reali, astfel încît:

$$G(z) = D'\left(\frac{1}{z}\right) D(z) \tag{D.2}$$

şi totodată:

$$\det D(z) \neq 0 \text{ pentru } |z| \leqq 1. \tag{D.3}$$

Propoziţia 4. *Dacă matricea $G(z)$ verifică toate condiţiile din propoziţia 3, cu singura diferenţă că $G(z)$ este pozitiv semidefinită, atunci există matricea $D_0(z)$ verificînd condiţiile din propoziţia 3, cu singura diferenţă că, în locul condiţiei (D.3), intervine condiţia:*

$$\text{sau } \det D_0(z) \equiv 0, \quad \text{sau } \det D_0(z) \neq 0 \text{ pentru } |z| < 1. \tag{D.4}$$

Se observă că din propoziţia 4 rezultă propoziţia 2 din text. Într-adevăr, fiind dat polinomul $P(s)$ cu proprietăţile din propoziţia 2, se poate defini:

$$G(z) = P\left(\frac{1 - z}{1 + z}\right)\left(\frac{1 + z}{2}\right)^{2n} \frac{1}{z^n}, \tag{D.5}$$

unde $2n$ este gradul maxim al elementelor lui $P(s)$. Matricea $G(z)$ (D.5) are toate proprietăţile din propoziţia 4. Există deci matricea $D_0(z)$ cu proprietăţile din propoziţia 4. Definind:

$$Y(s) = D_0\left(\frac{1 - s}{1 + s}\right)(1 + s)^n,$$

se vede că această matrice verifică toate proprietăţile din propoziţia 2, a cărei demonstraţie este astfel redusă la demonstraţia propoziţiei 4. Aceasta din urmă se demonstrează pe baza propoziţiei 3.

2°. Demonstrăm propoziția 3. Întrucît $G(z)\,z^n$ este o matrice de polinoame, există matricele de polinoame $P(z)$, $Q(z)$ și $R(z)$, astfel încît (vezi [20]):

$$G(z)\,z^n = P(z)\,Q(z)\,R(z). \tag{D.6}$$

Totodată, matricele $P(z)$ și $R(z)$ au determinanții constanți și diferiți de zero, iar $Q(z)$ este o matrice diagonală. Întrucît $G(z)$ este strict pozitiv definit pentru $|z| = 1$, rezultă $\det Q(Z \neq 0$ pentru $|z| = 1$. Ca urmare, se poate scrie:

$$Q(z) = Q_\infty(z)\,Q_0(z), \tag{D.7}$$

unde $Q_\infty(z)$ și $Q_0(z)$ sînt matrici diagonale de polinoame, verificînd condițiile: $\det Q_\infty(z) \neq 0$ pentru $|z| \geqq 1$ și $\det Q_0(z) \neq 0$ pentru $z \leqq 1$.

La demonstrarea propoziției 3, și numai în acest punct, vom folosi următoarea convenție:

CONVENȚIA 1. Cu simbolurile $X(z)$ și $Y(z)$ se notează matrice ale căror elemente sînt polinoame și care au determinantul diferit de zero pentru $|z| \geqq 1$. Cu simbolurile $A(z)$, $B(z)$ și $C(z)$ se notează matrice ale căror elemente sînt polinoame și al căror determinant, este diferit de zero pentru $z \leqq 1$.

Consecvent cu această convenție, $X\left(\frac{1}{z}\right)$ reprezintă, de exemplu, o matrice ale cărei elemente sînt polinoame în $\frac{1}{z}$ și al cărei determinant nu se anulează pentru $\left|\frac{1}{z}\right| \geqq 1$ (deci pentru $|z| \leqq 1$, dacă $z \neq 0$).

Cu această convenție, putem scrie, pe baza relațiilor (D.6) și (D.7):

$$G(z)\,z^n = X(z)\,A(z), \tag{D.8}$$

unde

$$X(z) = P(z)\,Q_\infty(z), \tag{D.9}$$

$$A(z) = Q_0(z)\,R(z). \tag{D.10}$$

3°. Se vor introduce acum cîteva mărimi auxiliare. Matricea $X(z)$ din (D.8) poate fi scrisă sub forma:

$$X(z) = (x_1(z) \quad x_2(z) \ldots x_m(z)), \tag{D.11}$$

unde $x_i(z)$, $i = 1, 2, \ldots m$ reprezintă vectori-coloană. Coloanele $x_i(z)$ au cel puțin cîte un element diferit de zero, întrucît $\det G(z) \not\equiv 0$ pentru $|z| = 1$.

Definim numerele întregi și pozitive sau nule: $n_1, n_2 \ldots n_m$ atașate matricii $X(z)$, astfel încît să avem:

$$x_i(z) = a_i\,z^{n_i} + b_i\,z^{n_i-1} + \ldots + q_i\,z^{n_i-m_i},$$

$$i = 1, 2, \ldots m, \tag{D.12}$$

unde $a_i, b_i, \ldots, q_i$ sînt vectori constanți. Cu aceste elemente definim matricea $F_x(y)$, atașată matricei $X(z)$, astfel încît elementele de pe coloana i formează vectorul:

$$[F_X(y)]_i = a_i + b_i y + \ldots q_i\,y^{m_i},$$

$$i = 1,2 \ldots m. \tag{D.13}$$

Avem, evident (vezi (D.11), (D.12), (D.13)):

$$X(z) = F_X\left(\frac{1}{z}\right)\operatorname{diag}(z^{n_1}, z^{n_2}, \ldots z^{n_m}). \tag{D.14}$$

Din proprietățile matricei $X(z)$ (vezi convenția 1) rezultă că determinantul matricei $F(z)$ nu are alte zerouri în cercul $|z| \leqq 1$ afară de, eventual, originea $z = 0$. Ca urmare, determinantul matricei :

$$F_X(0) = (a_1\ a_2\ \ldots\ a_m), \tag{D.15}$$

poate fi nul. Dacă însă $\det F_X(0) \neq 0$, atunci determinantul matricei $F_X(z)$ nu se anulează pentru $|z| \leqq 1$, astfel încît, folosind convenția 1, se poate introduce notația :

$$C_X(z) = F_X(z), \quad \text{dacă } \det F_X(0) \neq 0. \tag{D.16}$$

4°. Fiind dată o matrice de polinoame $K(z)$ de determinant constant și diferit de zero) se poate scrie relația (D.8), utilizînd și convenția 1, sub forma :

$$G(z)\, z^n = Y(z)\, B(z), \tag{D.17}$$

unde

$$Y(z) = X(z)\, K(z), \tag{D.18}$$

$$B(z) = K^{-1}(z)\, A(z). \tag{D.19}$$

Se va arăta că se poate alege matricea $K(z)$ în așa fel, încît determinantul matricei $F_Y(0)$ (construită ca la punctul 3°, cu formula (D.15), dar înlocuind matricea $X(z)$ (D.11) cu matricea Y (D.18)) să fie diferit de zero. Matricea $K(z)$ se poate construi cu ajutorul unei idei care aparține lui N. I. Mushelișvili (vezi [18]) : Presupunem că $\det F_X(0) = 0$. Există atunci un vector r de componente $(\rho_1, \rho_2, \ldots \rho_m)$, nu toate nule, astfel încît $F_X(0) \cdot r = 0$ sau (vezi (D.15)) :

$$\sum_{i=1}^{m} \rho_i\ a_i = 0. \tag{D.20}$$

Se poate presupune că $\rho_1 \neq 0$ și că numerele n_i introduse la punctul 3° verifică inegalitatea :

$$n_1 \geqq n_i \quad \text{pentru orice } i \text{ pentru care } \rho_i \neq 0. \tag{D.21}$$

Într-adevăr, această situație se poate totdeauna realiza efectuînd în prealabil o transformare de forma (D.18), (D.19), cu o matrice $K(z)$ convenabil aleasă, care realizează o permutare a coloanelor matricei X. În această situație, se aplică o transformare de forma (D. 17) (D.18) (D.19), cu ajutorul matricii :

$$K(z) = \begin{Bmatrix} \rho_1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ \rho_2 \cdot z^{n_1 - n_2} & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ \rho_3 \cdot z^{n_1 - n_3} & 0 & 1 & . & . & . & 0 \\ . \ . \ . & . & . & . & . & . & . \\ \rho_m \cdot z^{n_1 - n_m} & 0 & 0 & . & . & . & 1 \end{Bmatrix},$$

având determinantul egal cu ρ_1, deci constant și diferit de zero. Întrucît este verificată condiția (D.21), $K(z)$ este o matrice de polinoame. Aplicînd această transformare, toate coloanele matricei transformate $Y(z)$ (vezi (D.18)) sînt identice cu coloanele corespunzătoare ale matricei $X(z)$, exceptînd coloana întîi, care capătă forma :

$$y_1(z) = \sum_{i=1}^{m} \rho_i\, a_i\, z^{n_1} + \sum_{i=1}^{m} \rho_i\, b_i\ z^{n_1 - 1} + \ldots$$

Întrucît primul termen din membrul drept este nul (vezi (D.20)) numărul n_1, definit ca la punctul 3° pentru coloana întîi a matricei $Y(Z)$, este mai mic sau cel mult egal cu $n_1 - 1$. Celelalte numere n_i rămîn neschimbate. Repetînd acest procedeu, se micșorează succesiv cu

cel puțin cîte o unitate cîte unul dintre numerele n_i. Cum numerele n_i sînt întregi și pozitive, procesul nu se poate repeta de mai mult decît $\sum_{i=1}^{m} n_i$ ori, în cazul -limită toate numerele n_i devenind zero.

Presupunem că relația (D.17) este obținută după ce s-a repetat procedeul descris mai sus de numărul de ori maxim posibil. În acest caz, procesul nu mai poate continua deoarece sau determinantul matricei $F_Y(0)$ devine diferit de zero, sau toate numerele n_i devin egale cu zero. În ultimul caz, matricea $Y(z)$, obținută în urma acestor transformări, este constantă (egală deci cu $F_Y(0)$) și nesingulară (pentru că $\det G(z) \neq 0$ pentru $|z| = 1$), astfel încît se obține și de astă dată condiția $\det F_Y(0) \neq 0$. Aceasta ne îndreptățește să folosim notația (D.16) și să scriem relația (D.14) (pentru X înlocuit cu Y) sub forma :

$$Y(z) = C_Y\left(\frac{1}{z}\right) \text{diag.}\,(z^{n_1},\ z^{n_2},\ \ldots\ z^{n_m}). \tag{D.22}$$

5°. Relația (D.17) obținută în urma procesului descris la punctul 4°, scrisă într-o formă puțin diferită, reprezintă tocmai factorizarea căutată (D.2). Analiza care urmează are ca scop doar de a pune în evidență acest lucru. În acest sens se va arăta în primul rînd că numerele n_i care intervin în (D.22) verifică egalitățile :

$$n_i = n, \quad i = 1,\ 2,\ \ldots\ m. \tag{D.23}$$

Într-o primă etapă se va arăta că :

$$n_i - n \leqq 0 \quad \text{pentru } i = 1,\ 2,\ \ldots\ m. \tag{D.24}$$

Introducem în acest scop mărimea auxiliară :

$$S(z) = B(z)\,[C'_y(z)]^{-1}\ \text{diag}\ (z^{n_1-n},\ z^{n_2-n},\ \ldots\ z^{n_m-n}). \tag{D.25}$$

Pentru $|z| = 1$, această mărime este egală cu :

$$S(z) = T'\left(\frac{1}{z}\right) G(z)\ T(z),\ |z| = 1, \tag{D.26}$$

unde :

$$T(z) = [C'_y(z)]^{-1}\ \text{diag}\ (z^{n_1-n},\ \ldots\ z^{n_m-n}). \tag{D.27}$$

Într-adevăr, pentru $|z| = 1$, matricea $Y(z)$ este nesingulară, astfel încît se obține din (D.17) :

$$B(z) = Y^{-1}(z)\,G(z)\,z^n,\ |z| = 1. \tag{D.28}$$

Folosind relația (D.22), se obține :

$$B(z) = z^n\ \text{diag}\ (z^{-n_1},\ z^{-n_2},\ \ldots\ z^{-n_m}) C_Y^{-1}\left(\frac{1}{z}\right) G(z), \tag{D.29}$$

relație care, înlocuită în (D.25), conduce la (D.26) și (D.27).

Întrucît pentru $|z| = 1$ matricea $T(z)$ (D.27) este nesingulară, iar matricea $G(z)$ este, prin ipoteză, pozitiv definită, rezultă din (D.26) că pentru orice vector g diferit de zero avem :

$$g'S(z)\,g > 0, \qquad |z| = 1, \tag{D.30}$$

expresia din membrul stîng fiind și reală.

Presupunem acum că inegalitatea (D.24) nu este verificată. Putem atunci presupune că :

$$n_1 > n, \tag{D.31}$$

cazul general reducîndu-se la acesta după o permutare a coloanelor lui $Y(z)$, după cum am procedat şi mai sus. Definim vectorul g de componente $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_m)$ cu relaţiile:

$$\gamma_i = \begin{cases} 1 \text{ dacă } i = 1 \\ 0 \text{ dacă } i \neq 1. \end{cases} \tag{D.32}$$

Din (D.25) rezultă atunci:

$$g' S(z) g = \frac{\pi(z) z^{n_1 - n}}{\det C_Y(z)}, \tag{D.33}$$

unde $\pi(z)$ este un polinom. Deci expresia (D.33), care este reală şi pozitivă pentru $|z| = 1$ (vezi (D.30)), nu are nici un pol pentru $|z| \leqq 1$ (vezi convenţia 1) şi are cel puţin un zero în origine,dat de factorul $z^{n_1 - n}$ (vezi (D.31)). Cum aceasta contrazice principiul variaţiei argumentului, ipoteza (D.31) este falsă, ceea ce demonstrează (D.24).

Presupunem acum că avem:

$$\sum_{i=1}^{m} (n - n_i) > 0 \tag{D.34}$$

şi arătăm că această ipoteză conduce la o contradicţie. Într-adevăr, din (D.25) rezultă:

$$\det S(z) = \frac{\det B(z)}{\det C_Y(z) z^{\sum (n - n_i)}}. \tag{D.35}$$

Din (D.26) şi din condiţiile cerute în propoziţia 3, rezultă imediat că determinantul matricei $S(z)$ este real şi diferit de zero pentru $|z| = 1$. Expresia (D.35) nu are zerouri în $|z| \leqq 1$ (vezi convenţia 1), dar are cel puţin un pol în origine (vezi (D.34)). Obţinem din nou o concluzie care contrazice principiul variaţiei argumentului şi care arată că ipoteza (D.34) este falsă. Această concluzie, împreună cu (D.24), conduce la egalităţile (D.23).

6°. Concluzia (D.23) permite să se scrie matricea $S(z)$ (vezi (D.25)) sub forma:

$$S(z) = B(z) [C_Y'(z)]^{-1}, \tag{D.36}$$

de unde rezultă (vezi convenţia 1) că toate elementele matricei $S(z)$ sînt fracţii raţionale fără poli în cercul $|z| \leqq 1$. Introducem noua mărime:

$$S_1(z) = C_Y^{-1}\left(\frac{1}{z}\right) B'\left(\frac{1}{z}\right), \tag{D.37}$$

ale cărei elemente (vezi convenţia 1) sînt de asemenea fracţii raţionale fără poli în mulţimea $|z| \geqq 1$, inclusiv punctul de la infinit. Se va arăta că, pentru $|z| = 1$ avem:

$$S(z) = S_1(z), \qquad |z| = 1, \tag{D.38}$$

ceea ce, împreună cu observaţiile de mai sus, va permite să se scrie imediat:

$$S(z) = S_1(z) = M, \tag{D.39}$$

unde M este o matrice constantă. Într-adevăr, din (D.26) şi din (D.1) rezultă:

$$S(z) = S'\left(\frac{1}{z}\right), \quad |z| = 1. \tag{D.40}$$

Scoțind pe $B(z)$ din (D.36), introducîndu-l în (D.37) și folosind (D.40), se găsește imediat (D.38) și de aici, după cum am văzut, (D.39).

Cum elementele tuturor matricelor folosite mai sus au fost fracții raționale cu coeficienți reali, rezultă că matricea M, care verifică (D.39), este reală. Din (D.40) rezultă că M este și simetrică, iar din (D.26) (întrucît matricea $T(z)$ este nesingulară pentru $|z| = 1$) și din faptul că matricea $G(z)$ este prin ipoteză pozitiv definită pentru $|z| = 1$ rezultă că matricea M este pozitiv definită. Există deci o matrice constantă, reală și nesingulară N, astfel încît :

$$M = N\,N'. \tag{D.41}$$

Scoțind pe $B(z)$ din (D.36) sau (D.37) și folosind (D.39) și (D.41), se obține :

$$B(z) = N\,N'\,C_Y'(z). \tag{D.42}$$

Din (D.22) și (D.23) rezultă :

$$C_Y(z) = Y\left(\frac{1}{z}\right)z^n. \tag{D.43}$$

Folosind (D.17), (D.42) și (D.43), se observă că este suficient să se definească :

$$D(z) = N'\,C_Y'(z), \tag{D.44}$$

pentru a obține din (D.17) formula de factorizare (D.2). Observînd că $D(z)$ are proprietățile din convenția 1, (vezi (D.44)), se termină demonstrația propoziției 3.

7°. Trecînd la demonstrația propoziției 4, se observă că, dacă $G(z)$ verifică proprietățile cerute în această propoziție, atunci oricare ar fi numărul $\varepsilon > 0$, matricea $G(z) + \varepsilon E$ verifică proprietățile cerute în propoziția 3. Aplicînd această propoziție, se deduce că există o matrice $D(z\,;\,\varepsilon)$, cu proprietățile din propoziția 3, astfel încît (vezi (D.2) și (D.3)) :

$$G(z) + \varepsilon E = D'\left(\frac{1}{z}\,;\,\varepsilon\right)D(z\,;\,\varepsilon), \tag{D.45}$$

$$\det D(z\,;\,\varepsilon) \neq 0 \text{ pentru } |z| \leqq 1. \tag{D.46}$$

Din (D.45) rezultă, în particular, pentru $|z| = 1$:

$$\gamma_{jj}(z) + \varepsilon = \sum_{i=1}^{m} |\delta_{ij}(z\,;\varepsilon)|^2, \qquad |z| = 1, \tag{D.47}$$

unde γ_{jj} și δ_{ij} sînt elementele matricei G, respectiv D. Din (D.47) rezultă că, dacă ε este mai mic decît o constantă dată, toate elementele $\delta_{ij}(z\,;\,\varepsilon)$ au, pentru $|z| = 1$, modulul mai mic decît un număr independent de ε. Cum aceste elemente sînt polinoame de grad maxim n, valorile luate de $\delta_{ij}(z\,;\,\varepsilon)$ în n puncte distincte situate pe cercul-unitate permit calcularea coeficienților acestor polinoame prin rezolvarea unui sistem nesingular de ecuații algebrice liniare. Ca urmare, toți coeficienții polinoamelor $\delta_{ij}(z\,;\,\varepsilon)$ sînt mărginiți, în valoare absolută, de constante care nu depind de ε. Această proprietate permite ca, dintr-un șir oarecare $D(z\,;\,\varepsilon_k)$, cu ε_k pozitiv, mărginit și tinzînd către zero cînd k tinde către infinit, să se poată extrage un subșir cu proprietatea că toți coeficienții polinoamelor care reprezintă elementele matricelor $D(z\,;\,\varepsilon_k)$ să conveargă. Notînd cu $D_0(z)$ matricea obținută luînd limitele coeficienților poli-

noamelor din matricea $D(z; \varepsilon)$ și folosind relația (D.45), se vede ușor că este verificată egalitatea :

$$G(z) = D_0'\left(\frac{1}{z}\right) D_0(z). \tag{D.48}$$

Totodată rădăcinile polinomului det $D_0(z)$ dacă acesta nu este identic nul sînt limite ale rădăcinilor polinoamelor det $D(z : \varepsilon_k)$. Cum acestea verifică inegalitatea $|z| > 1$, rădăcinile determinantului matricei $D_0(z)$ vor verifica inegalitatea-egalitate : $|z| \geqq 1$. Se găsește astfel condiția (D.4), ceea ce încheie demonstrația propoziției 4.

ANEXA E

În prezenta anexă se va folosi rezultatul stabilit la punctul 6, conform căruia proprietățile I—V sînt echivalente. Faptul că și proprietatea VI este echivalentă cu primele va fi arătat demonstrînd succesiv implicațiile V $\rightarrow$ VI și VI $\rightarrow$ V.

Demonstrația implicației V $\rightarrow$ VI. Conform cu lema 1, proprietatea (A), care figurează în enunțul proprietății V, este echivalentă cu proprietatea (Bb). Înlocuind, în expresia (3.3) a lui $H(\bar{s}, s)$, matricile P și Q cu expresiile deduse din (4.3) și (4.5) se obține :

$$H(\bar{s}, s) = K'K + K'L(sE - A)^{-1}B + B'(\bar{s}E - A')^{-1}L'K +$$
$$+ B'(\bar{s}E - A')^{-1}L'L(sE - A)^{-1}B + E(s) + E'(s)$$

unde

$$E(s) = -B'(\bar{s}E - A')^{-1}M(A(sE - A)^{-1}B + B).$$

Folosînd (4.29) se obține :

$$E(s) + E'(\bar{s}) = -2\,\mathrm{Re}\,s \cdot B'(\bar{s}E - A')^{-1}M(sE - A)^{-1}B$$

astfel încît $H(\bar{s}, s)$ capătă expresia :

$$H(\bar{s}, s) = (K + L(\bar{s}E - A)^{-1}B)'(K + L(sE - A)^{-1}B) -$$
$$- 2\,\mathrm{Re}\,s \cdot B'(\bar{s}E - A')^{-1}M(sE - A)^{-1}B. \tag{E.1}$$

Se vede imediat că primul termen din membrul drept al expresiei (E.1) este pozitiv semidefinit. Deoarece matricea M este negativ semidefinită, rezultă că, pentru $\mathrm{Re}\,s \geqslant 0$, și ultimul termen din (E.1) este pozitiv semidefinit, de unde se obține proprietatea VI.

Demonstrația implicației VI $\rightarrow$ V. Întrucît proprietățile V și II sînt echivalente, este suficient să demonstrăm implicația VI $\rightarrow$ II, ceea ce se va efectua arătînd că dacă proprietatea II este falsă atunci și proprietatea VI este falsă. La demonstrarea implicației I $\rightarrow$ II (v. punctul 6) s-a arătat că ipoteza : „proprietatea II este falsă" conduce la examinarea a două cazuri distincte, care au fost enunțate sub denumirile : „cazul 1°" și „cazul 2°". Făcînd apel la aceste enunțări, se observă că în cazul 1° proprietatea VI nu poate avea loc, întrucît $H(\bar{s}, s)$ este continuă în raport cu s într-o vecinătate a valorii $s = i\omega_0$, considerată la enunțarea cazului 1°. În cazul 2° se consideră din nou construcția dată de formulele (6.13)—(6.16) și se folosește faptul, demonstrat imediat după aceste formule, că matricea (6.17) este negativ semidefinită pentru α pozitiv și suficient de mic. Se mai observă că expresia $\overline{u}_0'(t)\widetilde{R}u_0(t)$ poate fi identic nulă numai dacă avem (vezi (6.17)) :

$$\overline{u}_0'(t)Ru_0(t) = \overline{u}_0'(t)Q'(2E - \alpha P)Qu_0(t).$$

Cum matricea R este simetrică și negativ semidefinită iar matricea $Q'(2E - \alpha P)Q$ este simetrică și pozitiv semidefinită pentru α suficient de mic, rezultă că egalitatea (E.6) poate avea

loc, pentru α pozitiv și suficient de mic, numai dacă ambii membri sînt nuli, ceea ce revine la condițiile :

$$R\,u_0\,(t) = 0, \tag{E.2}$$

$$Qu_0\,(t) = 0. \tag{E.3}$$

Folosind relațiile (6.13) și (6.14) se constată că egalitățile (E.2) și (E.3) sînt de forma (6.4) și (6.5), pentru A înlocuit cu $A - \alpha BQ$. Am văzut însă că aceste egalități atrag concluzia că perechea de matrici $(A' - \alpha Q'B', J')$, unde J este dat de (6.3), nu este complet controlabilă. Concluzia fiind valabilă oricare ar fi α pozitiv și suficient de mic, rezultă că perechea (A', J') nu este complet controlabilă, contrar ipotezei adoptată la punctul 6. Contradicția obținută arată că integrandul din (6.16) nu poate fi identic nul. Întrucît $\widetilde{R}$ este negativ semidefinit, rezultă atunci că integrala $I\,(0,\ T)$ (6.16) este negativă.

Folosind (6.14) și (6.15) se va scrie $x_0(t)$ sub forma :

$$x_0(t) = v_0 e^{st}. \tag{E.4}$$

unde

$$v_0 = -\,\alpha Q u\,(0).$$

Substituind (6.14) și (E.14) în (1.1) se obține :

$$u_0(t) = (sE - A)^{-1} B v_0 e^{st}. \tag{E.5}$$

Introducînd (E.4) și (E.5) în (1.2) se scrie $I\,(O,\ T)$ sub forma :

$$I\,(0,\ T) = \bar{v}_0'\,H\,(\bar{s},\ s)\,v_0 \int_0^T e^{2Re s \cdot t}\,dt, \quad \text{Re } s > 0.$$

Cum această expresie, după cum am văzut, este negativă, rezultă că $\bar{v}_0' H\,(\bar{s},\ s)\,v_0$ este negativ-ceea ce contrazice proprietatea VI. Demonstrațiile efectuate mai sus în prezenta anexă arată, în definitiv, că proprietatea VI este echivalentă cu proprietățile I—V, fapt care va fi folosit în demonstrațiile care urmează.

Demonstrăm acum că și proprietatea VII este echivalentă cu proprietățile anterioare.

Demonstrația implicației VI → VII. Se va demonstra că dacă proprietatea VII nu are loc atunci nici proprietatea VI nu are loc. Într-adevăr, dacă proprietatea VII nu are loc, atunci este îndeplinită una dintre următoarele condiții (eventual, mai multe) : 1° : proprietatea (A) din lema 1 nu are loc. 2° : matricea A are valori caracteristice cu partea reală pozitivă sau valori caracteristice cu partea reală nulă și cu divizori elementari nesimpli. 3° : matricea A are cel puțin o valoare caracteristică cu partea reală nulă iar reziduul matricii $Q\,(sE - A)^{-1}B$ în polul corespunzător sau nu este hermitic sau, fiind hermitic, nu este pozitiv semidefinit.

Se va arăta că, în fiecare dintre aceste cazuri, propoziția VI nu are loc. În cazul 1°, aceasta rezultă imediat folosind continuitatea lui $H\,(\bar{s},\ s)$ în raport cu s. În cazul 2°, există soluții ale sistemului $du/dt = Au + Bx$ care tind către infinit, deși $x = 0$. Deci proprietatea I nu are loc și, prin urmare, nici proprietatea VI care, după cum am văzut, este echivalentă cu aceasta. În cazul 3° se consideră o valoare caracteristică $s_0 = i\omega_0$, avînd proprietățile menționate și se introduce expresia :

$$Q\,(sE - A)^{-1}B = \frac{U}{s - i\omega_0} + Z\,(s), \tag{E.6}$$

unde $Z(s)$ este mărginită într-o vecinătate a valorii proprii $s = i\omega_0$. Matricea U se poate prezenta sub forma:

$$U = U_1 + iU_2$$

în care atît U_1 cît și U_2 sînt hermitice. Conform ipotezelor din cazul 3°, sau U_2 este diferit de zero, sau U_1 nu este pozitiv semidefinită. Vom arăta că, în ambele cazuri, există valori ale lui s cu partea reală pozitivă pentru care $H(\bar{s}, s)$ nu este pozitiv semidefinit. Într-adevăr, în aceste cazuri, există un vector v_0 astfel încît, sau $v_0' U_2 v_0 \neq 0$ sau $v_0' U_2 v_0 = 0$, și $v_0' U_1 v_0 < 0$. Folosind (3.3), (E.6) și faptul că matricea R este presupusă negativ semidefinită se obține negalitatea:

$$H(\bar{s}, s) \leqslant \frac{U_1 + iU_2}{s - i\omega_0} + \frac{U_1 - iU_2}{\bar{s} + i\omega_0} + \tilde{Z}(s), \tag{E.7}$$

unde $\tilde{Z}(s)$ este mărginit într-o vecinătate a lui $s_0 = i\omega_0$. Introducînd notațiile:

$$s = \rho e^{i\varphi} + i\omega_0 \tag{E.8}$$

se deduce din (E.7):

$$v_0' H(\bar{s}, s)\, v_0 \leqslant 2 \frac{v_0' U_1 v_0}{\rho} \cos\varphi + 2 \frac{u_0' U_2 v_0}{\rho} \sin\varphi + v_0' \tilde{Z}(s) v_0.$$

Alegînd pe ρ suficient de mic se poate face în ambele cazuri arătate mai sus, ca primii doi termeni din membrul drept să aibă suma negativă și oricît de mare în valoare absolută, în timp ce ultimul termen rămîne mărginit. Este suficient, în acest scop, să se aleagă convenabil unghiul φ verificînd inegalitățile $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$ (care corespund condiției $\operatorname{Re} s > 0$; (vezi (E.8)). Inegalitatea obținută contrazice proprietatea VI.

Demonstrația implicației VII → VI se poate reduce la demonstrația implicației VII → IV, deoarece proprietățile VI și IV sînt echivalente.

Din proprietatea (*A*), care figurează în enunțul proprietății VII rezultă, conform cu lema 1, proprietatea (*Bb*). Totodată, deoarece valorile caracteristice ale matricii A au proprietățile specificate în proprietatea VII, există o transformare S nesingulară, (vezi (2.3)) în general complexă, care aduce matricea A la o formă normală jordaniană specială. Formulele (2.3), (4.3)—(4.5) rămîn valabile și în cazul unei transformări S complexe cu singura condiție să se înlocuiască semnul $'$ (care reprezintă transpunerea) prin semnul $*$ (care desemnează conjugarea hermitică). Transformarea considerată poate fi astfel aleasă încît matricea A să se prezinte ca o matrice de blocuri, ale cărei elemente A_{jk}, $j = 1, 2, \ldots l$, $k = 1, 2, \ldots l$, sînt matrici cu n_j linii și n_k coloane verificînd condițiile:

$$A_{jj} = i\omega_j E_j, \quad j = 1, 2, \ldots l - 1, \tag{E.9}$$

$$A_{jk} = 0 \text{ dacă } j \neq k. \tag{E.10}$$

În aceste relații, E_j reprezintă matricea unitate cu n_j linii și coloane, iar ω_j reprezintă numere reale distincte, printre ele putînd figura și zero. Elementul A_{ll} reprezintă o matrice ale cărei valori caracteristice au părțile reale negative.

În urma acestei transfomări, matricile M și R devin matrici hermitice putînd fi prezentate ca matrici de blocuri ale căror elemente M_{jk} și R_{jk} sînt matrici de dimensiuni corespunzătoare matricilor A_{jk}.

În mod analog, se prezintă matricile L și Q sub forma unei linii de blocuri L_j, respectiv Q_j, $j = 1, 2, \ldots l$, unde L_j și Q_j sînt matrici avînd m linii și n_j coloane. În sfîrșit, matricea B_j se prezintă ca o coloană de blocuri B_j, $j = 1, 2, \ldots l$, unde B_j reprezintă matrici cu n_j linii și m coloane.

Folosind notațiile de mai sus, relația (4.4) devine :

$$M_{jk} A_{kk} + A_{jj}^{*} M_{jk} = L_j^{*} L_k - R_{jk}, \quad j = 1, 2, \ldots l, \quad k = 1, 2, \ldots l. \tag{E.11}$$

De aici se obține, pentru $j = k$, folosind (E.9) :

$$R_{jj} = L_j^{*} L_j, \quad j = 1, 2, \ldots l - 1. \tag{E.12}$$

Cum R este negativ semidefinit, egalitatea (E.9) poate avea loc numai dacă

$$R_{jj} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots l - 1, \tag{E.13}$$

$$L_j = 0, \quad j = 1, 2, \ldots l - 1. \tag{E.14}$$

Din (E.13) și din faptul că R este negativ semidefinit mai rezultă egalitățile :

$$R_{jk} = 0 \quad \text{dacă } j \neq l \quad \text{sau } k \neq l. \tag{E.15}$$

Revenind la (E.11) și folosind (E.9) (E.13) — (E.15) se obține :

$$J_{kl} (\omega_k - \omega_j) M_{jk} = 0, \quad j, k = 1, 2, \ldots l - 1$$

$$M_{jl} (A_{ll} - i\omega_j E_l) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots l - 1$$

$$(i\omega_k E_l + A_{ll}^{*}) M_{lk} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots l - 1,$$

de unde rezultă

$$M_{jk} = 0 \text{ dacă } j \neq k \quad \text{și totodată } j \neq l \text{ sau } k \neq l. \tag{E.16}$$

Din (E.11) se mai deduce

$$M_{ll} A_{ll} + A_{ll}^{*} M_{ll} = L_l^{*} L_l - R_{ll} \tag{E.17}$$

și întrucît membrul drept este pozitiv semidefinit iar valorile caracteristice ale matricii A_{ll} au părțile reale negative, rezultă că matricea M_{ll} este negativ semidefinită. Concluzii analoage se obțin pentru matricile M_{jj} făcînd apel la ecuația (4.5) care dă, ținînd seama de (E.14) și (E.16)

$$M_{jj} B_j = - Q_j^{*}, \quad j = 1, 2, \ldots l - 1.$$

Înmulțind la stînga cu B_j^{*} și luînd conjugatul hermitic se obține :

$$- B_j^{*} M_{jj} B_j = Q_j^{*} B_j, \quad j = 1, 2, \ldots l - 1. \tag{E.18}$$

În membrul drept intervine tocmai reziduul expresiei $Q (sE - A)^{-1} B$ în polul $s = i\omega_j$, după cum se poate verifica prin calcul direct folosind (E.9) — (E.10).

Observăm acum că rangul matricii B_j este n_j. Într-adevăr, în cazul contrar există un vector diferit de zero, v, cu n_j dimensiuni astfel încît :

$$v^{*} B_j = 0, \quad v^{*} A_{jj}^{k} B_j = 0, \quad k = 1, 2 \ldots$$

Completînd cu elemente nule se găsește că există un vector cu n dimensiuni, u_0, diferit de zero, astfel încît (v.(E.9)) :

$$u_0^{*} B = 0, \quad u_0^{*} A^k B = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, \; j = 1, 2 \ldots l - 1$$

de unde rezultă că matricea (3.1) nu are rangul n, contrar ipotezei. Aceasta demonstrează că B_j are rangul n_j. În consecință, oricare ar fi vectorul v cu n_j dimensiuni, există un vector w, cu m componente, astfel încît

$$B_j w = v, \quad j = 1, 2, \ldots l - 1.$$

înmulțind relația (E.18) la stînga cu w^* și la dreapta cu w și folosind faptul că membrul drept este, prin ipoteză, pozitiv semidefinit, se obține inegalitatea:

$$v^* M_{jj} v \leqslant 0, \quad j = 1, 2, \ldots l - 1,$$

de unde, întrucît v este arbitrar, rezultă că M_{jj} este negativ semidefinit. Matricea M are prin urmare o structură diagonală de blocuri, fiecare bloc de pe diagonală fiind o matrice negativ semidefinită (vezi și (E.17)). Se obține proprietatea IV, încheindu-se astfel demonstrația teoremei 1'.

Se observă că în ultima parte a demonstrației nu s-a folosit proprietatea că reziduurile $Q_j^* B_j$ sînt hermitice. Aceasta se datorește faptului că hermiticitatea reziduurilor $Q_j^* B_j$ este o consecință a celorlalte condiții cerute în enunțul proprietății VII.

Primit la redacție la 15 iunie 1964

BIBLIOGRAFIE

1. V. M. Popov, *Criterii de stabilitate pentru sistemele automate conținînd elemente neunivoce*, Probleme de automatizare, București, **13** octombrie (1960).
2. В.М. Попов, *Решение новой задачи устойчивости регулируемых систем*, Автом. и телемех., **XXIV**, *1* (1963).
3. А.М. Летов, *Аналитическое конструирование регуляторов 1* ,Автом. и телемех., **XX**, *4*, (1960).
4. Я. Курцвейль, *К аналитическому конструированию регуляторов*, Автом. и телемех., **XXII**, *6* (1961).
5. R. E. Kalman, *Contributions to the theory of optimal control*, Bol. Soc. Mat. Mexicana, **5**, *1* 102—119 (1960).
6. R. E. Kalman, *When is a linear control system optimal?* J. Basic Engineering (Trans ASME, part D) *1* (1964).
7. Sheldon S. L. Chang, *Synthesis of optimum control systems*, McGraw-Hill, 1961.
8. R. E. Kalman, *Mathematical description of linear dynamical systems*, SIAM J. Control, № 2, 1963.
9. V. M. Popov, *Criterii suficiente de stabilitate asimptotică în mare pentru sistemele automate neliniare cu mai multe organe de execuție*, St. cerc. energ., **IX**, *4* (1959).
10. V. M. Popov, *Noi criterii de stabilitate pentru sistemele automate neliniare*, St. cerc. energ., **X**, *1* (1960).
11. V. M. Popov, *Hyperstability of automatic control systems with several non-linear elements*, Revue Roumaine de Sciences tehniques, *1* (1964).
12. В.А. Якубович, *Решение некоторых матричных неравенств, встречающихся в теории автоматического регулирования*, Докл, А.Н. СССР, **143**, (1962).
13. R. E. Kalman, *Lyapunov functions for the Problem of Lur'e in automatic control*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, *49*, 201—205 (1963).
14. А.И. Лурье, *Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования*. Москва, Гостехиздат 1951.

15. A. Halanay, *Teoria calitativă a ecuațiilor diferențiale*, București, Edit. Acad. R.P.R., 1963.
16. М.А. Айзерман, Ф.Р. Гантмахер, *Абсолютная устойчивость регулируемых систем*, Изд. А.Н. СССР, 1963.
17. И.Ц. Гохберг, М.Г. Крейн, *Системы интегральных уравнений на полупрямой с ядрами зависящими от разности аргументов*, Успехи мат. наук, XIII 2 (80) (1958).
18. Н.П. Векуа, *Системы сингулярных интегральных уравнений*, М.Л. Гостехиздат, 1950.
19. I. Barbălat, *Systèmes d'équations différentielles d'oscillations non lineaires*, Revue de Mathématiques pures et appliquées, Acad. R.P.R., *4*, 2 (1959).
20. Ф.Р. Гантмахер, *Теория матриц*, Москва, 1953.

DETERMINAREA CARACTERISTICII DINAMICE FRECVENȚĂ-PUTERE A UNUI SISTEM ELECTROENERGETIC DIN COMPORTAREA SA LA PERTURBAȚII STATISTICE. METODE ȘI ALGORITME DE CALCUL[1)]

DE

ECATERINA ARIE și NICOLAE DAMIAN-IORDACHE

Institutul de energetică al Academiei R.P.R., Șos. Vitan, nr. 236, București

621.311.153.22.016.352 :621.3.016.2.+.029

Se prezintă metode și algoritme de calcul pentru determinarea funcției de transfer a unui sistem electroenergetic din funcția de autocorelație a puterii perturbatoare dintr-un nod și funcțiile de corelație mixte dintre puterea perturbatoare, frecvență și puterea de schimb și anume : metoda transformatei Laplace de argument real, aplicată cu ajutorul submetodelor ecuațiilor normale și a gradientului, o metodă de aproximare prin funcții cvasiperiodice etc.

Cunoașterea caracteristicii dinamice frecvență-putere a unui sistem electroenergetic este necesară în studiul reglării automate a frecvenței și puterilor de schimb. În cele mai multe cazuri, datorită complexității sistemului, se recurge la o caracteristică aproximativă, de preferință liniară, dată sub forma unei funcții de transfer. Un alt domeniu de aplicare a unei astfel de funcții de transfer este acela al determinării indirecte a perturbațiilor statistice ce acționează asupra unui sistem electroenergetic, din analiza fluctuațiilor frecvenței și ale puterilor de schimb [1].

---

1) Lucrare publicată parțial în „Rev. Roum. Sci. Techn. — Electrotechn. Energ.", **9**, *4* (1964).

Funcţia de transfer a sistemului poate fi determinată experimental, ceea ce permite reducerea numărului de informaţii necesare faţă de calculul analitic; în cazul deducerilor teoretice pe bază de ipoteze simplificatoare, metoda experimentală se impune ca mijloc final de verificare.

Conform teoriei statistice a reglajului automat [2], [3], pentru studiul regimurilor normale de exploatare ale instalaţiilor de reglare automată este preferabilă determinarea funcţiilor de transfer ale obiectului reglat prin prelucrarea statistică a înregistrărilor efectuate în regim normal de funcţionare, deoarece în acest fel se reduc erorile datorate zgomotelor şi se determină direct cea mai bună aproximaţie — în sensul erorii medii pătratice — a caracteristicii reale. Această metodă avantajează şi exploatarea, deoarece nu perturbă funcţionarea sistemului şi poate fi repetată ori de cîte ori este necesar.

1. STABILIREA ECUAŢIILOR DIFERENŢIALE STATISTICE

Pentru determinarea funcţiei de transfer a unui sistem electroenergetic se pot folosi înregistrările simultane ale unei puteri fluctuante debitate sau absorbite într-un nod, ale frecvenţei şi eventual, ale puterilor de schimb, dacă sistemul este interconectat cu alte sisteme. În cazul particular în care fluctuaţiile puterii, considerate ca mărime perturbatoare, sînt datorate unor cauze independente de fluctuaţiile frecvenţei şi ale puterii de schimb, sistemul (în accepţia de sistem automat) poate fi considerat deschis; această ipoteză este valabilă pentru fluctuaţii de putere cu perioade pînă la ordinul zecilor de secunde şi amplitudini, comparabile cu ale fluctuaţiilor sarcinii rezultante a sistemului:

a) cerute de consumatori, dacă depăşesc 10% din puterea totală a consumatorului respectiv (în care caz termenul datorit autoreglajului este neglijabil faţă de cel datorit variaţiei cererii);

b) debitate de centralele reglante în sisteme fără reglaj automat de frecvenţă sau putere de schimb (în acest caz, numai componentele mult mai lente ale fluctuaţiilor puterii sînt determinate de variaţiile frecvenţei şi ale puterii de schimb). În caz contrar, se pot aplica metodele stabilite pentru sisteme automate cu reacţie [4], metode a căror adaptare la specificul sistemului electroenergetic nu face obiectul prezentei lucrări.

Dacă $\Delta P_i(t)$ sînt perturbaţiile ce acţionează în nodurile i ale unui sistem electroenergetic şi dacă aceste perturbaţii sînt statistic independente, astfel încît

$$\mu_{il}(t_i t_l) = \int_{-\infty}^{\infty} \Delta P_i(t_i)\, \Delta P_l(t_l)\, \mathrm{d}\varpi_i\, \mathrm{d}\varpi_l = 0, \tag{1}$$

se poate scrie ecuaţia diferenţială statistică:

$$\left(a_{ni}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\tau^n} + \ldots a_{1i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} + a_{0i}\right)\mu_{P_i f}(\tau) + \left(\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}\tau^m} + \right.$$
$$\left. + b_{m-1i}\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}\tau^{m-1}} + \ldots + b_{0i}\right)\mu_{P_i P_i}(\tau) = 0 \tag{2}$$

sau, sub formă operațională :

$$\tilde{\mu}_{P_i f}(s) = F_i(s)\,\tilde{\mu}_{P_i P_i}(s), \tag{2 a}$$

unde :

$F_i(s) = -\dfrac{s^m + b_{m-1,i}\,s^{m-1} + \ldots + b_{0i}}{a_{ni}\,s^n + \ldots + a_{1i}\,s + a_{0i}}$ este funcția de transfer a sistemului în nodul i ;

$\mu_{P_i P_i}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \Delta P_i(t)\,\Delta P_i(t+\tau)\,\mathrm{d}t$ este funcția de autocorelație a puterii perturbatoare ;

$\mu_{P_i f}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \Delta P_i(t)\,\Delta f(t+\tau)\,\mathrm{d}t$ este funcția de corelație mixtă a puterii perturbatoare și a frecvenței.

În cazul în care nodul i este chiar nodul de interconexiune sau în cazul în care se poate neglija efectul variațiilor de tensiune, utilizînd o funcție de transfer unică pentru întreg sistemul, se obține o ecuație diferențială statistică asemănătoare, în cazul existenței unei legături de interconexiune, pentru sistemul A în care acționează perturbația ΔP_i :

$$\tilde{\mu}_{P_i f}(s) = F_A(s)[\tilde{\mu}_{P_i P_i}(s) + \tilde{\mu}_{P_i P_s}(s)], \tag{3}$$

iar pentru sistemul B :

$$\tilde{\mu}_{P_i f}(s) = -F_B(s)\,\tilde{\mu}_{P_i P_s}(s), \tag{4}$$

unde :

$\mu_{P_i P_s}(\tau)$ este funcția de corelație mixtă a puterii perturbatoare ΔP_i și a puterii de schimb (pentru puterea de schimb acționînd asupra sistemului A s-a admis același semn pozitiv ca și pentru puterea ΔP_i). Notînd :

$$\frac{1}{F(s)} = \frac{1}{F_A(s)} + \frac{1}{F_B(s)} \text{ și } F_s(s) = \frac{F_A(s)}{F_A(s) + F_B(s)},$$

se poate scrie :

$$\tilde{\mu}_{P_i f}(s) = F(s)\,\tilde{\mu}_{P_i P_i}(s)\,; \tag{5}$$

$$\tilde{\mu}_{P_i P_s}(s) = F_s(s)\,\tilde{\mu}_{P_i P_i}(s)\,; \tag{6}$$

$$F_A(s) = \frac{F(s)}{1 - F_s(s)}\,; \quad F_B(s) = \frac{F(s)}{F_s(s)}\,; \tag{7}$$

adică funcțiile de transfer ale unor sisteme interconectate, pot fi determinate rezolvînd două ecuații integrale de același tip : (5) și (6).

Pentru rezolvarea acestor ecuații integrale, există în literatură diferite metode, dintre care citățm :

calea analogică — prin încercări sau optimizare automată ;

metoda transformării Fourier, bine cunoscută, care a fost aplicată și în problema determinării funcțiilor de transfer ale unor centrale electrice [5]. Prezintă însă dezavantajul unei prelucrări laborioase și al introducerii

cu o pondere mai mare a anumitor valori particulare ale datelor experimentale, ceea ce micșorează precizia [6];

metoda transformatei Laplace de argument real (vezi cap. 2);

metoda momentelor [7]; prezintă avantajul că în cazul sistemelor liniare conduce la relații liniare între parametrii funcției de transfer. Reținem în special expresia simplă ce rezultă pentru răspunsul static (panta caracteristicii statice frecvență-putere sau energia reglantă):

$$K = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \mu_{P_i P_i}(\tau)\,\mathrm{d}\tau}{\int_{-\infty}^{\infty} \mu_{P_i f}(\tau)\,\mathrm{d}\tau}; \tag{8}$$

cu $\tau = t_2 - t_1$

$$K_s = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \mu_{P_i P_i}(\tau)\,\mathrm{d}\tau}{\int_{-\infty}^{\infty} \mu_{P_i P_s}(\tau)\,\mathrm{d}\tau}; \tag{9}$$

$$K_A = K(1 - K_s). \tag{10}$$

La determinarea celorlalți parametri ai funcțiilor de transfer, prin înmulțirea cu τ, τ^2, ..., τ^n intervin însă cu o pondere mare porțiunile depărtate de origine ale funcțiilor de autocorelație și de corelații mixte, ceea ce micșorează precizia calculelor.

Schema logică de programare a calculului pentru aplicarea acestei metode este reprodusă în figura 3.

Întrucît funcțiile de autocorelație ale sarcinilor perturbatoare din sisteme electroenergetice pot fi în general aproximate prin sume de funcții cvasiperiodice [1], s-a dezvoltat în cele ce urmează (cap. 3) o metodă corespunzătoare care conduce în acest caz la calcule mai simple decît în cazul aplicării altor metode.

2. METODA TRANSFORMATEI LAPLACE DE ARGUMENT REAL

Dînd diferite valori reale variabilei s, se pot calcula valorile corespunzătoare ale transformatelor Laplace $\tilde{\mu}_{PP}(s)$ și $\tilde{\mu}_{Pf}(s)$ ce intervin în ecuația diferențială statistică (2 a).

Ecuația:

$$\begin{aligned}&(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0)\,\tilde{\mu}_{Pf}(s) + \\ &+ (s^m + s^{m-1} b_{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0)\,\tilde{\mu}_{PP}(s) = 0\end{aligned} \tag{2 b}$$

nu conține ca necunoscute decît cei $m + n + 1$ parametri ai funcției de transfer ($a_n \ldots a_0$, $b_{m-1} \ldots b_0$). Acești parametri apar liniar și coeficienții lor depind parametric de s. Rezultă deci că (2b) reprezintă un

sistem liniar de r ecuații cu $m + n + 1$ necunoscute, unde r este numărul de valori date parametrului s.

Pentru a obține o precizie mai mare la determinarea parametrilor $(a_n \dots a_0, b_{m-1} \dots b_0)$, este de preferat alegerea unui r cît mai mare, în general $r > m + n + 1$, deci sistemul format nu are o soluție bine determinată, dar se poate găsi o soluție optimă care să facă minimă eroarea medie pătratică.

Notînd :

$$
\begin{array}{lll}
u_i = a_i & \text{pentru} & 0 \leqslant i \leqslant n \\
u_i = b_j & \text{,,} & i = n + j + 1 \quad ; \quad j \leqslant m \\
c_{ik} = s^k \, \widetilde{\mu}_{Pf}(s) & & k = 0, 1 \dots n \quad ; \quad i = 1 \dots r \\
c_{i,n+l+1} = s^l \, \widetilde{\mu}_{PP}(s) & & l = 0, 1 \dots m-1 ; \quad i = 1 \dots r \\
c_{i,m+n+1} = -\, s^m \, \widetilde{\mu}_{PP}(s) & & i = 1 \dots r,
\end{array}
$$

relația (2b) se poate scrie :

$$
\sum_{j=0}^{m+n} c_{ij} u_j = c_{i,m+n+1} \qquad \begin{array}{l} i = 1 \dots r \\ r > m + n + 1. \end{array} \tag{2c}
$$

Pentru a determina soluția optimă a sistemului (2c) folosind criteriul erorii pătratice minime, se poate aplica metoda ecuațiilor normale sau metoda gradientului.

În mod analog, prin aplicarea transformatei Fourier și dînd diferite valori variabilei imaginare $j\nu$, se poate obține un sistem de ecuații liniare de ordinul r :

$$
r \geqslant m + n + 1,
$$

care poate fi rezolvat folosind criteriul erorii pătratice minime, prin una din căile expuse în cele ce urmează.

2.1. Submetoda ecuațiilor normale

Minimizarea funcției :

$$
W = \sum_{i=1}^{r} \left(\sum_{j=0}^{m+n} c_{ij} u_j - c_{i,m+n+1} \right)^2 \tag{11}
$$

se reduce la anularea derivatei acesteia în raport cu variabilele u_j :

$$
\sum_{i=1}^{r} c_{ih} \left(\sum_{j=0}^{m+n} c_{ij} u_j - c_{i,m+n+1} \right) = 0, \quad h = 0 \dots m + n \tag{12}
$$

sau notînd :

$$
\begin{aligned}
\xi_{hj} &= \sum_{i=1}^{r} c_{ih} c_{ij}, \\
\xi_{h,m+n+1} &= \sum_{i=1}^{r} c_{ih} c_{i,m+n+1};
\end{aligned} \tag{13}
$$

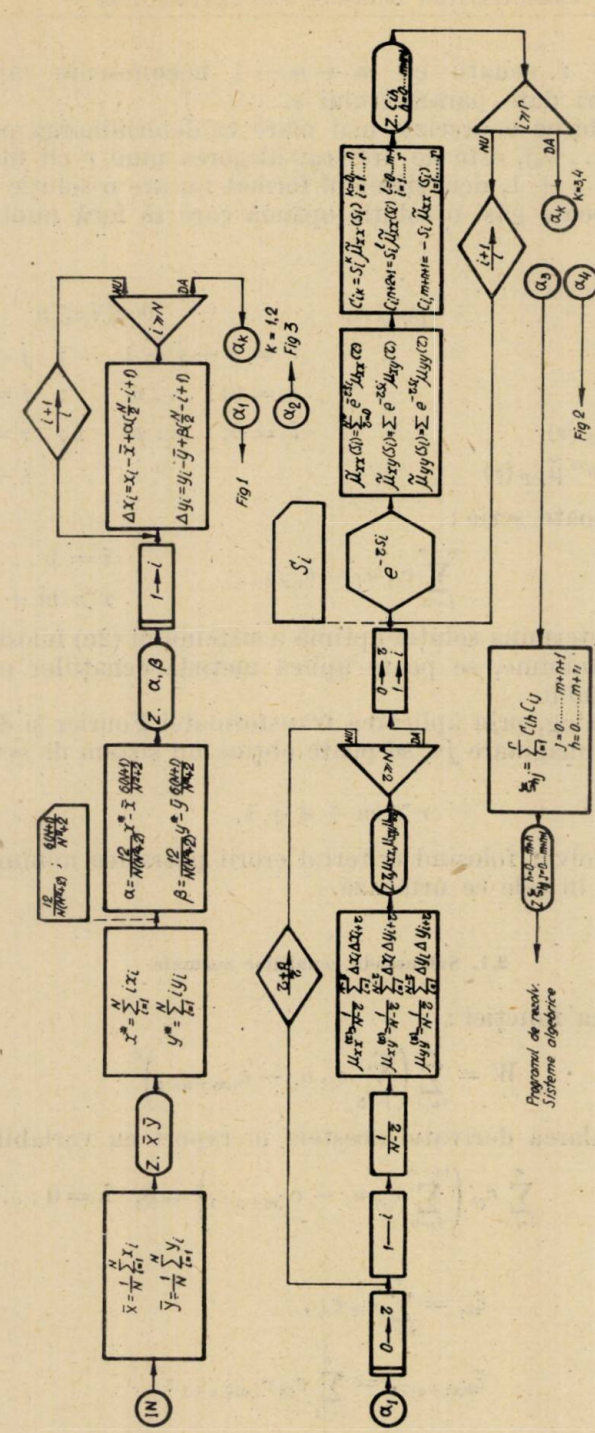


Fig. 1. — Schema logică de calcul pentru aplicarea submetodei ecuațiilor normale.

(6) se scrie :

$$\sum_{j=0}^{m+n} \xi_{hj} u_j = \xi_{h,m+n+1}. \tag{14}$$

Pentru $h = 0 \ldots m + n$, (14) reprezintă un sistem cu $m + n + 1$ ecuații cu $m + n + 1$ necunoscute, coeficienții lui calculîndu-se cu ajutorul formulelor (13). Sistemul de ecuații (14) poartă numele de sistemul ecuațiilor normale atașate sistemului (2c), iar soluția sa minimizează funcția, deci este soluția optimă căutată a sistemului (2c).

Calcularea coeficienților ξ_{hj} (13) și rezolvarea sistemului (14) se poate face cu ajutorul unui calculator numeric. În figura 1 este prezentată schema logică a programului de calcul pentru aplicarea metodei transformatei Laplace de argument real cu ajutorul ecuațiilor normale.

Această metodă prezintă dezavantajul că soluția obținută nu satisface întotdeauna considerentele fizice impuse.

Metoda gradientului înlătură acest neajuns, permițînd determinarea unei soluții care satisface anumite constrîngeri.

2.2. Submetoda gradientului

Dacă în diferite iterații succesive se dau variabilelor u_h valorile $u_h^{(k)}$, astfel ca :

$$u_h^{(k+1)} = u_h^{(k)} + \lambda t_h^{(k)}, \tag{15}$$

unde λ este un coeficient real și pozitiv, iar

$$t_h(u_0 \ldots u_{m+n}) = -\frac{\partial W}{\partial u_h} = -\sum_{i=1}^{r} c_{ih} \sum_{j=0}^{m+n} c_{ij} u_j - c_{i,m+n}, \tag{16}$$

se știe că, exceptînd anumite puncte singulare, funcția W este descrescătoare și, dacă t_h tinde către zero, W tinde către o valoare minimă și reciproc.

Metoda gradientului se bazează pe această observație, care conduce la un proces iterativ, alegîndu-se valorile inițiale astfel, încît să fie îndeplinite și condițiile

$$u_h \geqslant u_h^0, \tag{17}$$

unde u_h^0 sînt niște constante impuse din considerente fizice.

Ținînd seama de dimensiunile sistemului electroenergetic, de tipul centralelor electrice și ale regulatoarelor, se pot stabili valori minime ale variabilelor u_h^0, care se aleg ca valori inițiale în procesul iterativ. Algoritmul pe care se bazează programul de calcul prin această metodă este următorul :

Se calculează expresiile $t_h^{(k)}$ și $a_h^{(k)}$:

$$a_h^{(k)} = u_h^{(k)} + \lambda t_h^{(k)} \tag{18}$$

și se compară a_h cu valorile minime impuse.

Dacă

$$a_h^{(k)} > u_h^0,$$

se introduce în pasul următor :

$$u_h^{(k+1)} = a_h^{(k)}.$$

În caz contrar, se introduce

$$u_h^{k+1} = u_h^0.$$

După un număr oarecare de paşi se ajunge la o situaţie în care mărimile t_h, $(h = 0 \ldots m + n)$ corespunzătoare variabilelor u_h fixate datorită constrîngerilor sînt negative, iar pentru celelalte variabile valorile t_h sînt suficient de mici, astfel încît valoarea W devine, practic, staţionară.

În figura 2 este prezentată schema logică de calcul a programului de rezolvare a sistemului (2c) prin metoda gradientului. În program se

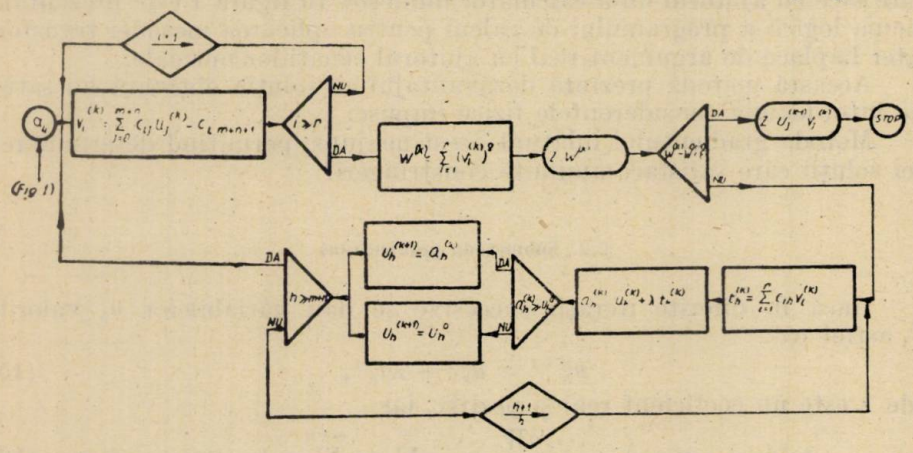


Fig. 2. — Schema logică de calcul pentru aplicarea submetodei gradientului.

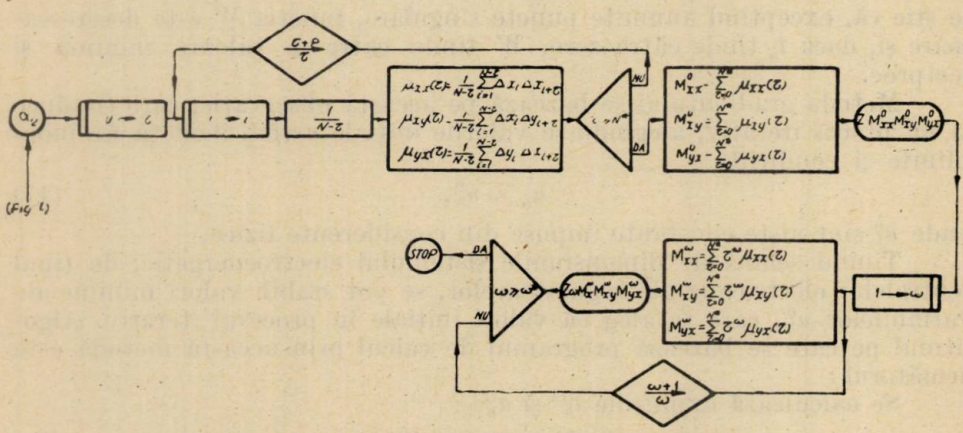


Fig. 3. — Schema logică pentru calculul momentelor.

calculează şi valoarea funcţiei W la fiecare pas şi se scrie la maşină, permiţînd urmărirea calculului şi, implicit, şi o alegere convenabilă a factorului de accelerare.

Această metodă prezintă avantajul că soluția găsită satisface condițiile impuse și, în plus, prin modificarea convenabilă a coeficientului λ în cursul calculelor, convergența procesului poate fi grăbită. Dezavantajul este însă că soluția găsită dă uneori un minim local pentru funcția W.

3. METODA APROXIMĂRII PRIN FUNCȚII CVASIPERIODICE

Dacă funcția de autocorelație a mărimii perturbatoare x poate fi aproximată printr-o funcție de forma :

$$\mu_x(\tau) = \sum A_k e^{-\alpha_k \tau} \cos \beta_k \tau = \operatorname{Re} \sum A_k e^{z_k \tau}, \tag{19}$$

unde :

$$z_k = -\alpha_k + j\beta_k; \qquad \tau = |t_2 - t_1|,$$

se poate calcula funcția de corelație mixtă $\mu_{xy}(\tau)$; prin identificare cu funcția de corelație mixtă $\mu^e_{xy}(\tau)$, obținută experimental, se pot deduce astfel parametrii funcției de transfer.

Transformata Laplace a funcției (19) este :

$$\tilde{\mu}_{xx}(s) = \sum A_k \left[\frac{1}{s - z_k} + \frac{1}{s + z_k}\right], \tag{20}$$

unde :

$$-\delta_k < \operatorname{Re} s < \delta_k.$$

Dacă $F(s)$ este funcția de transfer a sistemului, funcția de corelație mixtă $\mu_{xy}(\tau)$ va avea imaginea :

$$\tilde{\mu}_{xy}(s) = F(s) \sum A_k \left[\frac{1}{s - z_k} + \frac{1}{s + z_k}\right], \tag{21}$$

unde :

$$-\delta_k < \operatorname{Re} s < \delta_k.$$

Originalul expresiei (21) va fi :

$$\mu_{xy}(\tau) = \begin{cases} \operatorname{Re}\left[\sum A_k \left\{F(z_k) e^{z_k \tau} + 2 z_k \sum \frac{h_i}{\nu_i^2 - z_k^2} e^{\nu_i \tau}\right\}\right], & \text{pentru } t_2 > t_1 \\ \operatorname{Re}\left[\sum A_k F(-z_k) e^{z_k \tau}\right], & \text{pentru } t_1 > t_2, \end{cases} \tag{22}$$

unde :

$$F(s) = \mathfrak{L}\left[\sum h_i e^{\nu_i \tau}\right].$$

Funcția de corelație mixtă obținută experimental $\mu^e_{xy}(\tau)$ va trebui deci să aibă forma :

$$\mu^{(e)}_{xy}(t_1 t_2) \simeq \sum B_k e^{-\alpha_k \tau} \cos(\beta_k \tau - \varphi_k), \quad \text{pentru } t_1 > t_2.$$

Prin identificarea coeficienţilor, rezultă relaţiile :

$$F(-z_k) = \frac{B_k}{A_k} e^{j\varphi_k}, \tag{23}$$

cu ajutorul cărora se obţine o primă aproximaţie a funcţiei de transfer : $F^{(1)}(s)$.

Folosirea expresiei (22) pentru domeniul $t_2 > t_1$ permite mărirea preciziei de determinare a funcţiei de transfer, dacă acest lucru e considerat necesar.

Cu aproximaţia $F^{(1)}(s)$ a funcţiei de transfer se determină primul termen al expresiei (22) pentru $t_2 > t_1$. Scăzînd acest termen din funcţia de corelaţie mixtă determinată experimental, se obţine funcţia $g_i(\tau)$:

$$g_i(\tau) = \mu^e_{xy}(\tau) - \sum_k A_k \operatorname{Re}\left[F(-z_k)\, e^{z_k \tau}\right]. \tag{24}$$

Identificînd această funcţie cu cel de-al doilea termen al expresiei (22) :

$$\operatorname{Re}\left[\sum_k 2 A_k z_k \sum_i \frac{h_i}{\nu_i^2 - z_k^2} e^{\nu_i \tau}\right],$$

se obţine un nou şir de relaţii între parametrii funcţiei de transfer, ceea ce permite determinarea unei aproximaţii mai bune a acesteia.

Dacă funcţia de transfer $F(s)$ este de forma :

$$F(s) = -\frac{1 + \lambda s}{k\left[(s - \nu)(s - \nu^*)\right]}, \tag{25}$$

unde

$$\nu = -\delta + j\gamma,$$

relaţiile (23) devin :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{k}\sqrt{\frac{(1 + \lambda\alpha_k)^2 + \lambda^2\beta_k^2}{\left[(\alpha_k + \delta)^2 + (\beta_k + \gamma)^2\right]\left[(\alpha_k + \delta)^2 + (\beta_k - \gamma)^2\right]}} &= \frac{B_k}{A_k}, \\ \operatorname{arc\,tg}\frac{-\lambda\beta_k}{1 + \alpha_k\lambda} + \operatorname{arc\,tg}\frac{\beta_k + \gamma}{\alpha_k + \delta} + \operatorname{arc\,tg}\frac{\beta_k - \gamma}{\alpha_k + \delta} &= \varphi_k, \end{aligned} \tag{23a}$$

iar funcţia $g(\tau)$ va trebui identificată cu expresia :

$$\sum \frac{A_k e^{-\delta\tau}}{k} \operatorname{Re} z_k \left[\frac{G(\gamma)}{\nu^2 - z_k^2} + \frac{G(-\gamma)}{\nu^{*2} - z_k^2}\right], \tag{26}$$

unde :

$$G(\gamma) = \frac{1 - \lambda\delta + j\gamma}{j\gamma} e^{j\gamma\tau}.$$

Întrucît, practic, în toate cazurile aproximarea funcţiei de transfer a sistemului electroenergetic printr-o expresie de forma (25) este sufi-

cientă [8], relațiile (23 a) și (26) au o aplicare generală. Menționăm că este posibilă combinarea calculului analitic și a celui analogic prin aplicarea analitică a relațiilor (23a) în scopul determinării unei prime aproximații a funcției de transfer, obținîndu-se apoi o aproximație mai bună prin verificări efectuate pe model.

CONCLUZII

1. Prin înregistrarea simultană a fluctuațiilor unor puteri perturbatoare, ale frecvenței și ale puterilor de schimb ale sistemelor interconectate și prin calculul funcțiilor de autocorelație și de corelație mixtă corespunzătoare, se obțin coeficienții unor ecuații integrale a căror rezolvare permite determinarea funcțiilor de transfer ale sistemelor interconectate.

2. Rezolvarea ecuațiilor integrale obținute poate fi efectuată în cazul general prin metoda transformării Fourier, metoda transformatei Laplace de argument real sau prin metoda momentelor, ultima metodă conducînd la relații simple pentru determinarea caracteristicilor statice. În lucrare se dau algoritme de calcul pentru aplicarea primelor două metode, folosind submetodele ecuațiilor normale sau ale gradientelor, care permit folosirea unui număr oricît de mare de date experimentale.

3. Aproximarea funcției de autocorelație a mărimii perturbatoare printr-o sumă de funcții cvasiperiodice permite determinarea analitică a funcției de corelație mixtă dintre mărimea de intrare și cea de ieșire, prin identificarea căreia cu rezultatele experimentale se deduc parametrii funcției de transfer cu gradul de aproximație dorit.

ANEXA 1

EXEMPLU DE APLICARE A METODEI APROXIMĂRII PRIN FUNCȚII CVASIPERIODICE

S-au înregistrat simultan în sistemul electroenergetic al R.P.R. timp de 10 minute:

— frecvența, cu ajutorul unui traductor de abateri de frecvență [9] și al unui potențiometru înregistrator EPP (fig. 4);

— fluctuațiile de putere într-unul din nodurile sistemului, cu ajutorul unui wattmetru înregistrator (fig. 5);

— puterea de schimb, telemăsurată și înregistrată cu ajutorul unui potențiometru înregistrator EPP (fig. 6).

Cu ajutorul unui calculator numeric au fost deduse pentru fiecare dintre aceste mărimi fluctuațiile în jurul unei drepte medii:

$$\Delta x_i = x_i - \bar{x} - \beta (t_i - \bar{t}), \qquad (11)$$

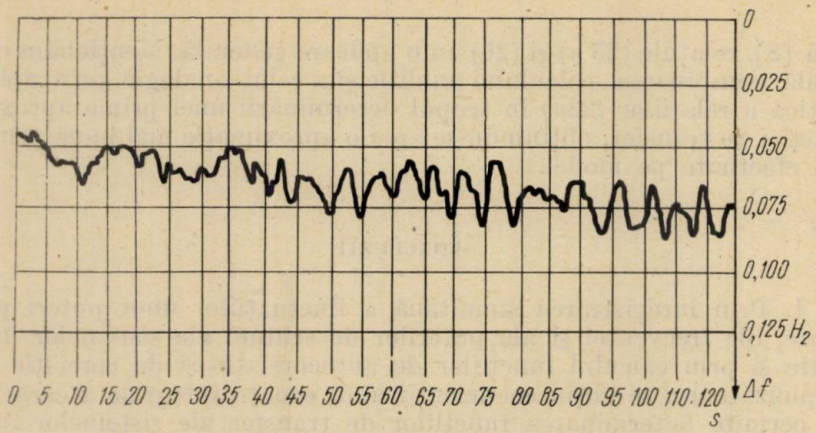


Fig. 4. — Fragment din diagrama fluctuaţiilor frecvenţei.

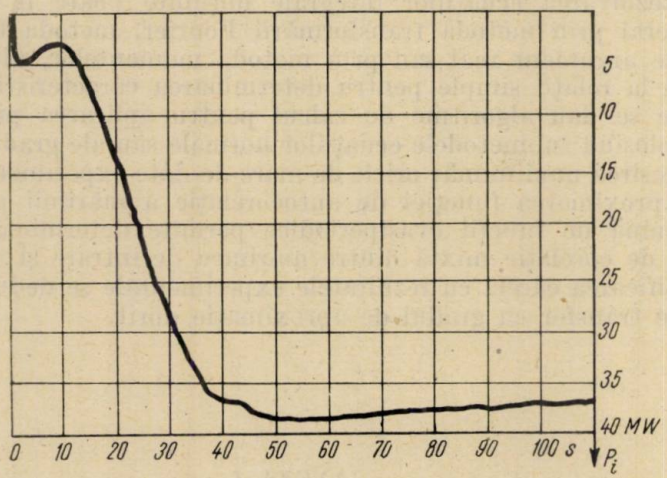


Fig. 5. — Fragment din diagrama variaţiei puterii perturbatoare.

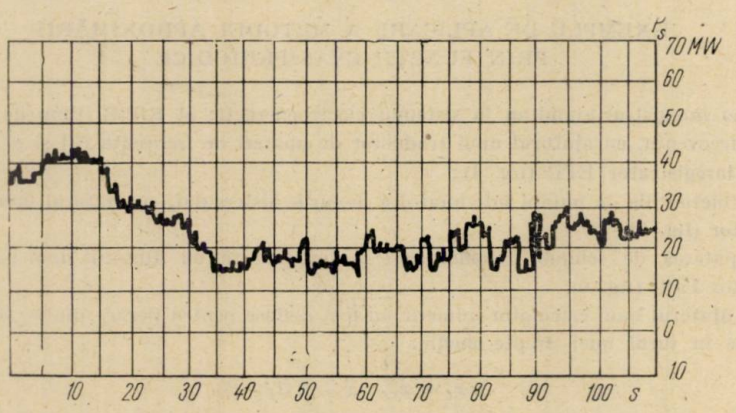


Fig. 6. – Fragment din diagrama variaţiei puterii de schimb.

unde

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{1}^{N} x_i, \quad \bar{t} = \frac{N}{2}\Delta t, \tag{1.1}$$

$$\beta = 12\frac{\Sigma\, x_i\, i}{N(N^2+1)} - 6\,\bar{x}\,\frac{N+1}{N^2+2}.$$

Au fost apoi calculate funcțiile de autocorelație și de corelație mixte, conform relației:

$$\mu_{xy}(\tau) = \frac{1}{N - \dfrac{\tau}{\Delta t}} \sum_{1}^{N-\tau/\Delta t} x_i\, y_{i+\tau/\Delta t} \tag{1.2}$$

pentru $t_2 > t_1$;

$$\mu_{xy}(\tau) = \mu_{yx}(\tau)$$

pentru $t_1 > t_2$; pentru $t_2 > t_1$.

Din curbele calculate (fig. 7) rezultă că funcția de autocorelație a mărimii perturbatoare poate fi scrisă sub forma:

$$\mu_{P_iP_i}(\tau) = 278\, e^{-\frac{6,3}{10^4}\tau} \cos\frac{2,065}{10^2}\,\tau. \tag{1.3}$$

În domeniul $t_1 > t_2$ funcția de corelație mixtă $\mu_{P_if}(t_2, t_1)$ poate fi aproximată prin:

$$\mu_{P_if}(\tau) = -\,0,15\; e^{-\alpha\tau}\cos(\beta\tau + 30°50'). \tag{1.4}$$

Aplicînd relația (23), se poate astfel obține o aproximație de ordinul întîi a funcției de transfer de forma:

$$F^{(1)}(s) = -\frac{1}{K^{(1)}(1 + s\,T)}. \tag{1.5}$$

Din condiția:

$$F^{(1)}(\alpha - j\,\beta) = -\frac{0,15}{278}\, e^{j\,30°50'} \tag{1.6}$$

rezultă, prin identificarea termenilor:

$$K^{(1)} = 1\,568\,\frac{\text{MW}}{\text{Hz}}; \qquad T = 29,4\ \text{s}.$$

În mod analog, din:

$$\mu_{P_iP_s}(\tau) = 242\; e^{-\alpha\tau}\cos(\beta\tau - 14°10') \tag{1.7}$$
$$t_1 > t_2$$

rezultă:

$$F_s^{(1)}(\alpha - j\,\beta) = 0,856\, e^{j\,4°45'}, \tag{1.8}$$

astfel încît:

$$F_A^{(1)}(\alpha - j\,\beta) = \frac{F^{(1)}(\alpha - j\beta)}{1 - F_S^{(1)}(\alpha - j\,\beta)} = \frac{1}{300}\, e^{j\,5°10'}$$

și

$$K_A^{(1)} = 298\,\frac{\text{MW}}{\text{Hz}} \qquad T_A = 4,4\ \text{s}.$$

Problema este astfel *rezolvată în primă aproximaţie.*

O îmbunătăţire a determinării funcţiilor de transfer se obţine dacă se continuă calculul pentru domeniul $t_2 > t_1$.

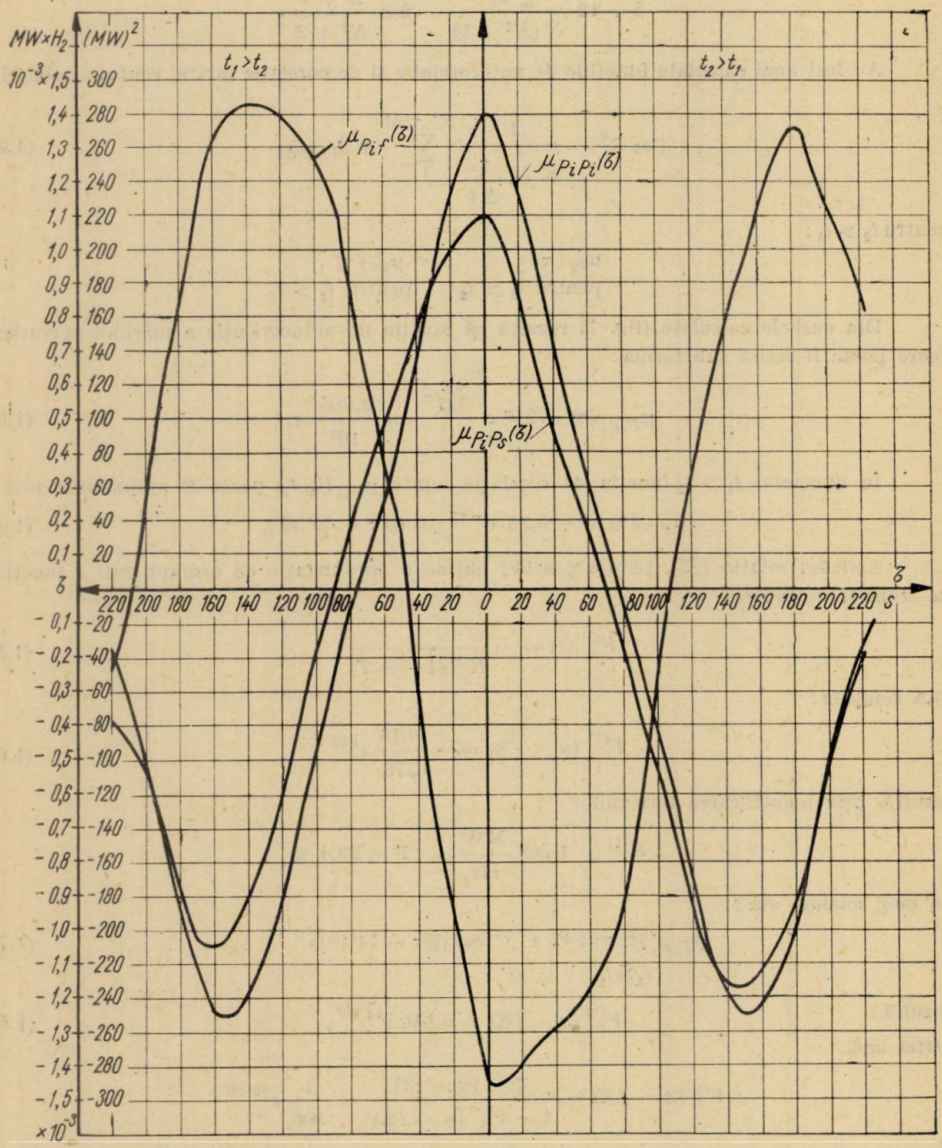


Fig. 7. — Funcţiile de autocorelaţie a puterii perturbatoare şi de corelaţie mixtă între puterea perturbatoare şi frecvenţă, resp. putere de schimb.

Întrucît $\alpha \ll \beta$,

$$A_k F^{(1)}_{t_2>t_1}(z_k)\, e^{z_k \tau} \approx -0{,}15\, e^{-\frac{6{,}6}{10^4}\tau} \cos\left(\frac{2{,}065}{10^2}\tau - 30°50'\right). \tag{1.9}$$

Scăzînd această expresie din $\mu^{(e)}_{P_i f}(\tau)$, se obține funcția $g_f(\tau)$, reprezentată în figura 8.

Această funcție admite un maxim pentru $\tau = 40$ s, adică :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} g_f(\tau)_{\tau=40} = 0. \tag{1.10}$$

Dacă $\alpha_k \ll \beta_k$, expresia (26) poate fi pusă sub forma :

$$g_f(\tau) = \frac{2\, e^{-\delta\tau}}{k_f} \sum A_k \alpha_k \operatorname{Re}\left\{\frac{G(\gamma)}{(\nu + j\beta)(\nu - j\beta).}\right\}. \tag{1.11}$$

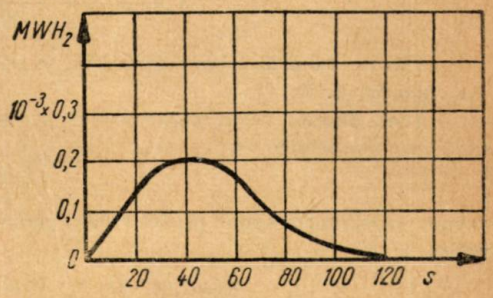


Fig. 8. — Funcția $g(\tau)$.

Anulînd derivata acestei expresii pentru $\tau = 40$ s, rezultă

$$\operatorname{tg} 40\,\gamma = \operatorname{cotg} \varphi, \tag{1.12}$$

unde :

$$\varphi = \operatorname{arc\,tg} \frac{\lambda\gamma}{1 - \lambda\delta} - \operatorname{arc\,tg} \frac{\gamma}{\delta} + \operatorname{arc\,tg} \frac{\gamma + \beta}{\delta} + \operatorname{arc\,tg} \frac{\gamma - \beta}{\delta}.$$

În ipoteza că toți termenii din această expresie sînt suficient de mici pentru a permite înlocuirea tangentelor prin argumentele corespunzătoare, rezultă :

$$\varphi_{rad} = \frac{\gamma}{\delta} \frac{1}{1 - \lambda\delta}. \tag{1.13}$$

Din relația (15) :

$$F(z_k) = \frac{B_k}{A_k} e^{j\varphi_k},$$

unde :

$$\frac{B_k}{A_k} = -\frac{1}{1\,850}; \quad \varphi_k = 30°50',$$

rezultă :

$$\frac{1}{k_f} \sqrt{\frac{(1 + \lambda\alpha)^2 + \lambda^2\beta^2}{[(\delta + \alpha)^2 + (\beta + \gamma)^2]\,[(\delta + \alpha)^2 + (\beta - \gamma)^2]}} = \frac{1}{1\,850} \tag{1.14}$$

și

$$-\operatorname{arc\,tg} \frac{\lambda\beta}{1 + \lambda\alpha} + \operatorname{arc\,tg} \frac{\beta - \gamma}{\delta + \alpha} + \operatorname{arc\,tg} \frac{\beta + \gamma}{\delta + \alpha} = \varphi_k. \tag{1.15}$$

Înlocuind în expresia de mai sus arcurile prin tangente, se obține, pentru $\alpha \ll \beta$:

$$\lambda = \frac{2}{\delta} - \frac{\varphi_k}{\beta}. \tag{1.16}$$

Înlocuind expresiile (1.13) și (1.16) în (1.12), rezultă:

$$\delta = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 1{,}1 \cdot 10^4 \gamma^2 \operatorname{tg}^2 40\gamma}}{27{,}5}. \tag{1.17}$$

Pentru ca δ să fie o mărime pozitivă, se reține numai soluția corespunzătoare semnului + din expresia (1.17).

Dînd diferite valori parametrului γ, s-a obținut cea mai bună aproximare a curbei experimentale pentru

$$\gamma = 0{,}1 \cdot 10^{-2},$$

valoare căreia îi corespund pentru ceilalți parametri, conform relațiilor (1.17), (1.16) și (1.14), valorile:

$$\delta = 7{,}26 \cdot 10^{-2}; \quad \lambda = 0; \quad k = 3{,}25 \cdot 10^5.$$

Panta caracteristicii statice frecvență-putere a sistemului interconectat este:

$$k(\delta^2 + \gamma^2) = 1\,720 \text{ MW/Hz}.$$

Dacă funcția de transfer a sistemului A este:

$$F_A(s) = \frac{1 + \lambda S}{k_A[(s+\delta_A)^2 + \gamma_A^2]}, \tag{1.18}$$

funcția de transfer dintre perturbație în sistemul A și puterea de schimb este (1.19):

$$F_s(s) = 1 - \frac{k_A[(s+\delta_A)^2 + \gamma_A^2]}{k[(s+\delta)^2 + \gamma^2](1 + \lambda s)}. \tag{1.19}$$

Examinînd forma funcției de corelație mixtă $\mu_{PiPs}(\tau)$ determinată din înregistrări, se observă o continuitate între domeniile $\tau < 0$, $\tau > 0$, adică funcția $g_s(\tau)$ este neglijabilă.

S-a admis de aceea $\delta_A = \delta$ și $\gamma_A = \gamma$, ipoteză ce corespunde acestei observații. În acest caz:

$$F_s(s) = \frac{1 - \frac{k_A}{k} + \lambda s}{1 + \lambda s}. \tag{1.20}$$

Funcția de corelație mixtă $\mu_{PiPs}(\tau)$ poate fi aproximată prin:

$$\underset{t_1 > t_2}{\mu_{PiPs}(\tau)} = 242\, e^{-\alpha\tau} \cos(\beta\tau - 14°10'). \tag{1.21}$$

Aplicarea relației (23) conduce la identitatea

$$\frac{1 - \frac{k_A}{k} + \lambda\alpha - j\lambda\beta}{1 - \lambda\alpha - j\lambda\beta} = 0{,}856\, e^{-j\,0{,}0825}, \tag{1.22}$$

din care rezultă:

$$\lambda_A = 23,$$
$$k_A = 0{,}147 \quad k_f = 0{,}48 \cdot 10^5.$$

Funcția de transfer a sistemului A este deci:

$$F_A = -\frac{1 + 23\,s}{0{,}48 \cdot 10^5\,[(s + 0{,}0726)^2 + 10^{-6}]},$$

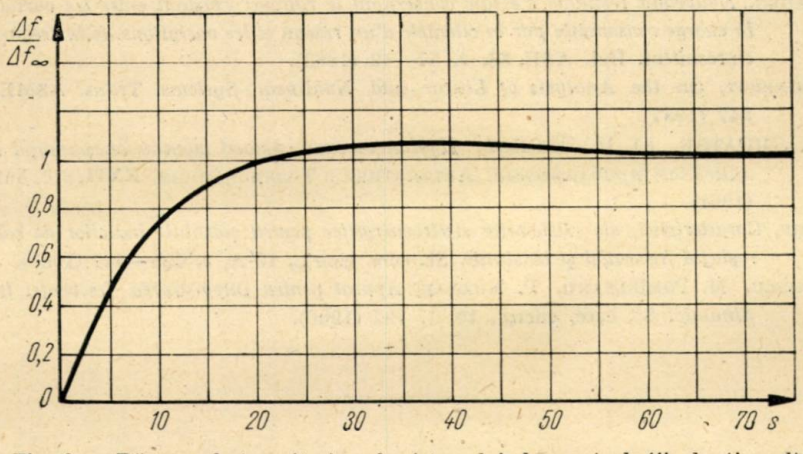


Fig. 9. — Răspunsul tranzitoriu al sistemului la perturbații de tip salt corespunzător funcției de transfer determinate.

unde panta caracteristicii statice frecvență-putere

$$K_A = k_A\,(\delta^2 + \gamma^2) = 253 \text{ MW/Hz}.$$

În figura 9 s-a reprezentat răspunsul tranzitoriu la o perturbație-salt corespunzător funcției de transfer determinate; se observă că acesta corespunde rezultatelor experimentale uzuale obținute la deconectarea unui grup sau a unei legături de interconexiune.

În legătură cu ordinul de mărime al perturbației, se observă că s-ar fi putut folosi fluctuații de amplitudine mai mică, dacă sistemul A ar fi lucrat izolat sau dacă ne-am fi mulțumit să determinăm numai funcția de transfer $F_s\,(s)$, care indică raportul dintre funcțiile de transfer ale sistemelor interconectate.

Pentru mărirea preciziei, ar fi fost necesară extinderea duratei de înregistrare și prelucrare, ceea ce ar fi fost ușurat dacă citirea datelor ar fi fost automatizată, iar prelucrarea s-ar fi realizat pe cale analogică. De asemenea, s-ar fi putut obține o funcție de transfer de ordinul 2 numai cu ajutorul relațiilor simple (23), dacă funcția de autocorelație a mărimii de intrare ar fi conținut doi termeni cvasiperiodici de frecvență sensibil diferită și de amplitudine comparabilă.

Primit la redacție la 15 august 1964

BIBLIOGRAFIE

1. E. Arie, *Etude des fluctuations de la charge avec applications au calcul des fluctuations de la puissance d'échange et à la détermination éxperimentale des caracteristiques dynamiques d'un système électro-énergétique*. Rev. Electr. Energ., A **8**, 2, 267—285 (1963).

2. T. P. Goodman, *Determination of the characteristics of multi-input and nonlinear systems from normal operating records.* Trans. ASME, **79**, *3*, 567—575 (1957).
3. V. S. Pugachev, *Statistical methods in automatic control.* 2nd. International Congress of IFAC (1963).
4. Ю. П. Леонов, Л. Н. Липатов, *Применение статистических методов для определения характеристик объектов.* Автоматика и Телемеханика, **XX**, *9*, с. 1289 (1959).
5. D. Gaden, *Nouveaux resultats d'essais concernant le rapport existant entre les variations de la charge consommée par la clientèle d'un réseau et les variations de la fréquence qui en resultent.* Bul. ASE, **54**, *2*, 37—42 (1963).
6. M. Shinbrot, *On the Analysis of Linear and Nonlinear Systems.* Trans. ASME, **79**, *3* 547 (1957).
7. Л. Н. Липатов, Ю. П. Леонов, *Практический метод оценки оператора связи в линейном приближении.* Автоматика и Телемеханика, **XXII**, *5* с. 561—570, (1961).
8. E. Arie, *Caracteristici ale sistemelor electroenergetice pentru calculul indicilor de calitate şi reglajul frecvenţei şi tensiunii.* St. cerc. energ., **13-A**, *3*, 425—447 (1963).
9. S. Ionescu, M. Pomîrleanu, P. Nicolae, *Aparat pentru înregistrarea frecvenţei în regim dinamic.* St. cerc. energ., **10**, *1*, 192 (1960).

CONTRIBUŢII LA DETERMINAREA SUPRATENSIUNILOR ATMOSFERICE INDUSE ÎN LINIILE AERIENE DE ÎNALTĂ TENSIUNE[1])

DE

GLEB DRĂGAN

Institutul de energetică al Academiei R.P.R., Şos. Vitan nr. 236, Bucureşti

621.311.1.015.34 : 621.3.013.7

Lucrarea se referă la calculul supratensiunilor atmosferice induse. În prima parte se prezintă sub o formă mai unitară, metoda de calcul propusă de D. V. Razevig; în acest scop se consideră o sursă punctuală de curent ce se propagă de-a lungul canalului curentului de trăznet şi se utilizează potenţialele electrodinamice retardate. Relaţiile de calcul determinate neputînd fi integrate decît în anumite cazuri particulare, sînt dificile de aplicat în practică. În a doua parte a lucrării se stabilesc pe o cale directă relaţii de calcul a supratensiunilor atmosferice induse, considerînd o sursă de curent dată de o undă de impulsie. Cu ajutorul formulelor lui Gauss se transformă aceste relaţii pentru a putea fi utilizate la un calculator cifric.

1. CONSIDERAŢII GENERALE

Extinderea reţelelor de înaltă tensiune a impus aprofundarea cercetărilor privind fenomenologia producerii supratensiunilor atmosferice şi protecţia împotriva acestor supratensiuni. Paralel cu precizarea metodologiei de calcul a supratensiunilor produse de loviturile directe ale trăz-

[1]) Articol apărut şi în „Rev. Roum. Sci. Tech. — Electrotechn. Energ.", **9**, *4* (1964).

St. cerc. energ. electr. Tom 14 Nr. 4 p. 969—977 Bucureşti 1964

netului, se constată tendința de a studia modul de apariție a supratensiunilor induse [1]—[8].

Metode de calcul utilizate în mod curent pentru determinarea supratensiunilor produse de loviturile directe presupun propagarea unei unde de supratensiune de-a lungul unui conductor cu impedanța caracteristică Z_0, reprezentată de canalul curentului de trăznet; valoarea supratensiunii se stabilește pe baza reflexiilor undelor în punctele nodale ale circuitului echivalent considerat. Noile metode de calcul propuse [2], [3] consideră o sursă punctuală de curent, iar valoarea supratensiunii se obține pe baza legilor generale ale electrotehnicii.

În prima parte a lucrării se face o prezentare, sub o formă mai unitară, a metodei de calcul propuse de D. V. Razevig [1], care reprezintă o sintetizare a metodelor de calcul a supratensiunilor induse, considerînd o sursă punctuală de curent. În continuare se dă calculul supratensiunilor atmosferice induse pe o cale diferită. În acest scop se consideră o sursă de curent, reprezentată printr-o undă de impulsie.

În ultima parte a lucrării se indică rezultatele obținute pe baza relațiilor de calcul stabilite, în care scop s-a utilizat un calculator digital.

2. DETERMINAREA SUPRATENSIUNILOR ATMOSFERICE INDUSE

Se știe că trăznetul reprezintă o descărcare în scînteie cu caracter discontinuu. Intensitatea cîmpului electric într-un punct situat în apropierea trăznetului depinde de formele de dezvoltare a descărcării în scînteie, fiind mult mai mică în cazul dezvoltării liderului în comparație cu cazul dezvoltării descărcării principale. Totodată, deoarece viteza de dezvoltare a liderului este redusă, se poate considera că în această situație cîmpul electric are caracterul unui cîmp electrostatic. În acest caz, conductorul liniei aeriene, presupus de lungime infinită, are un potențial nul. Explicația fenomenologică constă în faptul că componenta longitudinală a cîmpului electric creat de sarcinile electrice din lider, este compensat de componenta longitudinală a cîmpului electric produs de repartiția neuniformă a sarcinilor de-a lungul conductorului.

Intensitatea, ca și viteza de variație a cîmpului electric în timpul producerii descărcării principale, este mult mai mare. În consecință, această formă a descărcării determină producerea supratensiunilor atmosferice induse. Cum densitatea locală a sarcinilor spațiale în regiunea tranzitorie de dezvoltare a descărcării principale scade, tinzînd către zero, se poate considera că de-a lungul canalului de descărcare se propagă o undă de sarcini electrice. Viteza de propagare a undei de curent se poate considera constantă.

Considerațiile menționate mai sus precizează ipotezele luate în considerare la studiul supratensiunilor atmosferice induse. Paralel cu aceasta se vor admite următoarele ipoteze simplificatoare :

— stîlpul liniei aeriene se va asimila cu un cilindru, iar conductoarele liniei se vor considera filiforme ;

— se neglijează deformarea undelor de supratensiune datorite efectului corona sau a rezistenței conductorului.

Spre deosebire de situația ce apare în timpul dezvoltării liderului, la producerea descărcării principale cîmpul electric nu mai poate fi considerat cvasistaționar. Componenta electrică și magnetică a cîmpului electric poate fi determinată în funcție de potențiale electrodinamice retardate [9]:

$$E = -\operatorname{grad} V - \gamma_0 \frac{\partial \bar{a}}{\partial t}, \qquad B = \operatorname{rot} \bar{a}, \tag{1}$$

unde

$$V(\bar{r}, t) = \frac{\varkappa}{4\pi\varepsilon} \int \frac{\rho_a [\bar{r}', t - \sqrt{\nu_0 \gamma_0 \varepsilon\mu}\,|\bar{r} - \bar{r}'|]}{|\bar{r} - \bar{r}'|} \, dv',$$

$$a(\bar{r}, t) = \frac{\varkappa \nu_0 \mu}{4\pi} \int \frac{j [\bar{r}', t - \sqrt{\nu_0 \gamma_0 \varepsilon\mu}\,|\bar{r} - \bar{r}'|]}{|\bar{r} - \bar{r}'|} \, dv'. \tag{2}$$

În cazul particular al problemei studiate, ecuația diferențială a potențialului scalar, respectiv a potențialului vector, se simplifică. Pentru

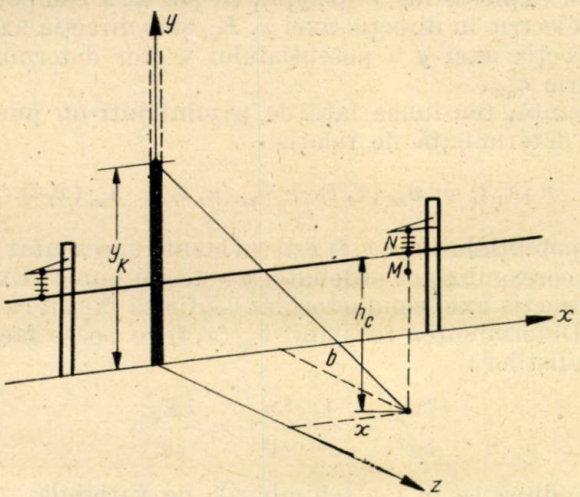


Fig. 1. — Schema de calcul a supratensiunilor atmosferice induse pe o linie de înaltă tensiune.

aceasta se va considera figura 1, care reprezintă o schemă simplificată a fenomenelor studiate. În această figură, N reprezintă un punct oarecare de pe conductorul liniei de coordonate x, h_c și b; P — proiecția punctului N pe suprafața de la care începe descărcarea; M — un punct oarecare de ordonată h, situat pe verticala coborîtă din punctul N.

Rezultă, în consecință, că potențialul scalar va fi funcție numai de coordonatele x și y, iar ecuația diferențială care determină potențialul scalar este :

$$\frac{1}{\nu_0 \gamma_0 \varepsilon \mu}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)-\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}=-\frac{\varkappa}{\nu_0 \gamma_0}\frac{\rho_a}{\varepsilon^2 \mu}. \tag{3}$$

Făcînd schimbările de variabilă

$$\xi = x + \alpha r\,;\ \eta = y + \beta r, \tag{4}$$

unde

$$r = \sqrt{(\alpha - \xi)^2 + (y - \eta)^2},$$

se obține soluția pentru potențialul scalar V [10], [11] :

$$V(x, y, t) = \frac{\varkappa c}{2\pi\varepsilon\sqrt{\nu_0\gamma_0}}\int_0^t\left[\iint_{r\leqslant a(t-\tau)}\frac{\rho_a(\xi, \eta, \tau)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2 - r^2}}\right]\mathrm{d}\tau. \tag{5}$$

O expresie analogă se obține pentru potențialul vector, cu observația că potențialul vector are numai componenta în direcția axei y, canalul descărcării principale fiind considerat perpendicular pe suprafața solului.

Cunoscînd expresia lui $V(x, y, t)$, se pot afla componentele intensității cîmpului electric în direcția axei y, E_{yv} și în direcția axei x, E_{xv}. Componenta în direcția axei y a potențialului vector determină intensitatea cîmpului electric E_{ya}.

În consecință, tensiunea față de pămînt într-un punct oarecare de pe linie va fi determinată de relația :

$$u(x, t) = u_{xv}(x, t) + u_{yv}(x, t) + u_{ya}(x, t). \tag{6}$$

În relația (6), potențialul $u_{yv}(x, t)$ este evident reprezentat de potențialul scalar $V(x, t)$, corespunzător ordonatei y a acelui punct. Existența componentei E_{xv} în direcția axei conductorului confirmă faptul că cîmpul electric nu este plan. Determinarea tensiunii $u_{xv}(x, t)$ se poate face plecînd de la ecuația telegrafiștilor :

$$\frac{\partial^2 u_{xv}}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u_{xv}}{\partial t^2} = \frac{\partial E_{xv}}{\partial x}, \tag{7}$$

a cărei soluție, după ce se fac schimbările de variabilă $\xi = x \pm c(t - \tau)$, este :

$$u_{xv}(x, t) = \frac{c}{2}\int_0^t E_{xv}[\tau, x - c(t-\tau)]\,\mathrm{d}\tau - \frac{c}{2}\int_0^t E_{xv}[\tau, x + c(t-\tau)]\,d\tau. \tag{8}$$

Relația de mai sus determină unda directă și inversă ce se propagă de-a lungul liniei.

După cum s-a menționat, contribuția cîmpului magnetic se exercită numai asupra componentei în direcția axei y a cîmpului electric; în consecință, cîmpul magnetic nu influențează fenomenele tranzitorii din linie. Se obține

$$E_{ya} = -\gamma_0 \frac{\partial a_y}{\partial t}, \tag{9}$$

de unde

$$u_{ya}(x, t) = \int \overline{E}_{ya}\, d\bar{l}. \tag{10}$$

Relațiile menționate se încadrează în teoria generală și în metoda de calcul elaborată de D. V. Razevig [1], fiind prezentate într-o formă mai unitară, independent totodată de sistemul de unități adaptat.

Determinarea supratensiunilor pe baza acestor relații întîmpină dificultăți, fiind necesară integrarea ecuațiilor diferențiale pentru condiții inițiale date. Pentru a întîmpina aceste dificultăți, supratensiunile atmosferice induse se pot stabili pe o cale directă, ipotezele de calcul și principiile de bază fiind aceleași. În acest scop se va propune o undă de impulsie de curent, care se poate reprezenta printr-o relație de forma:

$$i = I_0 (e^{-p_1 t} - e^{-p_2 t}), \tag{11}$$

unde I_0 este amplitudinea, iar p_1 și p_2 două constante care definesc parametrii curentului de trăznet.

Repartiția curentului de trăznet de-a lungul canalului descărcării principale se exprimă prin:

$$i = I_0 \left[e^{-\frac{p_1}{v}(vt - y)} - e^{-\frac{p_2}{v}(vt - y)} \right], \tag{12}$$

unde vt este ordonata capului descărcării principale, iar y ordonata punctului de la care a început această descărcare.

Se poate scrie:

$$v = \beta c \qquad (\beta < 1).$$

Ținînd seama de întîrzierea la transmiterea impulsului, calcularea potențialului vector, respectiv a potențialului scalar, trebuie făcută pentru timpul $t - \frac{r}{c}$, unde raza vectoare r se determină din relația:

$$r_{1,2} = \sqrt{(y \mp h)^2 + x^2 + b^2}. \tag{13}$$

În consecință, este necesar să se considere pentru curent relația:

$$i = I_0 \left\{ e^{-\frac{p_1}{v}\left[v\left(t - \frac{r}{c}\right) - y\right]} - e^{-\frac{p_2}{v}\left[v\left(t - \frac{r}{c}\right) - y\right]} \right\}. \tag{14}$$

Pe baza relației (14) se poate stabili expresia potențialului vector, ținînd seama de faptul că nu are decît componenta după axa oy și presupunînd

că descărcarea principală pornește de la suprafața pămîntului ($h = 0$), ceea ce practic nu modifică rezultatele :

$$a_y = \frac{\varkappa \nu_0 \mu I_0}{4\pi}\left[\int_0^{y_k} \frac{e^{-p_1 t} e^{\frac{p_1}{\beta c} y} e^{\frac{p_1}{c}\sqrt{x^2+y^2+b^2}}}{\sqrt{y^2+x^2+b^2}}\,dy - \int_0^{y_k} \frac{e^{-p_2 t} e^{\frac{p_2}{\beta c} y} e^{\frac{p_2}{c}\sqrt{x^2+y^2+b^2}}}{\sqrt{y^2+x^2+b^2}}\,dy\right], \tag{15}$$

unde limita superioară de integrare y_k este egală cu [1], [2] :

$$y_k = \frac{\beta}{1-\beta^2}\left[\frac{\beta ct}{\beta} - \sqrt{\beta^2 c^2 t^2 + (1-\beta^2)(x^2+b^2)}\right]. \tag{16}$$

Se poate constata ușor că pentru y_k se poate constata valoarea aproximativă

$$y_k = \beta ct, \tag{17}$$

a cărei valoare e mult apropiată de cea dată de relația (16). Cunoscînd expresia potențialului vector a_y, se poate determina expresia cîmpului electric E_{ya} pe baza relației (9). Se obține, după o serie de transformări :

$$E_{ya} = -\frac{\varkappa \nu_0 \gamma_0 \mu I_0}{4\pi}\left\{\frac{e^{p_1\sqrt{\beta^2 t^2 + \left(\frac{m}{c}\right)^2}} + e^{p_2\sqrt{\beta^2 t^2 + \left(\frac{m}{c}\right)^2}}}{c\sqrt{\beta^2 t^2 + \left(\frac{m}{c}\right)^2}}\right. \tag{18}$$

$$\left. - p_1 e^{-p_1 t}\int_0^{y_k} \frac{e^{\frac{p_1}{\beta c} y + \frac{p_1}{c}\sqrt{y^2+m^2}}}{\sqrt{y^2+m^2}}\,dy - p_2 e^{-p_2 t}\int_0^{y_k} \frac{e^{\frac{p_2}{\beta c} y + \frac{p_2}{c}\sqrt{y^2+m^2}}}{\sqrt{y^2+m^2}}\,dy\right\},$$

unde $m^2 = x^2 + b^2$.

Valoarea tensiunii inițiale se determină cu ajutorul relației (10). Luînd în considerare că intensitatea cîmpului electric nu variază mult pentru înălțimea h_c, de la sol pînă la conductor [1] se poate scrie :

$$u_{ya}(x, t) = -E_{ya} \cdot h. \tag{19}$$

Potențialul scalar se determină analog potențialului vector. Într-adevăr variația densității sarcinii de-a lungul canalului descărcării principale se exprimă prin relația :

$$\rho_a(t) = \frac{I_0}{v}\left[e^{-\frac{p_1}{v}(vt-y)} - e^{-\frac{p_2}{v}(vt-y)}\right]. \tag{20}$$

În consecință, pentru componenta verticală a potențialului scalar, care interesează în vederea calculării tensiunii conductorului față de stîlp, se obține expresia, ținînd seama de întîrzierea transmiterii impulsului :

$$V_y = \frac{\varkappa}{4\pi\varepsilon}\frac{I_0}{v}\left[\int_0^{y_k} \frac{e^{-p_1 t} e^{\frac{p_1}{\beta c} y} e^{\frac{p_1}{c}\sqrt{y^2+m^2}}}{\sqrt{y^2+m^2}}\,dy - \int_0^{y_k} \frac{e^{-p_2 t} e^{\frac{p_2}{\beta c} y} e^{\frac{p_2}{c}\sqrt{y^2+m^2}}}{\sqrt{y^2+m^2}}\,dy\right]. \tag{21}$$

Componenta după axa oy a cîmpului electric se obține din :

$$E_{yv} = -\frac{\partial V_y}{\partial h}, \tag{22}$$

de unde se obține :

$$E_{yv} = -\frac{\varkappa I_0}{4\pi\varepsilon\beta c}\left[\int_0^{y_k} \frac{e^{-p_1 t}\, e^{\frac{p_1}{\beta c} y}\, e^{\sqrt{y^2+m^2}}\, y\,(\sqrt{y^2+m^2}-1)}{\sqrt{(y^2+m^2)^3}}\,dy \right. \tag{23}$$

$$\left. -\int_0^{y_k} \frac{e^{-p_2 t}\, e^{\frac{p_2}{\beta c} y}\, e^{\sqrt{y^2+m^2}}\, y\,(\sqrt{y^2+m^2}-1)}{\sqrt{(y^2+m^2)^3}}\,dy \right].$$

Avînd pe E_{yv}, se obține ușor valoarea tensiunii determinate de componenta verticală a potențialului scalar, luînd în considerare ipoteza simplificatoare menționată mai sus :

$$u_{vy} = E_{vy} \cdot h. \tag{24}$$

Avînd valoarea celor două componente ale tensiunii, se poate determina valoarea supratensiunii atmosferice induse.

Pentru calcularea valorilor lui E_{ya} și E_{yv} se va folosi formula de aproximare a lui Gauss [12]

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\sum_{i=1}^{n} C_i f\,[a+(b-a)]\,U_i + R_n, \tag{25}$$

unde coeficienții C_i și U_i se pot determina prin calcule sau se pot lua din tabele. Pentru cazul în care numărul de noduri este mare, restul R_n se poate lua egal cu zero.

Luînd în considerare cele menționate, precum și faptul că limita inferioară de integrare este egală cu zero, în cazul cîmpului electric E_{ya}, se obține :

$$E_{ya} = -\frac{\varkappa \nu_0 \gamma_0 \mu}{4\pi} I_0 \left\{ \frac{e^{p_1\sqrt{\beta^2 t^2+\frac{m^2}{c^2}}} + e^{p_2\sqrt{\beta^2 t^2+\frac{m^2}{c^2}}}}{c\sqrt{\beta^2 t^2+\frac{m^2}{c^2}}} - \right.$$

$$-\sum_{i=1}^{n} \beta C_i \left[p_1 t\, \frac{e^{-p_1 t + p_1 t U_i + p_1\sqrt{\beta^2 t^2 U_i^2+\frac{m^2}{c^2}}}}{\sqrt{\beta^2 t^2 U_i^2 + \left(\frac{m}{c}\right)^2}} + \right. \tag{26}$$

$$\left. \left. + p_2 t\, \frac{e^{-p_2 t + p_2 t U_i + p_2\sqrt{\beta^2 t^2 U_i^2+\frac{m^2}{c^2}}}}{\sqrt{\beta^2 t^2 U_i^2 + \frac{m^2}{c^2}}} \right] \right\}.$$

Utilizînd formula de aproximare a lui Gauss în cazul expresiei (23), rezultă :

$$E_{yv} = -\frac{\varkappa I_0}{4\pi\varepsilon\beta c} y_k \sum_{i=1}^{n} C_i \left[\frac{e^{-p_1 t} e^{\frac{p_1}{\beta c} y_k U_i} e^{\sqrt{y_k^2 U_i^2 + m^2}} y_k U_i (\sqrt{y_k^2 U_i^2 + m^2} - 1)}{\sqrt{(y_k^2 U_i^2 + m^2)^3}} - \right.$$

$$\left. - \frac{e^{-p_2 t} e^{\frac{p_2}{\beta c} y_k U_i} e^{\sqrt{y_k^2 U_i^2 + m^2}} y_k U_i (\sqrt{y_k^2 U_i^2 + m^2} - 1)}{\sqrt{(y_k^2 U_i^2 + m^2)^3}} \right]. \quad (27)$$

Relaţiile (26) şi (27) permit calculul intensităţii cîmpului electric E_{ya}, respectiv E_{yv}, cu ajutorul calculatorului cifric. Se vor lua în considerare următoarele valori ale parametrilor: $p_1 = 700$; $p_2 = 4\,500$; $\beta = 0{,}1$; $I_0 = 100\,000$ A; $m = 30$ (pentru $x = 0$, cînd supratensiunea indusă e maximă).

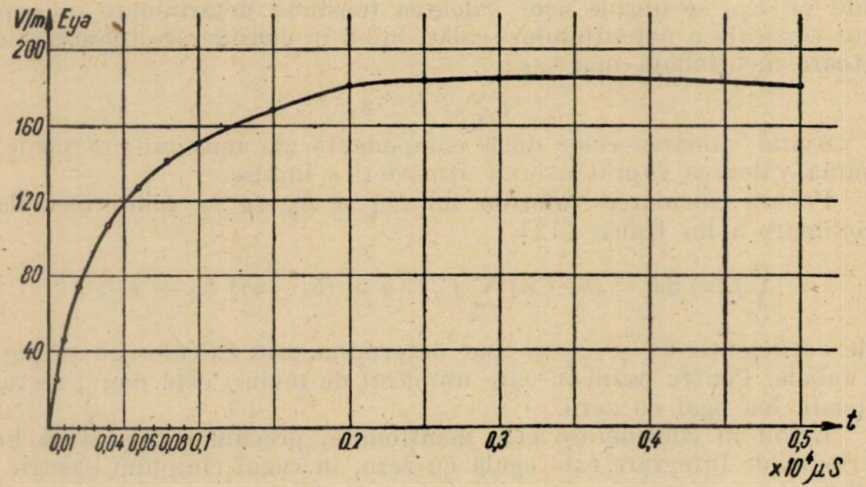


Fig. 2. — Variaţia componenţei verticale a cîmpului electric, E_{ya}, pentru diferite valori ale timpului.

Pe baza relaţiei (26) s-au calculat, cu ajutorul unui calculator cifric, valorile lui E_{ya} pentru o gamă suficient de largă de valori pentru t; curba dată în figura 2 reprezintă această variaţie. O dependenţă asemănătoare se obţine şi în cazul relaţiei (27).

Primit la redacţie la 10 septembrie 1964

BIBLIOGRAFIE

1. Д.В. Разевиг, *Атмосферные перенапряжения на линиях электропередачи*. G.E.I., Москва, 1959, 213.
2. R. Lundholm, *Surtensions produites lors d'un coup de foudre direct sur un pylone de ligne de transport d'energie*. CIGRE 1958, *333*.

3. C. F. Wagner, *A new approach to the calculation of the lightning performance of transmission lines.* Tr. AIEE, **V**, *75*, pt. III, 1 233 (1956).
4. V. Aigner, *Induzierte Blitzüberspannungen und ihre Beziehung zum rüchwartigen Überschlag*, ETZ, *18* (1935).
5. S. Szpor, *Nouvelle theorie des surtensions induites*, **III**, CIGRE, 1948, *308*.
6. А.И. Долгинов, *Индуктированные напряжения на линиях электропередачи.* Электричество, **69**, *10*, 19 (1949).
7. А.В. Разевиг, *Индуктированные перенапряжения при ударах молнии в землю.* N.D.V.S. — Энергетика, *2* (1959).
8. Д.В. Разевиг, *Перенапряжение в линиях передачи при прямом ударе молнии.* I.V.U.S., *6* (1959).
9. R. Răduleț, *Bazele teoretice ale electrotehnicii.* **IV**. Lit. învățămîntului, 1956.
10. Н.И. С. Кошляков и другие, *Основные дифференциальные уравнения математической физики.* G.J.F., Москва, 1962.
11. S. L. Sobolev, *Ecuațiile fizicei matematice.* Edit. tehnică, 1955, 494.
12. Я.С. Дымарский и др, *Справочник программиста*, G.S.I.S.P., 1963.

LUCRĂRI PUBLICATE
DE
ACADEMICIAN PROF. DR. ING. REMUS RĂDULEȚ

I. TEORIA MĂRIMILOR FIZICE

1. *O contribuție în problema dimensiunilor mărimilor fizice.* Electrotehnica, **V**, București (1958).
2. *O generalizare a noțiunii de dimensiune a mărimilor fizice.* Bul. Inst. C.F., **II**, București (1958).
3. *Asupra mărimilor macroscopice de stare a cîmpului electric.* St. cerc. energ.; **VIII**, *3*; București (1958).
4. *Mărimile macroscopice de stare a cîmpului magnetic.* St. cerc. energ., **IX**, *2*, 263—275, București (1959).
5. *Über die makroskopischen Zustandsgrössen des elektromagnetischen Feldes.* Revue d'électrot. et d'énerg.; **IV**, *1*, Bucarest (1959).
6. *Raționalizarea mărimilor fizice.* Standardizarea, *11*/1958, București (1958).
7. *Asupra regulilor de asociație a sensurilor de referință în electrotehnică* (în colaborare cu A. Țugulea). Electrotehnica, **VI**, București (1958).
8. *Raționalizarea în electromagnetism și interpretările ei* (în colaborare cu Al. Timotin). St. cerc. energ., **IX**, *3*, 471—455, București (1959).
9. *Deutungsmöglichkeiten der Rationalisierung im Elektromagnetismus.* Rev. d'électrot. et d'énerg., **IV**, *2*, Bucarest (1959).
10. *O fundamentare a calculului cu mărimi fizice independent de unitățile de măsură* (în colaborare cu Al. Timotin). Studii și cercetări științifice; fizică și științe tehnice, **XI**, *2*; Filiala Iași a Academiei R.P.R.; Iași (1960).
11. *Fondements du calcul avec des grandeurs physiques indépendamment des unités de mesure.* (en collaboration avec Al. Timotin) Revue d'électrotechnique et d'énergetique, **VI**, *1*; Bucarest (1962).
12. *Speciile de mărimi electromagnetice primitive.* Standardizarea, **6**/1962, București (1962).
13. *Les espèces de grandeurs electromagnétiques primitives.* Revue d'électrotechnique et d'énergétique, **VIII**, *1*, Bucarest (1963).

II. CÎMPUL ELECTROMAGNETIC

14. *Aplicarea funcțiunilor analitice în studiul cîmpurilor laplaciene plane.* Bulletin scientifique de l'Ecole Polytechnique, Timișoara, **III**, *3—4* (1930).
15. *Zur Theorie der Vektorfelder.* Bull. sc. Ecole Polyt. Timișoara, **IX**, *3—4* (1942).

16. *Polarizație dipolară și polarizație axială în cîmpurile de vectori* (în colab. cu Ş. Ţiţeica). Studii și cercetări de fizică, **V**, București (1954).
17. *Randwirkungen in der Elektrotechnik.* Bull. sc. Ecole Polyt., Timișoara ; **IV**, *1—2* (1931).
18. *Verstärkungszahl von Trioden mit Parallelsteggitter.* Bull. sc. Ecole Polyt., Timișoara, **XII**, *3—4* (1944).
19. *Longueur équivalente du fer des transformateurs.* Bull. sc. Ecole Polyt., Timișoara, **XII**, *3—4* (1944).
20. *Abschirmung eisenloser Hochfrequenzspulen.* Bull. sc. Ecole Polyt., Timișoara, **XII**, *3—4* (1944).
21. *Zona de transport în problemele dimensionării filtrelor electrice* (în colaborare cu A. Avramescu). St. cerc. energ., **XII** ; București (1962).
22. *Sur les tensions fictives équivalentes aux actions pondéromotrices des champs de force.* Bull. sc. Ecole Polyt. Timișoara, **XIII**, *1* (1948).
23. *Forțele generale în mașinile electrice.* Bul. Inst. C.F. ; **III** ; București (1957).
24. *Die allgemeinen Kräfte in elektrischen Maschinen.* Revue d'électrot. et d'énerg., **III**, *2*, Bucarest (1958).
25. *Sensul fizic al transmisiunii energiei electromagnetice.* Studii și cercetări de fizică ; **IV** (1953).
26. *Schimbul de energie electromagnetică pe la bornele comune a doi dipoli electrici.* Comunicările Academiei R.P.R. **VI**, *6*, București (1956).
27. *Elektromagnetischer Energieaustausch an den gemeinsamen Klemmen zweier elektrischer Zweipole,* Revue d'électrotechnique et d'énergétique, **V**, *1*, Bucarest (1960).

III. LINII ŞI REŢELE ELECTRICE

28. *Stirnabflachung rechteckiger Wanderwellen auf Kraftübertragungsleitungen.* Bull. de mathé matique et physique de l'Ecole Polyt. de Bucarest ; **IX** (1938).
29. *Rechteckige Wanderwellen auf Übertragungsleitungen.* Bull. Sc. Ecole Polyt. Timișoara, **IX**, *3—4* (1940).
30. *Problema curenților vagabonzi la Timișoara.* Buletinul APDE ; **VIII**, *1—2*, București (1939).
31. *Teoria celor mai simple scheme complete, echivalente cu rețelele electrice lineare în raport cu o latură a lor* (în colab. cu P. Dimo). St. cerc. energ. electr., **XIV**, *2*, București (1964).
32. *Théorie des plus simples schémas complets, equivalents aux réseaux électriques linéaires par rapport à un de leurs côtés* (en collaboration avec P. Dimo). Revue roumaine des sciences techniques ; serie électrotechnique et énergétique. **IX**, *3*, Bucarest (1964).

IV. SUDURĂ ŞI ELECTROCĂLDURĂ

33. *Theory of Resistance Welding.* Symposion on the Welding of Iron and Steel, Vol. II, Group *2*, 284—287, London, 1935.
34. *Leistungsbedarf beim elektrischen Widerstandsschweissen.* Bull. sc. Ecole Polyt. Timișoara, **XI**, *3—4* (1943).
35. *Regimul tranzitoriu în încălzirea electrică a barelor omogene pe porțiuni* (în colaborare cu Al. Timotin). St. cerc. energ., **XIII**, *4*, București (1963).
36. *Le régime transitoire du réchauffement électrique des barres homogènes par tronçons* (en collaboration avec Al. Timotin). Revue Roumaine des sciences techniques ; série électrotechnique et énergétique ; **IX**, *1*, Bucarest (1964).

37. *Accidentele prin electrocuțiune în sudura electrică.* Sudura, **VII**, Timișoara (1944).
38. *Echipamentul electric al exploatărilor cu acetilenă.* Sudura, **VII**, Timișoara (1944).

V. CURENȚI ÎN CONDUCTOARE IMOBILE ȘI ÎNCĂLZIRE INDUCTIVĂ

39. *Elektrische Fehlerströme an feuchten Wänden.* Bull. sc. Ecole Polyt. Timișoara; **XI**, *3—4* (1943).
40. *Efectele de margine și proximitate în barele cu secțiune dreptunghiulară la refulare netă a curentului electric* (în colaborare cu C. I. Mocanu). St. cerc. energ., **XIII**, *4*, București (1963).
41. *O aproximație a fenomenelor de refulare netă a curentului electric alternativ în conductoarele prismatice cu oricîte fețe* (în colaborare cu C. I. Mocanu). — St. și cerc. energ. electr., **XIV**, *4*, București (1964).
42. *Approximations des phénomènes de refoulement net du courant électrique alternatif dans les conducteurs prismatiques* (en collaboration avec C I. Mocanu. Revue Roumaine des sciences techniques, série électrotechnique et énergétique, **IX**, *2*, Bucarest (1964).
43. *Zur Theorie der eisenlosen Induktionsöfen.* Dissertation zur Erlangung der Doktorwürde, Eidgenössische Technische Hochschule Zürich, 1930.
44. *Zur Vorausberechnung eisenloser Induktionsöfen.* Bull. sc. Ecole Polyt. Timișoara, **VII**, *3—4* (1937).
45. *Der eisenlose Induktionsofen mit zwei konaxialen Kernleitern.* Bull.sc. Ecole. Polyt. Timișoara; **VII**, *3—4* (1937).
46. *O nouă aproximare a factorilor de formă a șarjelor cuptoarelor de inducție fără fier la refulare netă a curentului indus* (în colaborare cu C. I. Mocanu). St. cerc. energ, electr., **XIV**, *1*, București (1964).
47. *Neue Näherungausdrücke der Formfaktoren des Einsatzes eisenloser Induktionsöfen bei ausgeprägter Stromverdrängung.* (zs. mit C. I. Mocanu) Revue roumaine des sciences techniques, série Electrotechnique et énergétique, **IX**, *1*, Bucarest (1964).
48. *Calculul exact al factorului de formă al rezistenței echivalente a șarjei cuptoarelor cu inducție fără fier pe baza barei model* (în colaborare cu C. I. Mocanu). St. cerc. energ. electr., **XIII**, *3*, 481—495; București (1964).
49. *Contribuție la teoria cuptoarelor de inducție fără fier* (în colaborare cu C. I. Mocanu). St. cerc. energ. electr., **XII**, *3*, București (1963).
50. *Beitrag zur Theorie der eisenlosen Induktionsöfen* (zs. mit C. I. Mocanu). Revue d'électrotechnique et d'énergétique, **VII**, 7, Bucarest (1962).
51. *Determinarea reactanței de dispersiune a unor cuptoare de inducție cu fier* (în colaborare cu Al. Timotin și A. Țugulea). St. cerc. energ., **X**, *3*, București (1960).
52. *Bestimmung des Streublindwiderstandes einiger Kern-Induktionsöfen* (zs. mit Al. Timotin und A. Țugulea). Revue d'électrot. et d'énerg., **V**, *2*, Bucarest (1960).

VI. MAȘINI ȘI APARATE CU INDUCȚIE PRIN MIȘCARE

53. *La hauteur optima des barres dans les rainures des machines à courant alternatif.* Bull. sc. Ecole Polyt. Timișoara, **IV**, *3—4* (1932).
54. *Contribuții la teoria frînelor de inducție (electromagnetice) cu disc neferomagnetic* (în colaborare cu A. Ifrim). St. cerc. energ., **XI**, 1, București (1961).

55. *Zur Theorie der elektromagnetischen Induktionsbremsen mit nichtferromagnetischer Scheibe.* Revue d'électrotechnique et d'énergétique, **VI**, *2*, Bucarest (1961).
56. *Forța de frînare a frînelor de inducție cu disc neferomagnetic avînd partea centrală plină* (în colaborare cu A. Ifrim). St. cerc. energ., **XII**, *4*, București (1962).
57. *Bremskraft der nichtferromagnetischen Induktionsbremsen-Scheiben mit massivem Mittelteil.* Revue d'électrotechnique et d'énergétique, **VIII**, *1*, Bucarest (1963).
58. *Asupra calculului cuplului motorului asincron cu rotorul în formă de pahar* (în colaborare cu A. Ifrim). St. cerc. energ., **XII**, *1*, București (1962).
59. *Zur Berechnung des Drehmomentes von Asynchronmotoren mit Becherläufer.* Revue d'électrotechnique et d'énergétique, **VII**, *1*, 79—99, Bucarest (1962).
60. *Motorul asincron difazat cu lame rotorice neferomagnetice și cîmp magnetic învîrtitor eliptic* (în colaborare cu A. Ifrim). St. cerc. energ., **XII**, *1*, București (1962).
61. *Zur Theorie des Zweiphasen-Asynchronmotors mit Lamellenläufer und elliptischem magnetischen Drehfeld.* Revue d'électrotechnique et d'énergétique, **VII**, *1*, Bucarest (1962).
62. *Forța și cuplul frînelor cu disc feromagnetic, al ambreiajelor și motoarelor de inducție cu rotorul masiv și neted.* St. cerc. energ., **XIII**, *4*, București (1963).
63. *Kraft und Drehmoment von Bremsen mit ferromagnetischen Scheiben, der Kupplungen und Induktionsmotoren mit massivem glatten Läufer.* Revue d'électrotechnique et d'énergétique ; **VIII**, *2*, Bucarest (1963).

VII. LUCRĂRI ENCICLOPEDICE

64. Articole generale, de fizică și electrotehnică în Lexiconul tehnic romîn, coordonarea generală și redactarea lucrării : vol. I, 1949 ; vol. II, 1950 ; vol. III, 1951 ; vol. IV, 1952 ; vol. V, 1953 ; vol. VI, 1954 ; vol. VII, 1955 ; vol. VIII (indice alfabetic), 1956. Edit. Tehnică, București, 1949—1956.
65. Articole generale de fizică și electrotehnică în Lexiconul tehnic romîn în elaborare nouă, coordonarea generală și redactarea lucrării : vol. I și II, 1957 ; vol. III și IV, 1958 ; vol. V, 1959 ; vol. VI și VII, 1960 ; vol. VIII și IX, 1961 ; vol. X și XI, 1962 ; vol. XII și XIII, 1963 ; vol. XIV și XV (sub tipar), 1964 ; — vol. XVI și XVII în manuscris ; vol. XVIII (indice alfabetic romînesc) în manuscris. — Edit. tehnică, București, 1957—1964.

VIII. LUCRĂRI DIDACTICE

66. *Transportul energiei electrice și curenții slabi.* Edit. politehnicii Timișoara, 1932.
67. *Despre radiotehnică.* Edit. politehnicii, Timișoara, 1933.
68. *Arcul electric.* Sudura, **I**, *1* ; Timișoara (1938).
69. *Mașinile electrice de sudură.* Sudura, **I**, *2*, Timișoara (1938).
70. *Radiotehnică generală* ; vol. I. Tipografia Romînească ; Timișoara, 1939.
71. *Radiotehnică generală* ; vol. II, — Edit. politehnicii, Timișoara, 1945.
72. *Calculul vectorial* ; *Fizica* ; vol. I. Edit. politehnicii ; Timișoara, 1941,
73. *Mecanica, acustica și căldura* ; *Fizica*, vol. II. Edit. politehnicii, Timișoara, 1941.
74. *Electricitatea și magnetismul* ; *Fizica*, vol. III. Edit. polit., Timișoara, 1941.

1965 JUL 9

LUCRĂRI APĂRUTE ÎN EDITURA ACADEMIEI R.P.R.

V. PIMSNER, C. A. VASILESCU zi GH. RĂDULESCU, *Energetica turbomotoarelor cu ardere internă*, 1964, 756 p., 45 lei.

D. DAMSKER, *Principii și mijloace noi de automatizare a acționărilor electrice*, 1964, 439 p., 24,50 lei.

N. TIPEI, V. N. CONSTANTINESCU, AL. NICA și O. BIȚĂ, *Lagăre cu alunecare (calcul, proiectare, ungere)*, în limba rusă, 1964, 459 p., 30 lei.

GH. CARTIANU, *Modulația de frecvență* (în limba rusă), 1961, 579 p. + 7 pl., 39,10 lei.

V. N. CONSTANTINESCU, *Lubrificația cu gaze*, 1963, 635 p., 31 lei.

SUZANA GÎDEA, M. PROTOPOPESCU, D. DRIMMER, *Metalurgia fizică a semiconductorilor*, 501 p. + 4 pl., 31 lei.

VASILE MARCU, *Metalizarea prin pulverizare*, 1963, 340 p., 21 lei.

A. MORARU, *Amplidina (mașina electrică amplificatoare de curent continuu cu cîmp transversal)*, 1962, 328 p. + 2 pl., 14,90 lei.

T. OROVEANU, *Scurgerea fluidelor prin medii poroase neomogene*, 1963, 329 p., 16,30 lei.

TRAIAN SĂLĂGEAN, *Fenomene fizice și metalurgice la sudarea cu arcul electric a oțelurilor*, 1963, 219 p., 12,10 lei.

CĂLIN ADRIAN VASILESCU, PERICLE SVORONOS și VICTOR PIMSNER, *Exploatarea rațională a gazelor naturale*, 1963, 367 p. + 7 pl., 26,40 lei.

I. P. „Informația" — c. 4261

43821

Lei 18.—